

Sammlung

von

Beispielen und Aufgaben

aus der

allgemeinen Arithmetik und Algebra.

In systematischer Folge bearbeitet

für

Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen und Gewerbschulen

von

Dr. Eduard Heis,

weil. Prof. der Mathematik und Astronomie
an der Königlichen Akademie zu Münster.

---

86. bis 88. Auflage.



Köln, 1893.

Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.

Vorwort.

Der schnelle Absatz, welchen die vorangegangenen Auflagen der vorliegenden Aufgabensammlung bei ihrer fortdauernden Wertschätzung seitens der Lehrer und Freunde der Mathematik aufs neue erfahren haben, erforderte den Neudruck dreier Doppelauflagen. Seit dem Jahre 1837, in welchem die erste Auflage erschien, sind nunmehr über 270 000 Exemplare aus der Presse hervorgegangen. Dies erfreuliche Resultat zeugt von der weiten Verbreitung, welche das bis jetzt unübertroffene, auch für alle besseren Übungsbücher gleicher Tendenz mustergültige Schulbuch nicht nur in Deutschland, sondern auch weit über seine Grenzen hinaus gefunden hat. Es ist jedem deutschen Mathematiker wohl bekannt, welchen Einfluß dieses Buch auf die Fortentwickelung des mathematischen Unterrichts auf unseren Schulen ausgeübt hat. Das andauernde Bedürfnis neuer Auflagen ergiebt sich zur Genüge aus folgender Übersicht ihres Erscheinens: Die zehnte erschien 1861, die zwanzigste 1868, die dreißigste 1872, die vierzigste 1875, die fünfzigste 1878, die sechzigste 1882, die siebzigste 1886, die achtzigste 1890. Da das Buch schon seit seinem Entstehen auch immer in vielen Schulen der österreichischen Staaten benutzt wurde, hat die Verlagsbuchhandlung mit Rücksicht auf die dort übliche Orthographie, das Münzwesen und die abweichenden Bezeichnungen für die metrischen Maß- und Gewichtsgrößen seit kurzem eine besondere Ausgabe für die Schulen Österreichs in der 82. und 89. Auflage der ganzen Reihe herstellen lassen. Außerdem ist seit 1881 eine kleinere Ausgabe der Aufgabensammlung für höhere Bürgerschulen, Baugewerkschulen und andere Anstalten mit gleichen Lehrzielen in mehreren Auflagen erschienen. Wenn nun auch seit dem ersten Erscheinen der Sammlung die von dem berühmten Verfasser getroffene Anordnung des didaktischen Inhalts und Übungs-

materiales im wesentlichen eine ähnliche geblieben ist, so sind doch innerhalb ihres Rahmens dem jedesmaligen Zeitbedürfnisse entsprechend, fortgesetzt so bedeutende Umwandlungen geschehen, daß in der neuesten Auflage die erste kaum wieder zu erkennen ist. In dieser ist nun außer der Bewerkstelligung einiger Korrekturen im Texte den Anforderungen der Neuzeit entsprechend, den Veränderungen der Waarenpreislagen, der Arbeitslöhne und des Zinsfußes Rechnung getragen. Berechtigte Wünsche sowie Ratschläge zur zeitgemäßen Fortentwickelung, soweit es sich nicht um durchgreifende Veränderungen des Ausbaues des Lehrgebäudes handelt, werden vom Herausgeber jederzeit mit ergebenstem Danke entgegengenommen und berücksichtigt werden. Wie bisher, wird sein eifrigstes Bestreben darauf gerichtet sein, diesem weit verbreiteten Schulbuche den Bestand zu sichern und seine Aufnahme weiter anzubahnen, welcher es sich bisher zu erfreuen hatte.

Für Einsendungen von Berichtigungen wird unser besonderer Dank ausgesprochen den Herren: Professor Dr. Bauer-Karlsruhe und Dr. Stremlow-Körlin.

Rostock, im Dezember 1892.

Der Herausgeber

Dr. Ludwig Matthiessen,

ord. öff. Professor an der Universität.

Vorbegriffe.

§ 1.

Begriff und Anwendung der Addition.

1) Was heißt zwei oder mehrere Zahlen zu einander addieren? Wie heißt das Ergebnis der Addition? Wie heißen die zu vereinigenden Zahlen? Welches ist das Zeichen der Addition?

2) Die beiden Summanden einer Summe seien p und q. Wie heißt diese Summe?

3) a) Wie heißt die um 7 vergrößerte Zahl a? b) Wie die um n vergrößerte Zahl m? c) Wie die um m vergrößerte Zahl n?

4) Wie groß ist q, wenn $q = m + n$, und $m = 9$, $n = 18$ gesetzt wird?

5) Wenn z eine ganze Zahl bedeutet, wie heißt alsdann die nächst höhere ganze Zahl?

6) Jemand hat a, ein anderer b Mark (*M*) Vermögen. Wieviel besitzen beide zusammen?

7) A hat m, B n Gulden (*Fl*) Schulden. Wieviel Schulden haben beide zusammen?

8) Einer geht 43 Schritte vorwärts und hierauf 27 Schritte rückwärts. Wieviel Schritte hat er im ganzen gemacht?

9) Ein Luftball steigt zuerst 1850 *m* und fällt hierauf 440 *m*. Wieviel Meter hat derselbe im ganzen zurückgelegt?

10) Von zwei Dampfwagen, welche sich begegnen, legt der eine in jeder Minute 784 *m*, der andere 869 *m* zurück. Um wieviel Meter werden beide eine Minute nach ihrem Zusammentreffen voneinander entfernt sein?

11) Wie heißen die Antworten der drei vorhergehenden Aufgaben, wenn für die besonderen Zahlen jedesmal die allgemeinen Zahlzeichen a und b gesetzt werden?

12) Mein Bruder war p Jahre alt, als ich geboren wurde. Jetzt bin ich q Jahre alt. Wie alt ist mein Bruder?

13) Der römische Kaiser Augustus wurde im Jahre 63 vor Christus geboren und starb im Jahre 14 nach Chr. Geb. Wie alt wurde er?

14) In Petersburg tritt der Mittag 1 Stunde 52 Minuten früher ein, als in Paris. Wenn in Paris halb 2 Uhr ist, wieviel Uhr ist in demselben Zeitmomente in Petersburg?

15) Jemand gab 125 ℳ aus und behielt 713 ℳ übrig. Wieviel Geld besaß er vorher?

§ 2.

Begriff und Anwendung der Subtraktion.

1) Was heißt eine Zahl von einer anderen abziehen oder subtrahieren? Was heißt eine Zahl um eine andere vermindern? Welche Zahl heißt Minuend, welche Subtrahend? welche Rest, Unterschied oder Differenz? Welches ist das Zeichen der Subtraktion?

2) α) Wie heißt die um b verminderte Zahl a? β) Wie heißt die um 13 verminderte Zahl c? γ) Subtrahiere s von m. δ) Vermindere s um m. ε) Wie heißt die Differenz, deren Subtrahend p und deren Minuend q ist?

3) Wenn a eine ganze Zahl bedeutet, wie heißt alsdann α) die nächstniedrigere, β) die zweitvorhergehende ganze Zahl?

4) Wenn die Summe zweier Zahlen 23, und die eine 17 ist, wie groß ist alsdann die andere Zahl?

5) Die Summe zweier Zahlen ist q, der eine Summand p. Wie groß ist der andere Summand? Wie findet man überhaupt aus der Summe und dem einen Summanden den anderen Summanden?

6) Was hat man an die Stelle von x zu setzen, α) wenn $x + 5 = 12$, β) wenn $x + 37 = 63$ werden soll?

7) α) Wem ist der Minuend einer Differenz, β) wem der Subtrahend gleich? γ) Von einer Zahl, die ich im Sinne habe, ziehe ich 39 ab und erhalte 48. Wie heißt die Zahl? Wie groß ist die Zahl x, wenn δ) $x - 9 = 13$, ε) $x - 513 = 478$ ist?

8) α) Von 24 ₰ [m Kr]*) gebe ich ein Bestimmtes aus und behalte 17 ₰ [n Kr] übrig. Wieviel habe ich ausgegeben? Wie groß ist die Zahl x, wenn β) $21 - x = 13$, γ) $495 - x = 378$ ist?

9) Jemand hat 300 Fl bares Geld und 74 Fl Schulden. Wieviel besitzt er im Vermögen?

10) Ein anderer hat 1298 ℳ bares Geld und 1417 ℳ Schulden. Wieviel Schulden bleiben ihm, wenn er soviel, als ihm möglich ist, abzahlt?

---

*) Die eingeklammerten Angaben beziehen sich auf ein zweites Beispiel: Von m Kreuzern gebe ich ein Bestimmtes aus und behalte n Kreuzer übrig u. s. w.

11) Jemand hat ein jährliches Einkommen von m ℳ. Seine Ausgaben betragen n ℳ. α) Wieviel behält er jährlich übrig, wenn $m > n$? β) wieviel Schulden macht er jährlich, wenn $m < n$ ist?

12) Jemand geht zuerst 217 Schritte vorwärts und hierauf 59 Schritte rückwärts. Wieviel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausging?

13) Jemand geht zuerst 369 Schritte vorwärts und hierauf 712 Schritte rückwärts. Wieviel Schritte befindet er sich von dem Orte, von dem er ausging?

14) Ein auf einem Berge aufsteigender Luftball erhebt sich 2884 m und langt, nachdem er 3693 m gefallen, am Fuße des Berges an. Wie hoch ist der Berg?

15) Ein Körper bewegt sich a m vorwärts und dann b m rückwärts. Wieviel Meter befindet er sich von dem Orte, von dem er ausging, jenachdem $a > b$, $a = b$, oder $a < b$ ($a \gtrless b$) ist?

16) Drei Örter, A, B, C, liegen auf einer Landstraße in gerader Linie hintereinander. A ist von B 16 und von C 37 km entfernt. Wie weit ist B von C entfernt?

17) Wann hörte der im Jahre 432 vor Christus anfangende achtundzwanzigjährige peloponnesische Krieg auf?

18) Wann fing der 1648 nach Christus beendigte Dreißigjährige Krieg an?

19) Newton wurde am 25. Dezember 1642 zu Woolstorp geboren und starb am 20. März 1727 zu London. Wie alt wurde er?

20) Ein Faß Ware wiegt mit dem Fasse (brutto) 1476 kg, das Faß allein (Tara) wiegt 27 kg. Welches ist das reine (Netto-) Gewicht der Ware?

21) Eine Kiste verpackter Ware wiegt brutto 412 kg [b kg], netto 391 kg [n kg]. Wieviel beträgt die Tara?

22) α) Wenn die Tageslänge 8 oder allgemein s Stunden beträgt, wieviel beträgt die Nachtlänge? Wenn die Sonne β) um 7, oder γ) um halb 5 Uhr, oder δ) um 12 Uhr mittags, oder ε) um 12 Uhr mitternachts aufgeht, um wieviel Uhr wird sie selbigen Tages untergehen?

23) Zwei Dampfschiffe fahren hintereinander. Das eine legt jede Minute 500 m [p m], das andere 400 m [q m] zurück. Um wieviel entfernen sich dieselben jede Minute voneinander?

24) Ich gehe 120 Schritte vorwärts, dann 47 Schritte rückwärts, hierauf 19 Schritte vorwärts und zuletzt 92 Schritte rückwärts. Wieviel Schritte habe ich im ganzen zurückgelegt, und wieviel Schritte bin ich von dem Orte entfernt, von dem ich ausging?

25) Ein Schiff fährt aus dem Hafen einer Insel a Meilen nach Westen und hierauf b Meilen zurück nach Osten. Wieviel Meilen

ist dasselbe von dem Hafen entfernt, von dem es auslief, und wieviel Meilen hat es im ganzen gemacht?

26) Ein Dampfschiff legt ohne Einwirkung des Stromes und Windes jede Minute 491 *m* zurück; durch Einwirkung des Wassers allein wird dasselbe jede Minute 71 *m* abwärts getrieben und durch Einwirkung des Windes allein jede Minute 100 *m* weit gebracht. Wieviel Meter legt das Dampfschiff jede Minute zurück, wenn dasselbe α) stromabwärts mit dem Winde, β) stromabwärts gegen den Wind, γ) stromaufwärts mit dem Winde, δ) stromaufwärts gegen den Wind fährt?

27) Wie heißen die Antworten der vorhergehenden Aufgabe, wenn für die besonderen Zahlen 491, 71 und 100 die allgemeinen Zahlzeichen d, s und w gesetzt werden?

28) Wie groß sind x, y, z, wenn 1) $x + m = p$, 2) $y - n = q$, 3) $a - z = c$ ist?

§ 3.

Begriff und Anwendung der Multiplikation.

1) Was heißt eine Zahl mit einer anderen Zahl multiplizieren? Welche Zahl heißt Multiplikand, welche Multiplikator, welche Produkt? Welches ist das Zeichen der Multiplikation? Wann darf das Zeichen der Multiplikation ausgelassen werden?

2) Der Multiplikator eines Produktes ist p, der Multiplikand q. Wie heißt das Produkt? Wie heißt das Produkt, wenn der Multiplikator a, der Multiplikand 7 ist?

3) Wie groß ist q, wenn $q = x \cdot y$, und $x = 9$, $y = 7$ gesetzt wird?

4) Können 5 *M* mit 7 *M*, oder 12 *M* Schulden mit 17 *M* Schulden, oder 3 *Fl* mit 4 *Uhr* multipliziert werden? Wieviel sind 5mal 7 *M*?

5) Was kommt heraus, α) wenn 9 siebenmal, β) 73 siebenundsechzigmal, γ) wenn x n-mal zu sich selbst addiert wird?

6) In einem rechtwinkligen Weingarten befinden sich an der einen Seite 217 [p], an der anderen 197 [n] Weinstöcke. Wieviel Weinstöcke macht es im ganzen?

7) Ein rechtwinkliges Feld hat 81 *m* Länge und 57 *m* Breite. Wieviel Quadratmeter (*qm*) enthält das Feld?

8) Ein rechtwinkliger Haufen Ziegelsteine hat in der Länge 98, in der Breite 57 und in der Höhe 29 Steine. Wieviel Steine enthält derselbe im ganzen?

9) Jemand legt jährlich 250 *M* [*m Fl*] zurück. Wieviel wird er nach 12, wieviel nach n Jahren gespart haben?

10) Einer macht jährlich a ℳ Schulden. Wieviel Schulden wird er in α) 8, wieviel β) in x Jahren gemacht haben?

11) Das Kilogramm einer Ware kostet 17 ₰ [n Nkr]. Wieviel kosten α) 19, β) x kg?

12) Für m ℳ erhält man ein Meter. Wieviel kosten n Meter?

13) Wenn ein Hase bei jedem Sprunge 2 m zurücklegt, wieviel wird er nach 27 Sprüngen zurückgelegt haben?

14) Der Schall legt in jeder Sekunde 341 m zurück. Wieviel in t Sekunden?

15) Ein sich gleichförmig bewegender Körper möge in jeder Zeiteinheit (z. B. Sekunde) c Raumeinheiten (z. B. Meter) zurücklegen. Welchen Raum wird er in t Zeiteinheiten zurücklegen?

16) Fünf [a] Arbeiter werden mit der Aufführung einer Mauer in 20 [b] Tagen fertig. Wieviel Tage würde ein Arbeiter gebrauchen?

17) Wenn 6 Pferde [n Pferde] mit einem Futtervorrate 24 Tage [t Tage] auskommen, wie lange wird ein Pferd mit demselben Vorrate auskommen?

18) α) 139 ℳ wieviel Pfennige? β) m ℳ wieviel Pfennige? γ) p Fl wieviel Kreuzer? δ) n Tonnen (t) wieviel Kilogramm? ε) 9 kg wieviel Milligramm (mg)?

§ 4.

Begriff und Anwendung der Division.

1) Was heißt eine Zahl durch eine andere Zahl dividieren? was eine Zahl in eine andere dividieren? Was versteht man unter Dividend, Divisor, Quotient? Welches ist das Zeichen der Division?

2) Es soll dividiert werden: α) q durch p, β) a durch 17, γ) 25 durch x, δ) 999 durch 37.

3) Dividiere: α) m in n, β) 45 in q, γ) q in 45, δ) q durch 45.

4) Wenn $p : q = r$ ist, wie groß ist r für α) $p = 84$, $q = 7$; β) $p = 4$, $q = 4$?

5) α) Welche Zahl giebt, mit 7 multipliziert, 56? β) welche, mit 17 multipliziert, 1003? γ) Wieviel Mal muß 13 als gleicher Summand genommen werden, damit als Summe 91 herauskommt? δ) wieviel Mal 123, damit 1107 herauskommt? ε) Wieviel Mal können 12 ℳ von 96 ℳ abgezogen werden? ζ) Welche Zahl giebt, mit x multipliziert, y?

6) Der Multiplikator eines Produktes sei 7, das Produkt 91. Wie heißt der Multiplikand? Wie, wenn der Multiplikator p, das Produkt q ist? Wie findet man überhaupt, wenn das Produkt

und der Multiplikator bekannt sind, den Multiplikanden, oder, wenn das Produkt und der Multiplikand bekannt sind, den Multiplikator? Welche Zahl hat man an die Stelle von x und y zu setzen, wenn α) $9 \cdot x = 63$, β) $43 \cdot x = 2451$, γ) $y \cdot 8 = 72$, δ) $y \cdot 53 = 1537$ werden soll?

7) Wie oft sind 18 *m* in 126 *m* enthalten? Welches ist der achtzehnte Teil von 126 *m*?

8) Eine gewisse Anzahl Kilogramm einer Ware kostet 324 ℳ. Wieviel kostet der achtzehnte Teil der Anzahl Kilogramme?

9) Wenn man für 57 ℳ [p ℳ] 1311 *kg* [q *kg*] erhält, wieviel Kilogramm erhält man für eine Mark?

10) Das Licht durchläuft den Weg von der Sonne zur Erde, welcher nach den neuesten Untersuchungen im Mittel 19963000 geographische Meilen beträgt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit in 8 Minuten und 18 Sekunden. Wieviel Meilen legt dasselbe in jeder Sekunde zurück?

11) Ein sich gleichförmig bewegender Körper legt in t Sekunden s Meter zurück. Wieviel in einer Sekunde?

12) Wenn eine Kanonenkugel in einer Sekunde 570 *m*, ein mit aller Kraft aus der Hand geworfener Stein in derselben Zeit 19 *m* zurücklegt, wieviel Mal ist die Geschwindigkeit der Kanonenkugel größer, als die des Steines?

13) Wem ist der Dividend eines Quotienten gleich? Wem der Divisor? Welche Zahl hat man an die Stelle von x zu setzen, wenn α) $x : 7 = 9$, β) $x : 23 = 17$ werden soll? Wie groß ist y, wenn γ) $35 : y = 7$, δ) $703 : y = 19$ ist?

14) m Pfennige wieviel Mark?

15) Wenn mit einem gewissen Vorrate an Proviant ein Mann 91 Tage [c Tage] auskommt, wie lange werden mit demselben 13 Mann [n Mann] auskommen?

16) Wenn an einer Arbeit ein Mann 54 Tage gebraucht, wieviel Mann sind erforderlich, diese Arbeit in 9 Tagen zu vollenden?

17) Ein Arbeiter vollendet eine Arbeit in m Tagen. In welcher Zeit werden n Arbeiter mit derselben fertig?

18) Ein rechtwinkliger Garten hat 4371 [m] *qm* Inhalt und 93 [p] *m* in der Länge. Wieviel Meter hat derselbe in der Breite?

19) Wenn ein Kapital in einem Jahre den zwanzigsten Teil an Zinsen bringt, wieviel Zinsen geben 8780 Fl [n Fl]?

20) In einer Taschenuhr befinden sich zwei Räder, welche mit ihren Zähnen ineinander greifen. Das große hat 54 [n], das kleine 6 Zähne [r Zähne]. Wieviel Mal dreht sich das kleine Rad um, wenn sich das große einmal umdreht?

21) Das Hinterrad eines Wagens habe 5 *m* [t *m*] im Umfange,

das Vorderrad 3 *m* [*u m*]. Wieviel Mal dreht sich das eine dieser Räder geschwinder um, als das andere?

22) Wieviel Mal bewegt sich der Minutenzeiger einer Uhr geschwinder, als der Stundenzeiger?

23) Wie groß sind x, y, z, wenn 1) $x \cdot m = p$, 2) $y : n = q$, 3) $a : z = c$ werden soll?

§ 5.

Begriff und Anwendung der Potenzierung.

1) Was heißt eine Zahl mit einer anderen potenzieren? Was ist Potenz, Basis, Grundzahl oder Dignand und Exponent? Wie wird eine Potenz bezeichnet?

2) Wie groß sind: a) 3^2, b) 4^3, c) 2^{10}, d) 10^2, e) 2^4, f) 4^2?

3) Die Basis einer Potenz sei 4, der Exponent 5. Wie heißt die Potenz? Wie, wenn die Basis y und der Exponent x heißt?

4) Es soll hingeschrieben werden: α) n zur m-ten Potenz: β) die x-te Potenz von 3; γ) p hoch q; δ) die $x+y$-te Potenz von a.

5) Wenn $x^y = z$ und $x = 5$, $y = 7$ ist, wie groß ist z?

6) Wie wird das aus 7 gleichen Faktoren 3 gebildete Produkt bezeichnet, und welcher Zahl ist dasselbe gleich?

7) Wie wird α) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ und wie β) das aus x gleichen Faktoren m gebildete Produkt bezeichnet?

8) a) Wieviel Quadratmeter hält ein Quadrat von n *m* Länge; b) wieviel Kubikmeter (*cbm*) ein Würfel von n *m* Höhe?

9) Wie lange haben die sieben Könige Roms regiert, wenn die Anzahl der Jahre der fünften Potenz von 3 gleich ist?

10) Von der Erbauung der Stadt Rom bis zum Ende des ersten punischen Krieges werden 8^3 Jahre gezählt. Wieviel Jahre sind es?

(In folgenden Beispielen sollen die Resultate sowohl ausgerechnet, als auch in Form einer Potenz angegeben werden.)

11) Wenn einer täglich 7 *Frc* ausgiebt, wieviel macht es in sieben Wochen?

12) Wenn einer monatlich 12 *kg* gebraucht, für das Kilogramm 12 *Fl* bezahlt, wieviel wird er in 12 Jahren bezahlen müssen?

13) Wieviel Pfennige kosten 10 Dutzend Tassen, wenn jede Tasse 10 Silbergroschen (à 10 ₰) kostet?

14) Wieviel Schachteln befinden sich in 12 Kisten, wenn jede Kiste 12 Pakete enthält, in jedem Pakete sich 12 Dutzend große Schachteln befinden und jede Schachtel elf kleinere in sich eingeschlossen enthält?

15) Wieviel Stücke erhält man, wenn man einen Apfel in 4 Teile, jeden Teil nochmals in 4 Teile u. s. w. fünfmal hintereinander teilt?

16) Wieviel Stücke erhält man, wenn man eine Linie in m Teile, jeden Teil nochmals in m Teile u. s. w. $x$mal hintereinander teilt?

17) Wieviel Eltern, Großeltern, Urgroßeltern u. s. w. bis zum zehnten Grade hinauf könntest du haben?

18) Wenn ein Hektoliter (hl) Roggen im Durchschnitte jährlich 9 hl [a hl] giebt, und wenn jedes Jahr das im vorhergehenden Jahre Gewonnene ausgesäet wird, wieviel erhält man aus einem Hektoliter nach 7 Jahren? wieviel nach n Jahren?

19) Ich kaufe 3 kg Ware und gewinne beim Verkaufe doppelt soviel, als mir die Ware gekostet hat. Für alles eingelöste Geld kaufe ich mir zum zweiten-, dritten- u. s. w. sechstenmale von derselben Ware. Wieviel Kilogramm werde ich zuletzt kaufen können?

20) Jemand mischt einen Tropfen einer Flüssigkeit mit 24 Tropfen Wasser, nimmt von dieser Mischung einen Tropfen, setzt ihn wieder zu 24 Tropfen Wasser u. s. w. sechsmal hintereinander. Wie stark wird die Verdünnung des ersten Tropfens sein?

§ 6.

Gebrauch der Klammern (Parenthesen)*).

1) Zu berechnen: α) $39 + 28 - 9$, β) $39 + (28 - 9)$, γ) $39 - 28 - 9$, δ) $39 - (28 - 9)$; hinzuschreiben und auszurechnen: ε) 76 vermindert um die Summe der Zahlen 27 und 13; ferner ζ) 25 vermehrt um die um 6 verminderte Zahl 23; η) 147 vermindert um die Summe der Zahlen 27 und 39; endlich ϑ) 86 vermindert um die um 97 verkleinerte Zahl 118.

2) Wie unterscheidet sich $a - b + c$ von $a - (b + c)$? Wie $a - (b - c)$ von $a - b - c$? Was wird aus jeder der Formeln, α) wenn $a = 8$, $b = 3$, $c = 1$, β) wenn $a = 36$, $b = 17$, $c = 2$ gesetzt wird?

3) Folgende Ausdrücke sollen berechnet werden:

1) $12 - 7 - (2 + 1)$; 2) $12 - 7 - 2 + 1$;
3) $12 - (7 - 2 + 1)$; 4) $12 - (7 - 2) + 1$;
5) $12 - [7 - (2 + 1)]$; 6) $63 - [24 - (15 - 8)]$;
7) $63 - [24 - .15 - 8]$; 8) $63 - 24 - (15 - 8)$;
9) $63 - 24 - 15 - 8$; 10) $79 - 38 - 17 - 14 - 2 + 9$;
11) $79 - [38 - 17 - 14 - 2 + 9]$; 12) $79 - (38 - 17 - 14) - 2 + 9$;

*) Die Klammern kommen zuerst bei Albert Girard (1629) vor.

13) $79 - [38 - 17 - 14] - [2 + 9]$;
14) $79 - [38 - (17 - 14 - 2) + 9]$;
15) $79 - [38 - (17 - 14) - (2 + 9)]$;
16) $79 - [38 - 17 - (14 - 2) + 9]$;
17) $79 - [38 - (17 - [14 - 2] + 9)]$;
18) $79 - [38 - (17 - [14 - 2]) + 9]$;
19) $79 - [38 - (17 - 14 - 2 + 9)]$.

4) Folgende Beispiele sollen berechnet werden:
1) $17 - 8 - 5 - 1 + 3$; 2) $17 - (8 - 5) - (1 + 3)$;
3) $17 - [8 - (5 - 1) + 3]$; 4) $17 - [8 - (5 - 1 + 3)]$;
5) $17 - 8 - (5 - 1 + 3)$; 6) $17 - [8 - (5 - [1 + 3])]$.

5) Hinzuschreiben: α) m vermindert um die Summe $p + q$; β) die Differenz $x - y$ vermindert um die Differenz $b - c$.

6) Man vermehre die Zahl a um b, ziehe, was herauskommt, von c ab, addiere die Differenz zu m und ziehe die ganze Summe von d ab. Es soll die Formel berechnet werden: α) für $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$, $m = 2$, $d = 13$; ebenso β) für $a = 6$, $b = 7$, $c = 18$, $m = 1$, $d = 9$.

7) Auf welche Art müssen Klammern angebracht werden, wenn aus $m - n + p - q$ für $m = 8$, $n = 3$, $p = 1$, $q = 2$ die Werte α) 2, β) 4 und γ) 6 entstehen sollen?

8) Was wird aus $7 - 3$, wenn an die Stelle von 3 der gleichbedeutende Wert $8 - 5$ gesetzt wird? Was wird aus $8 + 15$, wenn für 15 der gleichbedeutende Wert $9 + 6$ gesetzt wird? Was wird aus $a - (b - c)$, wenn $m + n$ an die Stelle von a, $p - [q - r]$ an die Stelle von b, und $x + y$ an die Stelle von c gesetzt wird?

9) Folgende Ausdrücke zu berechnen:
1) $a(b - c + d)$; 2) $ab - c + d$; 3) $a[b - (c + d)]$;
4) $(a - b) \cdot (c - d)$; 5) $(a - b) \cdot c - d$; 6) $a - b(c - d)$;
7) $a - bc - d$; 8) $(a + b - c)d$; 9) $a + b - c \cdot d$;
10) $a + (b - c) \cdot d$ α) für $a = 50$, $b = 9$, $c = 5$, $d = 2$, β) für $a = 200$, $b = 21$, $c = 7$, $d = 6$; ferner:
11) $[(x + 2)x + 5]x$, 12) $[([(x + 4)x - 3]x + 7)x + 8]x$,
13) $(50 - [35 - (10 - x)x]x)x$ für α) $x = 1$, β) $x = 2$, γ) $x = 3$, δ) $x = 4$.

10) α) Die Summe $a + b$ soll mit c multipliziert werden und β) die Zahl d mit der um die Summe $p + q$ verminderten Zahl r.

11) Man vermindere a um b, ziehe, was herauskommt, von d ab und multipliziere das Resultat mit der um m verminderten Zahl n.

12) Was wird aus dem Ausdrucke $b + b \cdot c - c$, wenn in demselben $m + n$ an die Stelle von b und $p - q$ an die Stelle von c gesetzt wird?

13) Hinzuschreiben: 1) Summe $x + y$ mal Differenz $z - u$; 2) x vermehrt um das Produkt aus y mal Differenz $z - u$; 3) x nebst dem Produkte aus y mal z, vermindert um u; 4) Summe $x + y$ mal z vermindert um u.

14) α) $ab \cdot c$, β) $a \cdot (bc)$, γ) $a \cdot (bc) \cdot d$, δ) $ab \cdot (cd)$, ε) $a[b \cdot (cd)]$, ζ) $abcd$, η) $a^2 \cdot (a^3 b) b^4$ für $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 7$ zu berechnen.

15) α) Folgende Ausdrücke zu berechnen: 1) $(a - b + c) : d$, 2) $a - b + (c : d)$, 3) $a - [(b + c) : d]$, 4) $(a - b) : (c + d)$, 5) $a - [b : c] + d$, 6) $(a - b) : c + d$ für $a = 36$, $b = 12$, $c = 4$, $d = 2$. β) In den obigen Quotienten soll an die Stelle des Doppelpunktes der Querstrich gesetzt werden.

16) In den Ausdrücken: α) $m - \frac{n+p}{q}$, β) $t - \frac{u}{v+x}$, γ) $\frac{r+s}{t-x}$ soll an die Stelle des Querstrichs der Doppelpunkt gesetzt werden.

17) Man dividiere die Differenz der Zahlen x und y durch z, ziehe den Quotienten von t ab und multipliziere das Resultat mit u.

18) Folgende Ausdrücke sollen berechnet werden: α) $ab : c$, β) $ab : (cd)$, γ) $a \cdot b : c \cdot d$, δ) $a \cdot \frac{b}{cd}$, ε) $a \cdot \frac{b}{c} \cdot d$, ζ) $a : b : (c : d)$ für $a = 108$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 2$.

19) α) $\frac{abc}{d : e} : \frac{m}{d}$, β) $\frac{ab}{c} : \frac{de}{m}$ für $a = 30$, $b = 10$, $c = 5$, $d = 8$, $e = 4$, $m = 16$ zu berechnen.

20) Es soll x mit 3 multipliziert, das Produkt in m dividiert, der Quotient endlich mit n multipliziert werden.

21) Zur Auffindung der Zeit der Ostern im Verlaufe unseres Jahrhunderts hat der berühmte Mathematiker Gauß*) folgende Formeln gegeben: Bezeichnet n das laufende Jahr unseres Jahrhunderts (z. B. 85 für das Jahr 1885), bedeuten ferner a, b, c, d und e bezüglich die kleinsten Reste der Divisionen $(n + 14) : 19$, $n : 4$, $(n + 1) : 7$, $(19a + 23) : 30$ und $2(b + 2c + 3d + 2) : 7$, so wird Ostersonntag auf den $(22 + d + e)$ten März, oder den $(d + e - 9)$ten April fallen. Nach vorstehenden Formeln soll Ostern für die nächstfolgenden 5 Jahre berechnet werden.

---

*) Gauß Mon. Corr. 1800 Aug. Delambre hat in der Conn. des temps 1817 p. 307 den Beweis mitgeteilt.

Erster Abschnitt.

Anwendung der Sätze über Summen und Differenzen.

---

§ 7.

I. $a + b = b + a$.

II. $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$ rc.

1) Wie wird eine Zahl zu einer Summe und wie eine Summe zu einer Zahl addiert?

2) Man vermehre $x + y$ um p; ebenso x um $y + z$.

3) Man addiere $a + b$ zu c und vermehre die Summe um d.

4) Zu 6 ℳ 7 ₰ kommen 16 ₰ hinzu. Wieviel macht es zusammen? Welche der obigen Formeln kommt bei Berechnung dieses und des folgenden Beispiels in Anwendung?

5) Zu 23 g kommen 6 kg 17 g. Wieviel macht es zusammen?

6) Wie werden die Summen a) $99997 + 83752 + 3$, b) $17 + (2765 + 99983)$ auf die kürzeste Art berechnet?

7) $3995 + 29997 + 5 + 3$ auf die kürzeste Art zu berechnen.

8) Ebenso: $9999 + 9998 + 9996 + 9995 + 4 + 2 + 1 + 5$.

9) Auf einem in eine Spitze zulaufenden Dache befinden sich 100 Reihen Schiefer: in der ersten Reihe 1, in der zweiten 2, in der dritten 3 u. s. w., in der letzten Reihe 100 Schiefer. Wieviel Schiefer macht es im ganzen?

Anleitung. Man addiere zuerst die Schiefer der ersten und letzten Reihe, dann die der zweiten und vorletzten, die der dritten und drittletzten Reihe u. s. w.

10) Vermehre m um m, und die erhaltene Summe wieder um m.

11) Was kann man für $n + n + n + n + n + n + n$ setzen?

12) Was versteht man unter Koeffizient?

13) Auszuführen: $12a + 9a + 4a + 3a + a$.

14) Man vermehre $9b$ um $7b$, und das, was herauskommt, um $17b$.

Auszuführen:

15) α) $3a + 5b + 7a$; β) $6a + 9b + 11b$.

16) α) $19m + (6m + 3n)$; β) $20b + (7a + 14b)$.

17) $119m + 27n + 15n + 48m + 126n + m$.
18) $14n + (24p + 8n) + (13p + 15n)$.
19) $5x + [8y + (3y + 4x)] + 2x$.
20) $3a + 6b + 7c + (9a + 2c + 4b) + (7c + 12a + 14b)$.
21) $9m + 6n + 7p + (13m + 11n + 8p) + (5n + 6p + 7m) + (8n + 13m + 9p) + (17p + 16n + 13m)$.
22) $17x + 75y + 39z + 228u + (19x + 18y + 38z) + (23x + 25y + 49u) + (41x + 28z + 95u) + (82y + 195z + 28u)$.
23) $135m + 578n + 212p + 513q + 817r + (1014p + 1113m + 718r) + (327q + 219n) + (87m + 487q + 781n + 282r) + (422n + 486p + 673q) + (288p + 665m + 183r)$.

§ 8.

I. $a - b + b = a$. II. $a + b - b = a$.

III. $a - (a - b) = b$. IV. $a - a = 0$.

1) α) $3a + 9b - 9b$; β) $7a - 11b + 11b$.
2) α) $18p + 15q - 18p$; β) $7a + 5b + 3b - 8b$.
3) α) $9a + 2b + 2a - 11a$; β) $3c + 4a + (7b + 6b) - 13b - 4a$.
4) $7m + 17n - (8b + 4b) + 12b - 17n$.
5) α) $x + (y - z) - (y - z)$; β) $23p - (14q - 3n) + (14q - 3n)$
6) $48m + (9n - 7q) - (9n - 7q) + 12m$.
7) $a - b - (b + c - d) + (b + c - d) + b + b - a$.
8) $11a + 11b + 11c - 11d + 11d - 11c + 11b$.
9) α) $m - m$; β) $7m - (2m + 5m)$; γ) $a - 36 - (a - 36)$.
10) α) $a - b + c - (a - b)$;
β) $m - n + o + (p - q) - (m - n + o) + q$.

11) Ein Spieler besaß 23 ℳ 15 ₰, verlor zuerst 17 ℳ 19 ₰ und gewann hierauf 17 ℳ 19 ₰. Wieviel behielt er?

12) Jemand, der 9712 Frc Schulden hat, macht nach einiger Zeit 2813 Frc Schulden hinzu, nimmt aber späterhin 9712 Frc ein. Wieviel Schulden behält er?

13) Ein Schiff befindet sich $29\frac{3}{4}$ Meilen [a Meilen] südlich von einem Orte. Durch einen starken Nordwind wird dasselbe zuerst $17\frac{3}{8}$ Meilen [b Meilen] und hierauf durch einen plötzlich eintretenden Südwind $29\frac{3}{4}$ Meilen [a Meilen] weit getrieben. Wie weit befindet sich das Schiff von dem Orte, von dem es ausging?

14) Eine telegraphische Nachricht geht von Berlin um 2 Uhr 13 Minuten 45 Sekunden nach Köln und gelangt daselbst in Zeit von 25 Minuten 41 Sekunden vollständig an. Die Kölner Uhr geht aber in Bezug auf die Berliner Uhr 25 Minuten 41 Sekunden nach. Um wieviel Uhr Kölner Zeit kommt die Nachricht an?

15) Jemand besitzt 70 *Fl* 13 *Nkr*, gewinnt im Spiele anfangs 9 *Frc* 25 *Cent*, hierauf 15 Pfund Sterling (£) 7 Shilling (*s*), verliert alsdann 9 *Frc* 25 *Cent* und zuletzt noch 70 *Fl* 13 *Nkr*. Wieviel Geld bleibt ihm übrig?

16) Ein Luftball steigt zuerst a *m* in die Höhe und hierauf b *m*, fällt alsdann a *m*, steigt wieder c *m*, und fällt zuletzt b *m*. Wie hoch steht derselbe über dem Orte, von dem er aufstieg?

17) In der linken Hand habe ich $a - b + c - d$, in der rechten $a + b - c + d$ Mark. Ich bringe aus der rechten in die linke d, hierauf aus der linken in die rechte c und zuletzt aus der rechten in die linke b Mark. Wieviel habe ich nun in jeder der beiden Hände?

18) Welche Größe muß zu $8p - 3q$ addiert werden, damit $8p$ herauskommt?

19) Welche Größe muß zu $3m - (5n - 2b)$ addiert werden, damit $3m$ herauskommt?

20) α) $p - (p - q)$; β) $15a - (15a - 23b)$; γ) $27m + 19m - (46m - 12n)$; δ) $x - y - (x - y - z)$.

21) Ich habe 7 *M* [*m Fl*] und gebe 7 *M* weniger 13 *ℓ* [*m Fl* weniger *n Nkr*] aus. Wieviel behalte ich übrig?

22) $34m - (34m - 13n) + (34p - 13n)$ auszuführen.

23) Warum ist $a + b = (a - m) + (b + m)$, und wie läßt sich der Sinn dieser Formel in Worten aussprechen?

§ 9.

$$\text{I.}\quad a + b - c = a - c + b.$$
$$\text{II.}\quad a - b - c = a - c - b.$$

1) Wie wird eine Zahl von einer Summe subtrahiert?

2) Wie wird eine Zahl zu einer Differenz addiert?

3) Wie wird eine Zahl von einer Differenz subtrahiert?

Auszuführen:

4) α) $120 + 2b + 3d - 2b$; β) $5n + 8p + 129 - 5n - 8p$.

5) α) $127 + 43x - 49$; β) $120 + 14y + 13z - 64 - 13z$.

6) α) $84\,589 + 8783 - 4589$; β) $28\,654 + 9999 - 18\,654$ mit Anwendung der Formel I. zu berechnen.

7) In einem Weinfasse befinden sich 2 *hl* 93 *l*; hierzu kommen 5 *hl* 67 *l*, und werden alsdann 93 *l* herausgezapft. Wieviel bleibt zurück? (Formel I.)

8) α) $3a - 7b + 2a$; β) $17m - 9n + 16m$; γ) $34p - 28q + 12p + 7p$; δ) $x - y + x + y$.
9) α) $4m + 8n - 16p + 7n$; β) $6m + 5n - 17q + 8n + 8m$.
10) α) $7q - 8r - 5t + 12q$; β) $25x - 8y - 8z + 14x + 8y$.
11) α) $24m - 13p - 12q + 13p$;
β) $24m + 13n - 4q - 7r + 8n + 4m$.
12) α) $3872 - 983 + 111$; β) $60000 - 8873 + 9873$. (I.)
13) $5a + 7b - 8c - 7b$. Aufl.: $5a + 7b - 7b - 8c = 5a - 8c$.
14) $13a + 14b - 15c - 14b$.
15) $28b + 36a + 36c - 28b - 36c$.
16) α) $212 - 35x - 148$; β) $436 + 48y - 20z - 223 - 48y$.
17) $35p + 28q - 13r - 20s - 35p$.
18) α) $87768 - 8989 - 7768$, β) $583291 - 99998 - 483291$ nach Formel II. zu berechnen.

§ 10.

$$a - (b + c) = a - b - c = a - c - b.$$

1) Wie wird von einer Zahl eine Summe subtrahiert? Wie wird eine Zahl von einer Differenz subtrahiert?
2) α) $14m + 13n - (13n + 6p)$; β) $56 + 17p - (19 + q)$.
3) $29a + 17b + 12a + 13b - [4c + 29a + 17b]$.
4) $24a - 6a$.
5) α) $23p - 9p$; β) $45q - 17q$.
6) Wie werden zwei gleichnamige Größen mit ungleichen Koeffizienten voneinander subtrahiert?
7) $17a - 2a - 7a + 22b - 3b - 19b$.
8) $17m + 23n - (15n + 4m)$.
9) $48p + 20q + 13r - (7r + 8p)$.
10) α) $34a - 29 - 59$; β) $44p - 9x - 18x$.
11) $37p - 25q - (14q + 12p)$.
12) $43m - 18n - 20p - (23m + 14p)$.
13) Von 17 ℳ weniger 37 ₰, welche ich besitze, gebe ich 63 ₰ aus. Wieviel behalte ich übrig?
14) Von 1000 kg Ware verkaufe ich zuerst 347 kg 160 g, hierauf 409 kg 120 g und zuletzt 143 kg 720 g. Wieviel behalte ich übrig?
15) Nach obiger Formel zu berechnen:
α) $37000 - 913 - 514 - 5573$;
β) $58769 - 9999 - 9997 - 3 - 9991 - 1 - 9998 - 9 - 9993 - 2 - 7$.
16) Warum ist $a - b = a + c - (b + c)$, und wie heißt dieser Satz in Worten?

§ 11.

I. $a + (b - c) = a + b - c = a - c + b.$

II. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$

1) α) Wie wird eine Differenz zu einer Zahl addiert? β) Wie werden zwei Differenzen zu einander addiert?

2) Es soll 657 um die Differenz der beiden Zahlen 3000 und 357 vermehrt werden.

3) Zu 98372 soll die um 7372 verminderte Zahl 11000 addiert werden.

4) α) $7a + (5a - 3b)$; β) $12m + (7m - 9n)$.

5) $22p + 17q + (23q - 18p)$; $47p - 28q - 17r + (28q - 5r)$.

6) $27q - 14r + (20q - 7r)$.

7) $39x - 12y + [13x - (51x + 12y)]$.

8) Ein Bote geht um 2 Uhr 17 Minuten von einem Orte A nach einem Orte B, und gebraucht an Zeit zwei Stunden weniger 13 Minuten. Um wieviel Uhr langt er in B an?

9) α) $1837 + 9994$, β) $58776 + 99987$ zu berechnen. (Formel I.)

10) 937 kg 200 g soll um 398 kg 800 g vermehrt werden.

11) α) $(x + y) + (x - y)$; β) $(8m + 9n) + (8m - 9n)$.

12) α) $7a - 3b + (9a - 8b)$; β) $6x - 7y + (3x - 9y)$. (Formel II.)

13) $(a - b) + (a - b) + (a - b) + (a - b) + (a - b)$.

§ 12.

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b = c + a - b.$$

1) Wie wird eine Differenz von einer Zahl subtrahiert?

2) Wie wird eine Zahl zu einer Differenz addiert? Wie wird von einer Summe eine Zahl subtrahiert, welche größer als einer der Summanden ist?

3) α) $p - (q - r)$; β) $6a - (3b - 5c)$; γ) $800 - (100 - 1)$.

4) α) $4a - (7b - 5a)$; β) $24m - (3n - 14m)$.

5) $14m + 9n - (9m - 7n)$; $27p + 28q - 13r - (17p - 15q)$.

6) Was wird aus $p - q$ für $p = 24a + 13b$ und $q = 12a - 19b$?

7) α) $x + y - (x - y)$; β) $8m + 9n - (8m - 9n)$.

8) $36m + 12n - (6n - 4m) - (28m - 18n)$.

9) α) $22p - 13q - (22p - 17q)$; β) $r - [q - (t - u)]$.

10) $24t + 28u - 13v + 18x - (28u - 13v - 18x)$.

11) Wenn ich 3 ℳ weniger 17 ₰ [m Fl weniger p Kr] zu bezahlen habe, wieviel erhalte ich von 5 ℳ [q Fl] zurück? (Nach der Formel zu berechnen.)

12) Ein Schreiner sägt von einem 4 *m* langen Brette ein Stück von 2 *m* weniger 37 *cm* Länge ab. Wie lang ist das übrig bleibende Stück? (Formel.)

13) Ich werde über 2 Monate 12 Jahre alt; mein Bruder wird heute 14 Jahre alt. Um wieviel bin ich jünger, als mein Bruder? (Formel.)

14) Jemand wurde am Christtage 1769 geboren und starb 1831 am 9. Januar. Wie alt ist er geworden? (Formel.)

15) α) $724 - 99$, β) $576 - 399$, γ) $3875 - 2999$, δ) $8450980 - 7999992$ nach obiger Formel zu berechnen.

16) $3a - 17b + 5b$.

Auflös.: $3a - 17b + 5b = 3a - (17b - 5b) = 3a - 12b$; auch nach § 10 u. § 8: $3a - 17b + 5b = 3a - (12b + 5b) + 5b = 3a - 12b - 5b + 5b = 3a - 12b$.

17) α) $7a - 32b + 19b$; β) $25p + 17x - 29y - 42x + 4y$.

18) $25p + 17x + (28p - 29x)$.

19) Jemand hat 19 £ weniger 13 *s* und erhält 9 *s*. Wieviel besitzt er?

20) Kann $3a - 2b + 2c$ als eine Differenz angesehen werden, deren Minuend $3a$ ist? Wie heißt der Subtrahend?

21) Kann $7a - 2b - 3c + 5d - 6e$ als eine Differenz betrachtet werden, deren Minuend $7a - 3c$ ist?

22) Warum ist $a - b = a - c - (b - c)$, und wie heißt dieser Satz in Worten?

§ 13a.

Vereinigung mehrgliedriger Ausdrücke.

Nach § 7 — § 12.

1) α) $5a + 3b + 9a$; β) $7a + 13b + 12b$; γ) $3a + 9b - 3a$; δ) $6a + 7b - 7b$; ε) $18a + 13b - 11a$; ζ) $15a + 14b - 9b$; η) $16a + 19b - 24b$; ϑ) $9a + 13b - 14a$; ι) $27a - 6b + 13a$; $\varkappa$) $25a - 9b + 9b$; λ) $8a - 7b + 11b$; μ) $29a - 13b + 5b$; ν) $24a - 7b - 16a$; ξ) $36a - 8b - 13b$; o) $17a - 18b - 11b$; π) $25a + 13b + 58b - 16n - 12n + 18q - 9q + 27p - 38p$.

2) α) $8x + 5y + 3x - 2y$; β) $9x + 8y - 9x + 3z - 2y$; γ) $24a + 23b - 7b - 19b$; δ) $25a + 18b - 31a + 8b$; ε) $26a - 13b + 13b - 8x + 14x$; ζ) $5a - 8b + 7b - 2a$; η) $16a - 17b - 19b - 24b$; ϑ) $59x + 18t - 28y + 48t - 55u + 28y - 118t - 45u - x$.

3) $247r + 84b - 529 + 33a - 98b + 989$.

4) $127a - 19a + 15a + 35b - 15b + 45b - 13a - 7a - 25a - 35b - 18b$.
5) $27m - 28n - 108 + 45n - 17m - 36 + 9n + 170$.
6) $27a + 13b - 12c - 18a - 19b - 5c - 9c + 11b$.
7) $9997a - 698b + 2348a - 572b + 36b$.
8) $24a - 13m - 6n + 15a + 22p + n - 3p - 2a - 37a + 13m + 5n$.
9) $45a + 13b - 48a - 39a + 76b - 12b - 35a$.
10) $3a + 5b + 9a - 2a - 8b - b - 11a - 6a + 3b + 7a + 2b - b$.
11) $17x + 24y - 13z - 5x + 8y + 2z - 9x - 28y + 6z + 3x - 2y - 5z$.
12) $39y - 18u + 16t - 19u - 18t - 14y + 45u - 27t + 16y$.

Auszuführen:

13) $26a + 38b - 12c + (37a - 14b - 18c)$.
14) $17a - 14b - 12c - 13d + (25a + 18b + 12c + 4d)$.
15) $37a - 4b - 17c + 15d - 6f - 8h + (3c - 31a + 9b - 5d - h - 11f)$.
16) $a - 2b - 3c + 4d + (5b - 6a - 7c + 8d) + (9a - 10b + 11c - 12d) + (13a - 10b + 9c - 8d) + (7a - 6b + 5c + 4d) + (3a - 2b - c)$.
17) $18a + 9b - 7c + 9d + (3b - 7a - 7d - 6c) + (13c - 4d + 9a - 5b) + (3d - 7b - 18c + 4a)$.
18) $24m - 17q + 15p - 13n + (11q - 10p - 8n + 3m) + (9n - 6m - 4q - 7m - 5n) + (8q - 4p - 12m + 18n)$.
19) $3x + 5y - 3z + (8t - 3y - 7x) + (8y - 4x) + (13x - 7z - 7t - 14) + (11z - 13t - 9) + (5t - 8z - 17y - 1) + (2x + 17)$.
20) Wieviel machen 9998, 9997, 9993, 9987, 99983 zusammen?
21) $(x - y) + (x - y) + (x - y) + (x - y) + (x - y) + (x - y) + (x - y) + (x - y) + (x - y)$.
22) $13x - 8y + (14x - 9y) + (5y - 2x) + (7y - 3x)$.
23) Die zwanzig auf 9999980 hintereinander folgenden Zahlen 9999981, 9999982 u. s. w. sollen zusammengezählt werden.
24) α) $7a + 3b - (2a + b)$; β) $9a + 14b - (4a - 3b)$; γ) $15a + 12b - (a - 3b) - (9a + 6b)$.
25) $7a + 12b + 3c - (2a + 5b + 2c)$.
26) $6a - 5b - 5c - (2a + 4b + 3c)$.
27) $18a - 24b + 23c - (16a + 14b - 13c)$.
28) $26m - 24n - 48p - 20q - (14m - 28n - 19p + 18q)$.
29) $3m - 38n - 57p - 15q - [12p - 38q + 48n - 50m]$.
30) $13g + 15h - 17k - 13l + 14n - (14n + 15h - 13l - 17k)$.
31) $7a - 5b - 3c + 4g - 9k - 24l - 38n - (24g + 7a - 24l + 8c - 16b + 18n)$.

32) $17a - 9b - 8c - (6a - 5b - 3c) - (7a + 9b - 8c)$.

33) $13a - 17b - 5c - (14a - 6b - 11c) + (7a - 8b + 9c) - (5a - 18b + 14c)$.

34) $13a - 15b - 7c - 11d + (7a - 6b + 8c + 3d) - (6d + 5b - 7c + 2a) - (5c - 10d - 28b + 17a)$.

35) $3a - 7b + 8c - 4d + 8e + (7a + 6e + 9c - 5d + 8b) - (d + 2c - 15b - 5a - 3e)$.

36) $4x - 8y - 19q - 3z - (24x - 18y - 34p - 12q - 13z) - (14q - 17p - 8z)$.

37) $15y + 6x - [3y - (8z + 4x)]$.
Aufl.: $15y + 6x - 3y + (8z + 4x) = 12y + 10x + 8z$.

38) $37x - 48y - [18z - (12x + 3y) - (2z - 4y)] - 33z$.
Aufl.: $49x - 49y - 49z$.

39) $6x - 8y - 3z - [4x - 8y - (2z - 5y) - (4x + 3y) + (8x + 2z)]$.

40) $44x + [48y - (6z + 3y - 7x) + 4z] - [48y - 8x + 2z - (4x + y)]$.

41) $4x - [(a - 4x) + (3y + 17a) - (98x + 3y)]$.

42) $13x - 36y - 27z - [7y + 5z - (7x + 35y - 28z) + (15x + 7z)] - [6z - (11y + 9x) - (83z - 11x - 11y)] - (3x - 8y)$.

43) $25a - 19b - (3b - [4a - (5b - 6c)] - 8a)$.

44) $6m + (4m - [8n - (2m + 4n) - 22n] - 7n) - (7n + [9m - (3n + 4m) + 8n] + 6m)$. Aufl.: $m - n$.

45) Was wird aus $m - (n - o)$, wenn $n = 7m - (8p + 3q)$ und $o = 2m - (8p - 3q)$ gesetzt wird?

46) Welche Zahl muß zu $5p - [7q + 3p - (2p + q)]$ addiert werden, damit $4p - [14q + (2p - 7q) - 3p]$ herauskommt?

§ 13b. Wiederholungs-Beispiele.

1) Wenn der Einkaufspreis einer Ware mit e, der Verkaufspreis mit v und der Gewinn mit g, der Schaden mit s bezeichnet werden, welche Beziehung findet α) zwischen e, v und g, β) zwischen e, v und s statt?

2) Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, wie heißen alsdann die vier folgenden, wie die vier vorhergehenden ganzen Zahlen?

3) Jemand geht p Schritte vorwärts, m Schritte rückwärts, r Schritte rückwärts und zuletzt s Schritte vorwärts; wieviel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausging?

4) Ein Ort A hat n Stunden α) früher, β) später Mittag, als ein anderer Ort B. Wenn nun an dem ersten Orte p Uhr ist, wieviel Uhr ist in demselben Momente an dem zweiten Orte?

5) Von drei Örtern habe der erste die nördliche geographische Breite a, der zweite die nördliche geographische Breite b, der

dritte die südliche geographische Breite c. Um wieviel Grade sind die durch je zwei der Örter gelegten Parallelkreise voneinander entfernt? Wie heißen die Antworten für Berlin 52° 30′ 17″ (52 Grad 30 Minuten 17 Sekunden) nördlicher Breite, Wien 48° 12′ 35″ nördlicher Breite und Kap der guten Hoffnung 33° 56′ 3″ südlicher Breite? ($1° = 60′$, $1′ = 60″$.)

6) α) Von drei Örtern liegt der erste m Grad östlich, der zweite n Grad östlich, der dritte p Grad westlich von der Insel Ferro. Wie groß sind die Längen-Unterschiede je zweier dieser Örter? Wie heißen die Antworten für Petersburg 47° 58′ 8″ östlicher Länge, Rom 30° 8′ 30″ östlicher Länge und Philadelphia 57° 29′ 22″ westlicher Länge von Ferro? Wieviel Uhr ist in Petersburg, wieviel in Philadelphia, wenn in Rom mittags 12 Uhr ist? β) Ein Ort hat die nördliche Breite a, ein anderer liegt b Grad mehr südlich. Welches ist die Breite des letzteren Ortes?

7) Eine Nachricht geht durch den elektrischen Telegraphen um 7 Uhr 35 Minuten 12 Sekunden von Berlin nach Paris und gebraucht zur Überbringung 9 Minuten 8 Sekunden. Um wieviel Uhr Pariser Zeit kommt die Nachricht an, wenn die Pariser Uhr 44 Minuten 14 Sekunden nach der Berliner Uhr geht?

8) Ein Kilogramm Ware kostet n *Fl*, was kosten p *kg*? Wieviel Kilogramm erhält man aber für p *Fl*?

9) Wieviel Ziegelsteine sind in p rechtwinkligen Haufen enthalten, wenn jeder Haufen p Steine in der Länge, p in der Breite und p in der Höhe enthält?

10) Eine Wiener Mark Münzgewicht hält 2^{16} Richtpfennige. Wieviel macht dieses aus?

11) α) Ein Meter hat 10^1 Decimeter, 10^2 Centimeter, 10^3 Millimeter und 10^4 Dixmillimeter? Wieviel macht jedes aus? β) Die Entfernung des Nordpols vom Äquator beträgt 10^7 m, wieviel macht es aus? γ) Eine Tonne (t) hat 10^9 Milligramm. Wieviel macht dieses aus?

12) Wenn m, n, p, q vier beliebige Zahlen bedeuten, wie drückt man alsdann in algebraischen Zeichen aus: a) die Summe der beiden ersten vermindert um die Summe der beiden letzten? b) die Summe der beiden ersten multipliziert mit der Summe der beiden letzten? c) die Differenz der beiden ersten dividiert durch die Summe der beiden letzten? d) die Differenz der beiden letzten dividiert in das Produkt der beiden ersten? e) das Produkt der beiden ersten dividiert durch das Produkt der beiden letzten? f) das Produkt der beiden ersten dividiert durch den Quotienten der beiden letzten? g) die Summe der beiden ersten dividiert durch das Produkt der beiden letzten? h) den Quotienten der beiden ersten dividiert durch das Produkt der beiden letzten? i) den Quotienten der beiden ersten

dividiert durch die Differenz der beiden letzten? k) die Summe der drei ersten multipliziert mit der letzten? l) das Produkt der Summe der beiden ersten und der dritten, vermindert um die vierte? m) die erste Zahl vermehrt um das Produkt der zweiten und dritten Zahl, und das, was herauskommt, dividiert in das Produkt der dritten und vierten Zahl?

13) Wie unterscheidet sich $(a+b)^2$ von α) $a+b^2$? β) a^2+b^2?

14) Zu berechnen: 1) $(a+b)^2$, 2) a^2+b^2, 3) $(a-b)^2$, 4) a^2-b^2 für α) $a=4$, $b=3$, β) $a=12$, $b=5$, γ) $a=7$, $b=3$.

15) Wenn p und q zwei beliebige Zahlen bedeuten, so soll hingeschrieben werden: 1) das Quadrat der Summe der beiden Zahlen; 2) die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermehrt um das doppelte Produkt derselben; 3) das Quadrat der Differenz der beiden Zahlen; 4) die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermindert um das doppelte Produkt der Zahlen; 5) die Summe der beiden Zahlen multipliziert mit der Differenz der beiden Zahlen; 6) die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.

16) Die Ausdrücke in Nr. 15 sollen für α) $p=5$, $q=2$; β) $p=8$, $q=5$; γ) $p=13$, $q=7$ berechnet werden.

17) Wem ist α) $(m+n)+(m-n)$, β) $(m+n)-(m-n)$ gleich? Welche Sätze lassen sich aus diesen Formeln aufstellen?

18) Was kommt heraus, wenn von einer Zahl die um n kleinere Zahl abgezogen wird?

19) Wenn $x+y+z=M$, $x+y-z=N$, $x-y+z=O$, $y+z-x=P$, wie groß ist alsdann α) $M+N+O+P$; β) $M-N+O-P$; γ) $M-N-O+P$; δ) $M-N-O-P$?

20) Wenn $A=3x-2y+5z$, $B=7x-8y+5z$, $C=9x-5y+3z$, $D=11x-3y-4z$, wie groß ist alsdann 1) $A+B+C+D$; 2) $A+B-C-D$; 3) $A-B-C+D$; 4) $A-(B-C-D)$; 5) $B-[A-(C-D)]$; 6) $B-[C-(A-[B+D])]$. 7) $A+A+A+A+A$; 8) $D+D+D+D$?

21) Wenn $E=5x+3y-7z$, $F=8x-9y-3z$, $G=9y-3x-7z$, $H=8y-7x-2z$, wie groß ist α) $E-[F-(G-H)]$; β) $G-(F-[H-(E+G)])$?

22) Die acht Ausdrücke A bis H Nr. 20 und 21 sollen zu einander addiert, und von deren Summe sollen die einzelnen Summanden α) in der Reihenfolge $A, B \ldots H$, β) in der Reihenfolge $H, G \ldots A$ subtrahiert werden.

Zweiter Abschnitt.

Produkte, Quotienten und Brüche, Teilbarkeit der Zahlen, Decimalbrüche, Verhältnisse und Proportionen.

A. Anwendung der Sätze von Produkten und Quotienten.

§ 14.

I. $(p \pm q)n = pn \pm qn$. II. $m(a \pm b) = ma \pm mb$.

1) Wie wird eine Summe mit einer ganzen Zahl multipliziert?
2) Wie wird eine Zahl mit einer Summe multipliziert?
3) Wie wird eine Differenz mit einer ganzen Zahl multipliziert?
4) Wie wird eine Zahl mit einer Differenz multipliziert?
5) Wie werden Produkte von gleichen Multiplikatoren oder von gleichen Multiplikanden zu einander addiert und voneinander subtrahiert?

Auszuführen:

6) $p \cdot (m+n)$; $m \cdot (x+1)$; $13 \times (y+z)$; $27(u+49)$; $x(x+1)$.
7) α) $(a+b) \times n$; β) $(a+17)p$; γ) $(p+1)53$.
8) $x \cdot (y-z)$; $7(1-a)$; $(9-x) \times m$; $(12-p)8$; $y \cdot (y-1)$.
9) $a(a-b+c+d-e)$; $(p-q-r+t)t$; $78(x-98+o-z)$.
10) Was wird aus ax, wenn $x = y + z - u$ gesetzt wird?
11) Was wird aus dem Produkte mn, wenn der Multiplikator sich um 7 vermehrt?
12) Ein Kaufmann kauft Ware, das Kilogramm zu m *M*, und nimmt auf jedes Kilogramm n *M* Nutzen. Wieviel erhält er für p Kilogramm?
13) Multipliziert man 73 mit 48, so erhält man 3504. Wieviel wird man zu dem Resultate hinzufügen müssen, wenn α) 75 mit 48, wieviel, wenn β) 73 mit 51 zu multiplizieren ist?
14) Kostet 1 *kg* 29 *M* 87 *ℌ*, so bezahlt man für 67 *kg* 2001 *M* 29 *ℌ*. Um wieviel muß man letztere Summe vermehren, wenn man für ein Kilogramm 29 *M* 93 *ℌ* bezahlen muß?

15) $98734 \cdot 27534 = 2718541956$. Wie groß ist $98737 \cdot 27534$, wie groß $98734 \cdot 27538$, wie groß $98737 \cdot 27538$?

16) $58764 \times 392514 = 23065692696$. Wieviel ist 58767×392514, wieviel 58764×392519?

17) α) $(1000-3) \cdot 37$; β) $99 \cdot 23$; γ) 999×13; δ) 9999×39.

18) Nach der Formel $m(a-b)$ zu multiplizieren: α) 7 mit 996, β) 23 mit 996, γ) 29 mit 9993.

19) Ein Kilogramm kostet α) 3 *Fl* weniger 7 *Nkr*, β) 6 *Fl* weniger 3 *Nkr*. Wieviel kosten 17 *kg*?

20) α) 1 *kg* kostet 3 *M* 97 *Pf*. Wieviel kosten 18 *kg*? (3 *M* 97 *Pf* = 4 *M* weniger 3 *Pf*.) β) 1 *m* kostet 9 *M* 92 *Pf*. Wieviel kosten 12 *m*?

21) In den folgenden Ausdrücken die Klammern fortzuschaffen: α) $[(x+5)x+7]x+3$; β) $[(x-3)x+5]x-91$; γ) $([(x-10)x+35]x-50)x+24$.

Zu vereinigen:

22) $5a+5b$. Aufl.: $5(a+b)$.

23) α) $7m-7n$; β) $9x-9$; γ) $py-p$.

24) α) $7a-7$; β) $5x+5y-20$.

25) α) $7x-7y+7z-21$; β) $9x-18y-24z-27$.

26) α) $mx+nx$; β) $ax+x$; γ) $xx-x$.

27) $py-qy+ry$.

28) α) $6a+6b+6c+30$; β) $13a-13b-13c-13$.

29) $(17m)(5a)-(17m)(3a)-(17m)b+(17m)(3b)+17m$.

30) α) $ap+mp+np-qp-p+pp$; β) $(m-n)x+(n-1)x$.

31) $11x+nx-mx+x+(m-1)x+x^2$.

32) Zu berechnen: $19 \cdot 58+27 \cdot 58+24 \cdot 58+13 \cdot 58+17 \cdot 58$.

33) Ebenso: $127 \cdot 459-127 \cdot 324-127 \cdot 35$.

34) α) $(3p-2q)(x-y)+(5p+3q)(x-y)$; β) $(x+y)(x-y)+(x-y)(x-y)$; γ) $(x+y)(x+y)-(x-y)(x+y)$.

35) $3(a-b)+(m-n)(a-b)+(n-3)(a-b)$.

36) $(9m-4n)(a-b)-(5m-8n)(a-b)-(n+m)(a-b)$.

37) $(2p-3q)(p-q)+(5q-p)(p-q)-(p-q)^2-(4q-p)(p-q)$. Aufl.: $(p-q)^2$.

38) $(4a-5b+6c)(3a-2b-5c)-(4a-5b+6c)(2a+3b-4c)+(4a-5b+6c)(5a-6b-7c)-(4a-5b+6c)(5a-9b-11c)$.

39) Wieviel machen 17 *kg* Kaffee, jedes *kg* zu 1 *M* 75 *Pf*, 17 *kg* Zucker, jedes *kg* zu 80 *Pf*, und 17 *kg* Mandeln, jedes *kg* zu 3 *M* 50 *Pf*, zusammen?

40) 37 m, das Meter zu 9 ℳ 75 ₰; 37 m, das Meter zu 39 ℳ 92 ₰; 37 m, das Meter zu 4 ℳ 84 ₰, und 37 m, das Meter zu 5 ℳ 49 ₰, wieviel Geld macht es zusammen?

41) Die Ausdrücke α) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, β) $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$, γ) $x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120$ in Ausdrücke zu verwandeln, ähnlich denen in 21 α), β) und γ).

In folgenden Beispielen die Klammern fortzuschaffen:

42) α) $9x - 7(y+z)$. Antw.: $9x - [7y + 7z] = 9x - 7y - 7z$.
β) $4m - 5(p-q)$. Antw.: $4m - [5p - 5q] = 4m - 5p + 5q$.

43) $a + b(c + d - e) - m(n + p) - r(s - t)$.

44) $28(x - y + z) + 24(x + y - z) - 13(y - x - z)$.

45) $(96 - a - b - c)\,14 + (4 + a - c)\,13 - (7 - a - c)\,97$.

46) $24x - 6y - 9(x + y) + 25x - 19(y - z) - 17(x + y - z)$.

47) $53(a - b + c) - 27(a + b - c) - 26(a - b - c)$.

48) $87(a - b - c - d) - 68(a - b - d) - 53(a - b - c) + 42(b + d)$.

49) $(p - q - m)p - q(m - q - p) + (q + m)m + m(p - m)$.

50) Zu berechnen: $546000 - 273 \cdot 999$. (Bem.: $999 = 1000 - 1$.)

51) Ebenso auf die kürzeste Weise: $9997 \cdot 1759 - 997 \cdot 2870$.

52) Aus einem Geldsacke, in welchem sich 3600 ℳ befinden, werden 19 Rollen Geld herausgenommen. Jede Rolle enthält 120 ℳ weniger 40 ₰. Wieviel Geld bleibt übrig?

53) Ich besitze 105 ℳ und bezahle hiervon 7 m Tuch, jedes Meter zu 11 ℳ 86 ₰. Wieviel Geld behalte ich übrig?

In folgenden Ausdrücken die Produkte mit gleichen Multiplikanden oder Multiplikatoren zu vereinigen:

54) α) $7x + 5y + 5z$; β) $9x - 14y - 14z$; γ) $3m + 8p - 8q$; δ) $9a - 7b + 7c$.
Aufl.: α) $7x + 5(y + z)$; β) $9x - 14(y + z)$; γ) $3m + 8(p - q)$, oder: $3m - 8(q - p)$; δ) $9a - 7(b - c)$, oder: $9a + 7(c - b)$.

55) $a - mb + mc - md + ne - ng$.
Aufl.: $a - m(b - c + d) + n(e - g)$, oder:
$a + m(c - b - d) - n(g - e)$.

56) $23a - 7b + 7c + 7d - 5p - 5q + 5r + 35$.

57) $3m - 19p - 17x + 19q - 17y + 3n - 19 - 17t$.

58) $a - pb + rd - pc - re + r^2 - a^2 - r$.

59) $z - px - qy + pz - ry + qx - rz$.

60) $m - nx - py + mx - px - ny - my + p - n$.
61) α) $a - b(c - d) - b \cdot d$; β) $a - (x + y)c + y \cdot c$.
62) $m - n(p - q) - (m - 2n)(p - q)$.
63) $a - (3b - 2c)(m - n) - (2b - 4c)(m - n)$.
64) $ab - (a + n)c + nc$.
65) $1 - a + b - (2a + 3b)(a - b) + (3a + 2b - 1)(a - b)$.
Aufl.: $(1 - a + b)^2 = (a - b - 1)^2$.
66) $pm - pn - qm + qn$.
Aufl.: $p(m - n) - q(m - n) = (p - q)(m - n)$.
67) α) $pm + qm - pn - qn$; β) $p \cdot q - p \cdot 7 - 3 \cdot q + 21$.
68) α) $p \cdot m - 2 \cdot m + 2 \cdot n - p \cdot n$; β) $x \cdot y - x \cdot 8 + y - 8$.
69) α) $x^2 + xy - yx - y^2$; β) $5m \cdot 7n - 5m - 1 + 7 \cdot n$.
70) $30 + 3x \cdot 6 + 2y \cdot 8y - 3x \cdot 8y - 5 \cdot 8y - 2y \cdot 6$.
71) $ad + bd + ce - ae + bf - cf + af - cd - be$.
Aufl.: $(a + b - c)(d - e + f)$.
72) $a - (9m + 8n - 7p)(x - y) + (10m + 8n - 6p)(x - y)$.
73) $(5m - 9n)(3p - 4q) - (4m - 7n)(11p + 9q)$
$+ (4m - 7n)(9p - 8q) - (4m - 7n)(p - 21q)$.
Aufl.: $(m - 2n)(3p - 4q)$.

§ 15.

I. $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)$.
II. $a \cdot b = b \cdot a$.
(Vgl. § 7.)

1) Wie wird ein Produkt mit einer ganzen Zahl multipliziert?
2) Wie wird eine Zahl mit einem Produkte multipliziert?
3) Warum darf man Multiplikator und Multiplikand eines Produktes miteinander vertauschen? Welchen gemeinschaftlichen Namen führen Multiplikator und Multiplikand eines Produktes?
4) $7 \cdot a$ mit 4, $69 \cdot x$ mit 87, $a \cdot 19$ mit 58 zu multiplizieren.
5) Auszuführen: $14 \cdot (3a + 2b - 9c) + (5x - 8y - 9z) \cdot 42$.
6) Ebenso: $24(98x - 52y + 7z) - 397(45x - 58y - 87z)$
$+ (35x - 42y + 59z)\, 198$.
7) Zu vereinigen: α) $27x - 18y + 15n$;
β) $45x - 35u - 48m - 56n$.
8) Auf die kürzeste Weise α) $25 \cdot 9$ mit 4, β) $237 \cdot 125$ mit 8 zu multiplizieren.
9) Wieviel Äpfel sind in 4 Körben, wenn in jedem sich 29 Viertel (à 25 Stück) befinden?
10) Wofür ist mehr Fracht zu zahlen, für 27 *t* 19 *km* oder für 19 *t* 27 *km* weit zu fahren?

11) Eine gewisse Anzahl Ziegelsteine ist in zwei rechtwinkligen Haufen aufgestellt. Der erste hat in der Länge 113, in der Breite 97, in der Höhe 67; der zweite hat in der Länge 67, in der Breite 113, in der Höhe 97 Ziegelsteine. In welchem von beiden Haufen befinden sich die meisten Steine?

12) Auf die kürzeste Art zu berechnen: α) $25 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 3$; β) $125 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4$; γ) $125 \times 125 \times 125 \times 8 \times 8 \times 8$.

13) $5 \cdot 9 \cdot 8$ mit $4 \cdot 13 \cdot 125$ zu multiplizieren.

14) Ebenso: $25a(m+n)$ mit $27p$ und $25tuv$ mit $99xyz$.

15) Ebenso: 25 mit 36. [Anleitung: $36 = 4 \cdot 9$ u. s. w.]

16) Ebenso: 25 mit α) 52, β) 64; 125 mit 48, 56 und 72.

17) Welche Versetzungen können in dem Produkte $(a+b)(c+d)$ mit den vier Zahlen a, b, c, d vorgenommen werden, ohne daß der Wert des Produktes sich ändert?

18) $63arqpm - 45bqprn - 27pqrcd + 9perq - 9prq$ zu vereinigen.

19) Folgende Produkte: α) $a^2 \cdot a$, β) $a^3 \cdot a$, γ) $a^5 \cdot a^2$, δ) $a^3 \cdot a \cdot a \cdot a$, ε) $a^4(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)$, ζ) $a^7 a^6$ auszuführen.

20) Auszuführen: $x^9x^7 + y^{13}y - z^{12}z^3z^5 + u \cdot u + g^3gggg^5$.

21) $25a^2$ mit $44a^3b^2$ zu multiplizieren.

22) Ebenso: $(25a^9b^7c^6) \cdot (7a^{11}c^{14}b^{13})$ mit $3a^5b^6c^7$.

In den Beispielen 23—28 die Klammern aufzulösen:

23) α) $17a^2(2a^2 - 3b^2 - 5a^2c)$; β) $24a^3b^2(9a^7b^5 - 11a^9b^8 + a^{11}b^{13})$.

24) $91a^2b^2c^2 - 7a^2b(13bc^2 - 9cb^2) - 21cb^3(3a^2 - 2c^2)$.

25) $9a^2bc(2ab^2c^2 - 4a^5b^6c^6) - 3a^3b^5c^7(a^8b^6c^4 - 13a^4b^2) - 5a^2bc^3(3ab^2 - 5a^9b^{10}c^8)$.

26) $13a^2y^2(8a^5y^7 - 2a^4y^9) - 2a^4y^5(9a^3y^4 - 13a^2y^6)$.

27) $5m^2n^3(2m^3n^2p^5q^5 + 3m^5n^5x^9y^{10}) - 15x^7y^8(m^7n^8x^2y^2 - 2p^9q^{10}) - 5p^4q^3(m^5n^5pq^2 + 6x^7y^8p^5q^7)$.

28) $25c^2d^2(4c^3d^4 - 45c^6d^8 + 23c^8d^9) - 5c^4d^4(8cd^2 + 34c^4d^6 - 24c^6d^7) + 125c^5d^5(36d - 48c^3d^5 - 54c^5d^6)$.

29) Welche gleiche Faktoren haben a^7b^9 und $a^{11}b^5$?

30) Welche gleiche Faktoren haben die drei Produkte $15a^9b^8c^{13}$, $21a^6b^{12}c^2$ und $33a^5b^{11}c^{18}$?

In folgenden Beispielen die Produkte zu vereinigen:

31) $25a^2 + 30a^4 - 35a^6$. Aufl.: $5a^2(5 + 6a^2 - 7a^4)$.

32) $24a^2b^3c^5d^6 - 6a^4b^2c^7d^9 - 36a^3b^2c^9d^{11} - 6a^2b^2c^2d^2$.

33) $35m^{19}n^{27}o^{16}p^{11} - 28m^{21}n^{13}o^{17}p^{21} - 49m^{18}n^{10}o^5p^7$.

34) $11a^2b^2 - 18x^3y^4z^5 - 27x^5y^3z^7 + 45x^2y^8z^6$.

35) $16m^{10}n^{12}p^{14} - 40m^8n^9p^{10}x^5y^6z^7 - 22m^2n^3p^4x^{11}y^{12}z^{13} + 55x^{16}y^{18}z^{20}$.
Aufl.: $(8m^8n^9p^{10} - 11x^{11}y^{12}z^{13})(2m^2n^3p^4 - 5x^5y^6z^7)$.
36) $77a^5b^7 - 55a^6m^4b^5 - 66a^3b^{12}m^3 - 91a^9b^2m^6 + 65a^{10}m^{10} + 78a^7b^7m^9$. Aufl.: $(11a^3b^5 - 13a^7m^6)(7a^2b^2 - 5a^3m^4 - 6b^7m^3)$.

§ 16.

I. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
II. $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$.
III. $(a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$.
IV. $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$.

1) Wie wird eine Summe mit einer Summe multipliziert?
2) Wie wird eine Summe mit einer Differenz multipliziert?
3) Wie wird eine Differenz mit einer Summe multipliziert?
4) Wie wird eine Differenz mit einer Differenz multipliziert?
5) Welche praktische Regeln ergeben sich aus obigen vier Formeln für die Multiplikation mehrgliederiger Ausdrücke in Hinsicht der Vorzeichen, mit denen die einzelnen Partialprodukte behaftet sind?

Auszuführen:

6) α) $(m+n)(p+q)$; β) $(5a+2b)(3c+4d)$; γ) $(a+1)(b+1)$.
7) α) $(7a+9b)(11a+13b)$; β) $(6x+5y)(4y+3x)$; γ) $(10a+b)(10c+d)$; δ) $(mx+n)(px+q)$.
8) α) $(d+e)(f-g)$; β) $(98a+17b)(99a-25b)$.
9) α) $(h-i)(k+l)$; β) $(91m-494n)(7m+38n)$.
10) α) $(p-q)(r-s)$; β) $(q-p)(r-s)$; γ) $(p-q)(s-r)$; δ) $(q-p)(s-r)$; ε) $(23a-5b)(99a-6b)$.
11) α) $(44x-18y)(50x-7y)$; β) $(42y-125z)(25y-32z)$.
12) α) $(a+b)^2$; β) $(a-b)^2$; γ) $(b-a)^2$. Wem ist nach diesen Formeln das Quadrat der Summe, wem das Quadrat der Differenz zweier Zahlen gleich? Nach diesen Formeln zu berechnen: δ) $(3a+2b)^2$; ε) $(7m-11n)^2$; ζ) $31^2 = (30+1)^2$; η) 43^2; ϑ) 85^2; ι) $99^2 = (100-1)^2$; $\varkappa$) 97^2; λ) 198^2.
13) Multipliziert man 47796 mit 28534, so erhält man 1363811064. Wieviel kommt heraus, wenn beide Faktoren um 1 vermehrt werden?
14) Ein Garten, der 318 *m* lang und 87 *m* breit ist, wird in der Länge um 10 *m*, in der Breite um 5 *m* vergrößert. Um wieviel nimmt der Flächeninhalt desselben zu?
15) In einem Buche befinden sich auf jeder Seite 36 Zeilen, in jeder Zeile 45 Buchstaben. Wieviel Buchstaben wird jede Seite mehr oder weniger enthalten, wenn auf jede Seite 3 Zeilen

mehr, dagegen in jeder Zeile 3 Buchstaben **weniger** gesetzt werden?

16) Jemand hat die Zahlen 879899257 und 48623793 miteinander zu multiplizieren, sieht aber, weil er schlecht geschrieben, die erste Ziffer 7 rechter Hand des ersten Faktors für 1, die erste Ziffer 3 des zweiten Faktors für 5 an. Um wieviel muß er, ohne die Rechnung von neuem zu machen, das Resultat **vergrößern** oder **verkleinern**, wenn er das richtige Resultat erhalten will?

Anl.: $879899257 \cdot 48623793 = (879899251 + 6)(48623795 - 2)$.

17) $123456 \times 78910 = 9741912960$; wie groß α) 123459×78908; β) 123453×78912?

18) $31415 \times 68585 = 2154597775$. Wie groß ist 31414×68584?

19) $78564 \times 21436 = 1684097904$. Wie groß ist 78559×21431?

20) Berechne: 97×98; 9998×997; 4996×39997; 59998×79996.

21) $(m + n) \cdot (m - n)$. Was kann man im allgemeinen für das **Produkt** aus **Summe** und **Differenz** zweier Zahlen setzen?

22) α) $(13a - 17b)(13a + 17b)$; β) $(21p - 31q)(31q + 21p)$.

23) Zu berechnen: 1) $(50 + 3)(50 - 3)$; 2) 54×46; 3) $18 \cdot 22$; 4) $97 \cdot 103$; 5) $117 \cdot 123$; 6) $70004 \cdot 69996$; 7) $5006 \cdot 4994$.

24) Um wieviel ändert sich das Produkt aus zwei Faktoren, beide gleich 78543, wenn von dem einen Faktor 13 abgezogen und zu dem andern Faktor 13 hinzugesetzt wird?

25) Zu berechnen: α) $67^2 - 33^2$; β) $83^2 - 17^2$; γ) $151^2 - 49^2$; δ) $784^2 - 216^2$; ε) $5129^2 - 3871^2$; ζ) $571428^2 - 428571^2$.

26) α) $(3a + 2b + 7c)(5a + 6b + 9c)$; β) $(4p + 18q - 7r)(7p - 11q + 3r)$; γ) $(100a + 10b + c)(100d + 10e + f)$; δ) $(1000m + 100n + 10p + q)(1000r + 100s + 10t + u)$.

27) $(5x^2 + 7x + 8)(9x^2 - 11x + 3)$; $(9x - 7y - 11z)(2x + 8y - 7z)$.

28) α) $(7m + 9n - 8)(8m - 4n - 1)$;
β) $(8m - 9n - 3q)(7m - 18n - 11q)$.

29) α) $(a + b + c)(a + b + c)$; β) $(a + b + c)(a + b - c)$.

30) α) $(a - b + c)(a + b - c)$; β) $(a + b + c)(a - b - c)$.

31) α) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; β) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$.

32) α) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$; β) $(5x + 1)(125x^3 - 25x^2 + 5x - 1)$; γ) $(az^2 + bz + c)(dz^2 + ez + f)$;
δ) $(mz^3 + nz^2 + pz + q)(rz^3 + sz^2 + pz + u)$.

33) α) $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x + y)$; β) $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$; γ) $[x^2 + (n - 1)x + 1](x + 1)$; δ) $[bx^2 + (c - b)x + b](x + 1)$; ε) $[nx^2 + (a + n)x + n](x - 1)$; ζ) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5)(1 - 2x + x^2)$.

34) $(343x^3 + 245x^2y + 175xy^2 + 125y^3) \times (49x^2 - 70xy + 25y^2)$.

35) $15a^2 + 24b^2 - (3a + 2b)(5a + 6b)$. Aufl.: $12b^2 - 28ab$.

36) $26xy - (9x - 8y)(5x + 2y) - (4y - 3x)(15x + 4y)$.

37) $(4p - 3q)(7p + 8q) - (8p - 9q)(5p + 7q) - (3p - 2q)(5p + 8q)$. Aufl.: $55q^2 - 27p^2 - 14pq$.
38) $(34m - 12n)(17m - 8n) - [(4m - 6n)(7m - 3n) - (5m - 8n)(7m - 6n)]$. Aufl.: $585m^2 - 508mn + 126n^2$.
39) $(3a - 6c)(4a - 3d) - [(2a - 5c)(6a - 11d) - (37cd - 6ac)]$.
40) $(3x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x^2 - 4x - 1) - (15x^4 - 12x^3 + 3x^2 - x - 1)(x - 1)$. Aufl.: $5x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 3x$.
41) $98a^2b^2(a^2 + 3b^2)(7a^2 - 11b^2)$.
42) $(3a + 5b) \cdot [(7a + 6b)(3a - 5b)]$.
43) $(3m - 7n) \cdot (9m^2 + 49n^2) \cdot (3m + 7n)$.
44) $(3m + 7) \cdot (81m^4 + 441m^2 + 2401) \cdot (3m - 7)$.
45) $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$.
46) $(ab + ac + bc)(ab + ac - bc)(ab - ac + bc)(-ab + ac + bc)$.
47) $(a - b + c + d)(a + b + c - d)(a + b - c + d)(-a + b + c + d)$.
48) $(4x^2 - 6xy + 9y^2)(2x + 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)(2x - 3y)$.
49) $[x^3 + (a + 1)x^2 - (a^2 + 2a - 3)x + (a^3 - 5a^2 + 8a - 7)]$ $[x^2 + (a - 1)x + (a^2 - 3a + 1)]$.
50) $[y^3 + (a + b)y^2 + (a^2 - b^2)y + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)]$ $[y^2 - (a - b)y + (a^2 - 2ab + b^2)]$.
51) Zu beweisen, daß: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

§ 17.

I. $(a : b) \times b = a$. II. $a \times b : b = a$.
III. $a : (a : b) = b$. IV. $a : a = 1$. } (Vgl. § 8.)

1) Wie lassen sich obige Formeln durch Worte ausdrücken?
2) 117 soll mit 319 multipliziert, und das, was herauskommt, durch 319 dividiert werden.
3) α) $5384 \cdot 1719 : 1719$; β) $5841 \cdot 2813 : 5841$.
4) α) $\frac{m(a + b)}{a + b}$; β) $\frac{(3a - 5b)m}{3a - 5b}$; γ) $\frac{6m(5x - 8y)}{5x - 8y}$.
5) 1 *kg* kostet 7 *M*. Wieviel Pfennige ein Dekagramm (*dkg*)?
6) Für 117 *M* erhält man 100 *m*. Wieviel Pfennige kostet ein Meter?
7) 100 *m* kosten 37 österreichische Gulden [*m* Gulden]. Wieviel kostet ein Meter? (1 Gulden [*Fl*] = 100 Neukreuzer [*Nkr*].)
8) 100 *kg* kosten *m* *M*. Wieviel Pfg. kostet ein Kilogramm?
9) 1 *hl* kostet 87 *M*, wieviel Pfg. 1 *l*?
10) Für 100 Knöpfe zahle ich 17 *M*. Wieviel zahle ich für einen Knopf?
11) Ein Kilogramm kostet 13 Gulden österr. Wieviel 1 *dkg* in Kreuzern?

12) Für 100 *Fl* erhalte ich 19 *kg*; wieviel Dekagramm für einen Gulden?

13) Für 100 *Frc* erhalte ich 9 *kg*; wieviel für einen Franken?

14) Ein Hektoliter Wein kostet 83 *M*, wieviel Pfennige ein Liter?

15) Wenn ich 23 Viertel (1 Viertel = 25) Nüsse unter 25 Kinder gleichmäßig verteile, wieviel erhält jedes?

16) Dividiere 562 in 179278 und multipliziere den Quotienten mit 562.

17) α) $\frac{5^2m^2n^2}{x^2y^2} \times (x^2y^2)$; β) $\frac{p}{a+b}(a+b)$.

18) $(m-n-o)\frac{c+d}{m-n-o}$.

19) Ein Knabe giebt täglich 9 ₰ für Naschwerk aus. Wieviel Mark macht es in 100 Tagen?

Auszuführen:

20) $\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\right)n$. Aufl.: $a+b$.

21) $\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{x}\right)x$.

22) $\left(\frac{r}{x+y}-\frac{s}{x+y}+\frac{t}{x+y}\right)(x+y)$.

23) $a-\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{y}\right)y$.

24) $a-\left(\frac{n}{z}+\frac{p}{z}-\frac{q}{z}\right)z$.

25) $m+3n-\frac{n+o}{p}p+\frac{o-e}{n}n-\frac{m+n-e}{n+o}(n+o)$. Aufl.: n.

26) $x+y\frac{z+t}{y}-\frac{z-c+x}{a}a-\frac{c+t-e}{m}m$. Aufl.: e.

27) $\left(m+\frac{a}{n}\right)\left(n-\frac{a}{m}\right)$.

28) α) $\frac{1}{x^2}\cdot x^2$; β) $\frac{1}{y^2}\cdot y^3$.

29) α) $\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)x^2$; β) $\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)x^4$.

30) $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)$. Aufl.: x^3+1.

31) α) $ab\cdot(pq):(ab):(pq):y$;
β) $(a+b)(c+d):(a+b):(c+d)$.

32) Warum ist $a\cdot b=(a:m)\cdot(b\cdot m)$? Wie heißt dieser Satz in Worten? (Vgl. § 8, Nr. 23.)

33) α) $p:(p:q)$; β) $(a+b):[(a+b):(c+d)]$.

34) α) $(a+b):\frac{a+b}{a-b}$; β) $m-(p+q):\frac{p+q}{m-n}$.

Aufl.: α) $a-b$; β) n.

§ 18.

I. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$. II. $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$. (Vgl. § 10, Nr. 16 und § 12, Nr. 22.)

1) Wann bleibt ein Quotient ungeändert?

Folgende Quotienten zu vereinfachen:

2) α) $36 : 63$; β) $12a : 36$; γ) $\frac{ab}{ac}$;

δ) $[4a(b-c)] : [d \cdot (b-c)]$; ε) $\frac{x}{xy}$; ζ) $\frac{x}{x^2}$; η) $\frac{x^4}{x^7}$.

3) α) $\frac{15abcd}{60abmc}$; β) $\frac{44qpn}{99mpn}$; γ) $\frac{(15m^2n^2p)(7p^2n)}{(14p^3)(5m^2q)}$.

4) α) $\frac{6m(n-o+p)}{18q(n-o+p)}$; β) $\frac{24(x-y)(z-t)}{36(z+t)(x-y)}$.

5) α) $\frac{6x-6y-6z}{24x-24y-24z}$ *); β) $\frac{20a^5b^2-24a^2b^6}{28a^7b^2-32a^2b^8}$.

6) $\frac{21m^3n^2p^2-15m^2n^3p^2+9m^2n^2p^3}{18m^4n^2p^2+24m^2n^4p^2-6m^2n^2p^4}$.

7) α) $\frac{18a^4-12a^2b^2}{36a^2b^2-24b^4}$; β) $\frac{7x^2y^4-42x^2y^2p^2z^2}{70p^2z^4-42x^2y^2p^2z^2}$.

8) $\frac{21xz-27yz-28px+36py}{35xz-45yz+56px-72py}$; $\frac{10ac-15bc+12ad-18bd}{(2a-3b)^2}$.

9) α) $\frac{8 \cdot 6 \cdot 15}{25 \cdot 9 \cdot 16}$; β) $\frac{91 \cdot 36}{28 \cdot 117}$; γ) $\frac{18 \cdot 35 \cdot 26 \cdot 111}{39 \cdot 27 \cdot 42 \cdot 5}$.

10) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ für α) $n = 9$, β) $n = 13$, γ) $n = 15$ und δ) $n = 19$ zu berechnen.

11) Wie groß wird der Divisor des Quotienten $\frac{11}{17}$, wenn der Dividend 39, 117, 143, 169 oder 221 wird, und der Wert des Quotienten unverändert bleibt?

12) Den Quotienten $\frac{a}{b}$ in einen anderen ihm gleichen zu verwandeln, α) dessen Dividend $6a$, oder $7abc$, oder $ab+ac$ ist; β) dessen Divisor bx oder b^2a^2 ist.

---

*) Man vereinige in den Beispielen 5—8 im Divisor und Dividenden die Produkte, welche mit gleichen Faktoren behaftet sind.

13) Den Quotienten $\frac{25}{27}$ in einen anderen ihm gleichen zu verwandeln, dessen Divisor 459, oder 729, oder 999, oder 1269 ist.

14) Die Quotienten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{17}{45}$, $\frac{53}{72}$ in Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Divisor 360 zu verwandeln.

15) $\frac{5a^2b^2}{3cd}$ in einen Quotienten zu verwandeln, dessen Divisor $27b^2cd$, oder $24pcdq$, oder $36a^2b^2c^2d^2$, oder $66cd(a+b)$ ist.

16) Ebenso $(3a-5b):(6c)$ in einen Quotienten, dessen Divisor $30abc$, oder $42c^2de$, oder $6c(3a+5b)$ ist.

17) Wenn $(5xy):(7pqrs) = z:(35pqrst)$ ist, wie groß ist z?

18) 25 in Quotienten zu verwandeln, deren Divisoren 13, 15, 17, 19 oder 21 sind.

19) $\alpha)$ $\dfrac{a - \dfrac{b+c}{m}}{d - \dfrac{e-n}{m}}$; $\beta)$ $\dfrac{3 - \dfrac{5a-4}{7}}{1 - \dfrac{a+2}{7}}$ zu vereinfachen.

§ 19.

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}. \qquad \text{(Vgl. § 14.)}$$

1) Wie wird eine Summe, wie eine Differenz durch eine Zahl dividiert?

2) Wie werden zwei Quotienten von gleichem Divisor zu einander addiert, wie voneinander subtrahiert?

Auszuführen:

3) $\alpha)$ $\frac{7a + 7b + 7c}{7}$; $\beta)$ $\frac{13mn + 13mp - 13mq + 13m}{13m}$.

4) $\alpha)$ $\frac{p+q}{q}$; $\beta)$ $\frac{24a + 17b}{17b}$; $\gamma)$ $\frac{6ab - 3ac - 24ad}{3a}$.

5) $[11(a+b) + 23x(a+b) - 19y(a+b)] : [a+b]$.

6) $\alpha)$ $\frac{a+b}{ab}$; $\beta)$ $\frac{ay+bx}{xy}$; $\gamma)$ $\frac{ab+ac+bc}{abc}$;

$\delta)$ $[5(a-b) + 9(a+b) - 90(a^2-b^2)] : [45(a+b)(a-b)]$.

7) $[n(a-b) - 2(m+n)(a+b) - (a+b)] : [a+b]$.

8) $a - \frac{7b+7c}{7}$. Aufl.: $a-(b+c) = a - b - c$.

9) $a - \frac{19m \cdot n - 38m^2 + 19m \cdot a}{19m}$. Aufl.: $2m - n$.

10) $4x - \frac{(2x-7y)\cdot p - 2(5x-8y)\cdot p + 3(4x-3y)\cdot p}{p}$. Aufl.: 0.

11) Dividiere ich 40 503 146 durch 7198, so erhalte ich 5627. Wieviel erhalte ich, wenn der Dividend sich um 71 980 vergrößert?

12) 526 926 439 416 : 897 = 587 431 928. Wie groß ist
527 823 439 416 : 897?

13) 3 858 094 119 : 48 639 = 79 321. Wie groß ist
3 856 294 476 : 48 639?

Zu vereinigen:

14) α) $\frac{88}{37} + \frac{87}{37} - \frac{85}{37} + \frac{150}{37} - \frac{11}{37}$; β) $\frac{a}{x} - \frac{b}{x}$.

15) α) $\frac{7a}{17} + \frac{10a}{17}$; β) $\frac{6a}{10} + \frac{17a}{10} - \frac{2a}{10} - \frac{a}{10}$; γ) $\frac{a-b}{c} + \frac{b}{c}$.

16) $\frac{25a-36b}{a-b} + \frac{13a-5b}{a-b} + \frac{a+2b}{a-b}$. Aufl.: 39.

17) $\frac{x-n}{x+y+z} + \frac{y-z}{x+y+z} + \frac{2z+n}{x+y+z}$. Aufl.: 1.

18) $\frac{5x-8y-9z}{x-y+z} + \frac{4x+9y-3z}{x-y+z} + \frac{15z-6x-4y}{x-y+z}$. Aufl.: 3.

19) α) $\frac{a}{5} - \frac{b+c}{5}$; β) $\frac{a}{6} - \frac{b-c}{6}$;

γ) $\frac{a}{7} - \frac{b-c}{7} + \frac{d-a}{7} - \frac{c+d-8b}{7}$; δ) $\frac{a}{13} - \frac{a-13b}{13}$.

Aufl.: α) $\frac{a-(b+c)}{5} = \frac{a-b-c}{5}$; β) $\frac{a-b+c}{6}$; γ) b; δ) b.

20) $\frac{7a-9b}{3a+2b} - \frac{5a-7b}{3a+2b} + \frac{a}{3a+2b}$. Aufl.: $\frac{3a-2b}{3a+2b}$.

21) $\frac{13a-29b}{5(a-b)} - \frac{7b-21a}{5(a-b)} - \frac{9b-11a}{5(a-b)}$. Aufl.: 9.

22) α) $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$; β) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

In folgenden Ausdrücken die Quotienten mit gleichen Divisoren zu vereinigen:

23) $a - \frac{b}{9} - \frac{c}{9}$. Aufl.: $a - \frac{b+c}{9}$.

24) $m - \frac{n}{4} + \frac{p}{4}$ Aufl.: $m - \frac{n-p}{4}$ oder $m + \frac{p-n}{4}$.

25) $a-\frac{b}{x}-\frac{c}{x}+\frac{d}{x}$. 26) $3a-\frac{5m}{7n}-\frac{9m}{7n}$.

27) α) $14b-\frac{4xy}{3z}-\frac{7xy}{3z}-\frac{8xy}{3z}$; β) $a-\frac{5m}{x}+\frac{7m}{x}$.

28) $\frac{20a}{7b}-\frac{6a}{7b}-\frac{26m}{9n}+\frac{8m}{9n}-\frac{13a-7b}{5b}+\frac{8a-7b}{5b}$.

29) $\frac{3a-6b}{a+b}-\frac{5a-6b}{a-b}-\frac{4a-5b}{a+b}+\frac{7a-8b}{a-b}$. Aufl.: 1.

Folgende ungleichnamige Quotienten zu vereinigen:

30) α) $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$. Aufl.: $\frac{ps+rq}{qs}$; β) $\frac{x}{y}\pm\frac{u}{z}$; γ) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

31) α) $\frac{m}{xy}-\frac{n}{yz}$. Aufl.: $\frac{mz-nx}{xyz}$; β) $\frac{p}{y^2z}+\frac{q}{yz^2}$.

32) α) $\frac{m}{ab}+\frac{n}{b}$; β) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}$; γ) $\frac{m}{x^3}+\frac{n}{x^2}-\frac{p}{x}$.

33) α) $\frac{x}{y}-\frac{z}{t}+\frac{u}{v}$; β) $\frac{a}{b}-\frac{a+b}{a-b}$; γ) $\frac{m}{a-b}-\frac{a-b}{m}$;

δ) $\frac{a}{xy}+\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}$; ε) $\frac{x^2}{yz^2}-\frac{y^2}{x^2z}+\frac{z^2}{y^2x}$.

34) α) $\frac{6a-7b}{3a-2b}-\frac{5a}{9b}$; β) $\frac{2x}{11y}-\frac{3x-8y}{7x-5y}$; γ) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$.

35) α) $a\pm\frac{b}{c}$. Aufl.: $\frac{ac\pm b}{c}$; β) $x+\frac{1}{x}$; γ) $y+\frac{x-y}{2}$;

δ) $x-\frac{x+y}{2}$; ε) $x-\frac{x-y}{2}$; ζ) $a-b-\frac{a-b-c}{2}$.

36) α) $6a+\frac{3b}{7a}$; β) $25(a-b)+\frac{17a}{3b}-\frac{13b}{5a}$.

37) α) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-1$; β) $\frac{(a-b)^2}{4ab}+1$. 38) $\frac{a^2+b^2}{a+b}-(a-b)$.

39) $\frac{9m}{8b}+\frac{7n}{36b}+\frac{11m}{28b}-\frac{7(m+n)}{4b}+\frac{117m}{252b}$.

40) α) $\frac{m}{np}-\frac{a-b}{p^2}-\frac{c-d}{n^2m}$; β) $\frac{4x}{7p^2yq}-\frac{5x}{9py^2q^2}-\frac{11p}{63qy^3}$.

41) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$. Aufl.: 1.

42) $\frac{3m}{7p^2qr^2}+\frac{11n}{3p^3rqs^2}+\frac{14n}{9pq^2r}-\frac{7q}{5r^2p}$.

43) $\frac{x^2}{3y^2}+\frac{x^2y^2}{3y^4-x^4}+\frac{x^6}{3y^2(3y^4-x^4)}$.

44) $\frac{x}{y}+\frac{2x^2+y^2}{xy}+\frac{3xy^2-3x^3-y^3}{x^2y}-\frac{4xy^3-2x^2y^2-y^4}{x^2y^2}$.
Aufl.: 2.

45) $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-x+x^2}{1+x^2}-\frac{1+x+x^2}{1-x^2}-1$.

46) $\frac{4a-3b}{2a-11b}-\frac{6a+22b}{6a-33b}-\frac{1}{2a-11b}+1$.

47) α) $\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}$; β) $\frac{3y^2-2}{7y^2-5}+\frac{7y^2+3}{4y^2-1}$.

48) $\frac{5y^2-7}{9y^2-1}+\frac{3y^2-2}{4y^2+1}-\frac{7y^2-1}{5y^2+2}$.

49) $\frac{3x^2-2x+1}{5x^2-7x+9}+\frac{2x^2-3x+2}{4x^2-11x-3}$.

50) $\frac{x^2}{xy+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{y^2}{x^2+xy}$.

51) $\frac{x^3-2x^2+3x-4}{x^3+2x^2+3x+4}-\frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^3-2x^2+3x+4}$.

52) $\frac{5x^4-7x^3-9x^2+11}{2x^4-3x^3+2x^2-1}-\frac{x-1}{x+3}$.

53) $\frac{x^2+x+1}{(1-2x)^3}-\frac{x+1}{(1-2x)^2}+\frac{1}{1-2x}$.

54) Bleibt der Quotient $\frac{a}{b}$ unverändert, wenn einerlei Zahl m zum Dividenden und zum Divisor addiert oder von denselben subtrahiert wird?

(Fernere Beispiele über die Vereinigung ungleichnamiger Quotienten finden sich im § 27, Nr. 29 u. f.)

§ 20.

Gleichheit eines Quotienten $a : b$ und eines Bruches $\frac{a}{b}$.

1) Wenn 19 ℳ unter 21, 22, 23 Leute zu gleichen Teilen verteilt werden, wieviel erhält jeder in Bruchteilen einer Mark?

2) Wenn ein Stab von 9 Decimeter Länge in 10 gleiche Teile

geteilt wird, wie lang ist jeder Teil in Bruchteilen eines Decimeters?

3) Wie kann ich auf einer Holzlatte, welche nur zwei Meter Länge hat, ein Siebzehntel von 32 *m* mit Hilfe des Zirkels bestimmen?

4) Wem ist das Produkt aus einem Bruche und dem Nenner desselben gleich? Wem ist der Quotient des Zählers eines Bruches durch den Bruch selbst gleich? Wann bleibt ein Bruch ungeändert? Wie werden Brüche zu einander addiert oder voneinander subtrahiert?

5) Wenn eine Linie von 11 *cm* Länge in 12 gleiche Teile geteilt wird, wie groß ist der Unterschied zwischen einem solchen Teile und einem Centimeter in Bruchteilen eines Centimeters?

6) Wie groß ist der Unterschied zwischen einem Centimeter und einem Zehntel von 9 *cm*, oder einem Zehntel von 11 *cm**)? Wie groß ist der Unterschied zwischen einem Millimeter und dem n-ten Teile des $n + 1$- oder $n - 1$-fachen des Millimeters?

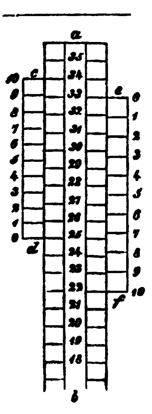
7) Wie kann man $\frac{1}{60}$ einer Linie, die sich ihrer Kleinheit wegen nicht bequem mit dem Zirkel einteilen läßt, abmessen?

Aufl.: Man nehme das Siebzehnfache der kleinen Linie und teile dasselbe in 60 gleiche Teile.

§ 21.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b. \\ \text{II.} & (a : m) : n = (a : n) : m. \end{array}\right\} \text{(Vgl. § 9.)}$$

1) Wie wird ein Produkt durch eine Zahl dividiert? (Formel I.)
2) Wie wird ein Quotient mit einer Zahl multipliziert? (I.)
3) Wie wird ein Quotient durch eine Zahl dividiert? (II.)



*) Anwendung hiervon macht man bei dem Nonius oder Vernier. Derselbe ist eine Vorrichtung, um von einem geradlinigen Maßstabe oder einem eingeteilten Bogen (Limbus) kleinere Teile, als die darauf verzeichnete Einteilung besitzt, ablesen zu können. Ist z. B. auf dem Hauptmaßstabe *ab* eine Einteilung in Centimeter vorhanden, und man wollte mittels eines Schiebers noch Millimeter davon abnehmen, so trage man die Länge von 9 *cm* auf den Schieber *cd* auf und teile sie in 10 gleiche Teile, dann muß jeder Teil des Schiebers um 1 *mm* kleiner sein, als ein Centimeter des Maßstabes. Ganz dasselbe erreicht man, wenn man 11 *cm* auf den Schieber *ef* aufträgt und diese Länge wieder in 10 gleiche Teile teilt. — Der Erfinder dieser Vorrichtung ist nicht der Portugiese Nunez oder Nonius (1492—1577), sondern Vernier (La construction etc. Bruxelles 1631).

4) Wie wird ein Bruch mit einer Zahl multipliziert oder dividiert?

5) Das Produkt 24×17 soll durch 12 dividiert werden.

6) Das Produkt 45×81 durch 9 zu dividieren.

7) Welches ist der 25ste Teil von 13 *M* in Pfennigen?

8) Für 25 *Frc* erhalte ich 7 *kg*. Wieviel Gramm für 1 *Frc*?

9) Für 20 *Fl* erhalte ich 13 *kg*. Wieviel Gramm für einen Gulden?

10) 700 durch 25 zu dividieren. (Anleitung: $700 = 100 \cdot 7$.)

11) 900, 1300, 1700, 3300, 1275 durch 25 zu dividieren.

12) Ebenso 7000, 19000, 23000, 19125, 21375 durch 125.

13) Auszuführen: $\alpha)\ \frac{(7a)b}{7}$; $\beta)\ \frac{(5pq)(rst)}{rs}$; $\gamma)\ \frac{(15pq)(25qr)}{5q}$

14) Ebenso: $\alpha)\ \frac{(14am - 21an)49a}{7a}$; $\beta)\ \frac{(48pqr)(16ptq)(24pnq)}{8pq}$

15) $\frac{3}{37}$ mit $\alpha)$ 3, $\beta)$ 5, $\gamma)$ 7, $\delta)$ 111 zu multiplizieren,

16) $\alpha)\ \frac{7a}{5b} \cdot 6a$; $\beta)\ \frac{4m^2}{5n^3} \cdot 93m$; $\gamma)\ \frac{7p^2qr^2}{11xy} \cdot 24p^2q^2r$.

17) $\left(\frac{8}{27}\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{3}\frac{x^2z}{y^2u} + \frac{3}{8}\frac{xz^2}{yu^2} + \frac{27}{64}\frac{z^3}{u^3}\right)\left(8xu - 9yz\right)$.

18) $\left[1\frac{2}{3}\frac{y^3}{z^3} + 4\frac{5}{6}\frac{y^2}{z^2} + 7\frac{8}{9}\frac{y}{z} + 9\frac{7}{8}\right]\left[6y^2 - 5yz + 4z^2\right]$.

19) $\alpha)\ \frac{a}{b \cdot n} \cdot n$. Aufl.: $\frac{a}{b}$; $\beta)\ \frac{p}{qrs} \cdot rs$.

20) $\alpha)\ \frac{5b^2}{9a^2} \cdot 3a^2$; $\beta)\ \frac{5mn}{42abd} \cdot 7ab$; $\gamma)\ \frac{9nx^2m}{128y^2p^2} \cdot 32x^2y^2$.

21) $\alpha)\ \frac{4pq}{(18m^2pn)(81nxm^2)}$ mit $9m^2n$.

$\beta)\ \frac{pqr}{(a^2b^3c^5)(a^4b^3c^6)(a^7b^3c^4)}$ mit $a^2b^2c^4$ zu multiplizieren.

22) m *kg* kosten n *M*; wieviel p *kg*?

Aufl.: 1 *kg* kostet $\frac{n}{m}$, p *kg* kosten $\frac{n}{m} \cdot p = \frac{np}{m}$ *M*.

23) Ein Bote legt in 7 Stunden [n St.] 20 *km* [q *km*] zurück. Wieviel legt er in 9 Stunden [r St.] zurück?

24) $\left(\frac{2a^3}{3b^3} + \frac{5a^2}{6b^2} + \frac{7a}{9b}\right)3b$.

25) Wieviel Pfennige erhält man, wenn man 23 M erst durch 19, dann durch 100 dividiert?

26) $\frac{12}{25}$ durch α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 6 zu dividieren; ebenso $\frac{315}{211}$ durch α) 5, β) 7, γ) 9, δ) 35, ε) 45, ζ) 63.

27) α) $(33abc):(7pq)$ durch $11ab$; β) $(25m^2n):(16px)$ durch $5mn$ zu dividieren.

28) α) $\frac{42p(m-n)}{ab}:[7(m-n)]$; β) $\frac{25(a^2-b^2)}{7(a+b)}:[25(a^2-b^2)]$.

29) α) $\frac{6am-6an}{5pq}:(6a)$; β) $\frac{45at-25aq+35as}{14mn}:(5a)$.

30) $[16xz-8x(y-z)]:[5mn]:[8x]$.

§ 22.

$(a:b):c = a:(b\cdot c)$. (Vgl. § 10.)

Satz: Es ist einerlei, ob eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen nacheinander, oder durch das Produkt der Zahlen dividiert wird.

1) Wie wird ein Quotient oder ein Bruch durch eine Zahl dividiert?

2) Wie wird eine Zahl durch ein Produkt dividiert?

Auszuführen:

3) α) $(5mn):[7pq]:[4rs]$; β) $(4a-b):(3a+b):[7a]$.

4) α) $(2x-z):(5y-2z):(4z)$; β) $27m^2n^2p^2:[25rst]:[9str]$.

5) $(45a^2-15b^2):(7m+n):(15ab)$.

6) $24a^2b^2c^2:[37m^2n^2y^2]:(14m^2y^2):(5n^2y^7)$.

7) Ein Kilogramm kostet $\frac{3}{7}$ M. Wieviel kostet ein Gramm in Bruchteilen einer Mark?

8) Wieviel sind $\frac{13}{31}$, wieviel $\frac{7}{13}$ ₰ in Bruchteilen einer Mark? Wieviel sind $\frac{17}{23}$ Nkr in Bruchteilen eines Guldens?

9) Wenn man 37 000 erst durch 125, dann durch 8 teilt, was kommt heraus?

10) Auszuführen: α) $6200:25:4$; β) $1\,920\,000:16:625$.

11) Wie groß ist α) der 4te Teil des 25sten Teiles von 23 M? β) der 5te Teil des 20sten Teiles von 19 Fl?

12) Zu dividieren: a^7 durch a^3. Aufl.: $a^7:a^3 = a^7:a:a:a = a^4$.

13) α) $a^{13}:a^6$; β) $a^{21}:a^{13}$; γ) $a^{19}:a^{14}$; δ) $x^{15}:x^5$.

14) α) $[m^{14}n^{13}]:[m^{11}n^7]$; β) $[p^5x^6z^7u^9]:[p^4x^5z^6u^8]$.

15) $27a^7b^2c^2-18a^8b^3c^5$ durch $9a^6b^2c$ zu dividieren.

16) Auszuführen: α) $(24a^3b^2c-16ab^5c^4):[8a^2b^3c^2]$;
β) $[36a^4b^2-4a^2b^2(3a^2-b)]:[4a^2b^2]$.

17) Drei gezahnte Räder stehen in solcher Verbindung miteinander, daß, wenn das eine sich bewegt, die beiden anderen sich ebenfalls bewegen. Das zweite bewegt sich 5mal so langsam, als das erste, und das dritte 12mal so langsam, als das zweite. Den wievielten Teil eines Umlaufes macht das dritte Rad, wenn das erste Rad sich 7mal umdreht?

18) Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt 5, 12 und 7 die allgemeinen Zeichen p, q und n gesetzt werden?

19) Wenn die Geschwindigkeit des Sekundenzeigers einer Sekundenuhr gleich 1 [gleich c] gesetzt wird, wie groß ist die Geschwindigkeit des Stundenzeigers?

§ 23.

I. $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}$. II. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$. (Vgl. § 11.)

1) Wie wird eine Zahl mit einem Quotienten, wie mit einem Bruche multipliziert?

2) Wie wird ein Quotient mit einem Quotienten, wie ein Bruch mit einem Bruche multipliziert?

3) 29 mit dem Quotienten 15 : 23 zu multiplizieren.

4) Ebenso: α) $13m^2n^2$ mit $\frac{7p^2m^2}{8n^5}$; β) $45p^2q^2$ mit $\frac{7x^2y^2}{15p^4q^9}$.

5) Ebenso: α) $3a$ mit $\frac{6a - 7b}{3a + 2b}$; β) $9x^7y^{11}$ mit $\frac{4p^2m^2}{7x^2y^2}$.

6) Ebenso: $5(7a - 3b)$ mit $5m^2n^2 : (7a - 3b)$.

7) Wieviel Mark machen α) 149, β) 207, γ) n Frc à $\frac{4}{5}$ M?

8) $a^3b^2 + a^2b^3$ mit $\frac{a^5}{b^7} - \frac{b^7}{a^5}$ zu multiplizieren.

9) Ebenso: $mp - n$ mit $\frac{m^2p^2}{n^2} + \frac{mp}{n} + 1$.

10) α) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8}$; β) $\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{15}$; γ) $\frac{25}{28} \cdot \frac{17}{33}$; δ) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}$.

11) α) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$; β) $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}$; γ) $\frac{x}{n} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{n}{z}$.

12) α) $8\frac{3}{4} \cdot 16\frac{7}{8}$; β) $39\frac{5}{12} \cdot 48\frac{7}{15}$. (Nach § 16, Formel I.)

13) α) $12\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{4}$; β) $7\frac{2}{3} \cdot 9\frac{3}{14}$; γ) $18\frac{1}{6} \cdot 9\frac{5}{12}$.

14) α) $14\frac{12}{13} \cdot 12\frac{14}{15}$; β) $31\frac{25}{27} \cdot 53\frac{29}{33}$. (Nach § 16, Formel IV.)

15) α) $\frac{ma^2b^2}{ncd^2} \cdot \frac{pa^4b^5}{qc^4d^3}$; β) $\frac{6p^2q^2r^2}{7mx^5y^6} \cdot \frac{3q^7r^6}{5mx^6y^7}$; γ) $\frac{12x^2}{5y^2} \cdot \frac{10xy}{9z^2}$.

16) α) $\frac{5m^2n^2}{7p^2q^2} \cdot \frac{3m^2 - 5n^2 - 7mn}{6p^2 + 9q^2 - 11pq}$; β) $\frac{3acd}{4pqm} \cdot \frac{16pm}{27ca}$.

17) α) $\frac{81m^4n^7q^9}{49p^6q^{11}z^{13}} \cdot \frac{7m^9p^7r}{9n^9q^{11}}$; β) $\frac{a-b}{c} \cdot \frac{d}{a-b}$.

18) $\frac{5a^3b^2}{7m^2n^4} \cdot \frac{14a^9m^7}{25n^5b^{11}} \cdot \frac{5n^{11}m^6}{6a^{15}b^{13}} \cdot \frac{6am}{b^3n}$.

19) $\frac{13(a-b)}{7(p-q)} \cdot \frac{5(r-s)}{39(a-b)} \cdot \frac{21(p-q)}{55(r-s)}$.

20) Jemand gebraucht in 11 Tagen 17 *kg* Ware, von der 13 *kg* 16 *M* kosten. Ein anderer gebraucht in 13 Tagen 16 *kg* Ware, von der 11 *kg* 17 *M* kosten. Wer von beiden giebt täglich mehr aus?

21) Ein Bote legt in 7 Stunden 15 *km* zurück und erhält für je 11 *km* 1 *Fl* Botengeld. Ein anderer legt in 11 Stunden 25 *km* zurück und erhält für je 35 *km* 3 *Fl* Botengeld. Welcher von beiden Boten verdient stündlich am meisten?

22) Drei gezahnte Räder stehen so miteinander in Verbindung, daß, wenn das erste sich bewegt, die beiden anderen sich mit bewegen. Dreht das erste sich 9mal um, so dreht das zweite sich 17mal um; dreht das zweite sich 11mal um, so dreht das dritte sich nur 5mal um. Wieviel Mal wird das dritte Rad sich umdrehen, wenn das erste sich 1mal umdreht?

23) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für 9, 17, 11 und 5 die allgemeinen Zeichen p, q, r und s gesetzt werden?

24) 19 *kg* kosten 11 *M* à $\frac{5}{47}$ Dukaten; wieviel Dukaten kostet 1 *kg*?

25) Ein Kilogramm kostet 19 *ʎ* (à $\frac{5}{4}$ *Cent*); wieviel kosten $\frac{3}{7}$ *kg* in Centimes?

Auszuführen:

26) $\frac{11mno}{13pqr} \cdot \left(\frac{3}{4}\frac{pr}{mo} + \frac{3}{7}nq - \frac{5}{6}\frac{rq}{no}\right)$.

27) $\frac{15pq}{11rs} - \frac{3r^2s}{4p^2}\left(\frac{7p^2}{11rs^2} + \frac{20p^3q}{11r^3s^2}\right)$.

28) $\frac{2}{7c} - \frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{7c} - a - b\right)$. Aufl.: 2.

29) $1 - \frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a} + \frac{a-b}{a+b}\right)$.

30) $1 - \frac{2401}{14641}\frac{x^4}{y^4} - \left(1 - \frac{7}{11}\frac{x}{y}\right)\left(\frac{7}{11}\frac{x}{y} + \frac{49}{121}\frac{x^2}{y^2} + \frac{343}{1331}\frac{x^3}{y^3}\right).$

31) $\left(1\frac{2}{3}\frac{a}{b} - 4\frac{5}{6}\frac{b}{a}\right)\left(7\frac{8}{9}\frac{b}{a} - 10\frac{11}{12}\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{7}{9}\frac{a}{b} + \frac{5}{12}\frac{b}{a}\right)\left(\frac{7}{9}\frac{a}{b} - \frac{5}{12}\frac{b}{a}\right).$

32) $\left(\frac{1}{16}\frac{x^4}{z^8} + \frac{1}{12}\frac{x^3y}{z^6} + \frac{1}{9}\frac{x^2y^2}{z^4} + \frac{4}{27}\frac{xy^3}{z^2} + \frac{16}{81}y^4\right)\left(\frac{1}{2}\frac{x}{z^2} - \frac{2}{3}y\right).$

33) $\left(\frac{1}{3}\frac{ab}{c^2} - \frac{2}{5}\frac{bc}{a^2}\right)\left(\frac{5}{7}\frac{ac}{b^2} - \frac{7}{9}\frac{ab}{c^2}\right)\left(\frac{3}{5}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{3}\frac{ab}{c^2}\right).$

34) Wie lassen sich die Quotienten $\frac{16a^2b^2}{35cm^2}$, $\frac{5(a+b)^2c}{n}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{n}$ als Resultate der Multiplikationen zweier Quotienten betrachten?

35) Warum gelten die in § 15 für ganze Zahlen aufgestellten Sätze auch für Bruchzahlen?

§ 24.

$$\text{I. } a : \frac{b}{c} = (a:b)\cdot c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}. \quad \text{(Vgl. § 12.)}$$

$$\text{II. } \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m:p}{n:q} = \frac{mq}{np} = \frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}.$$

1) Wie wird eine ganze Zahl durch einen Quotienten oder Bruch dividiert? Wie wird ein Quotient oder Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert? (Umkehrung der Formel I.)

2) Wie wird ein Quotient durch einen Quotienten, wie ein Bruch durch einen Bruch dividiert?

3) α) $m : \frac{p}{q}$; β) $a : \frac{1}{b}$; γ) $abc : \frac{ab}{cd}$; δ) $1 : \frac{m}{n}$.

4) α) $(a+b)c : [(a+b):d]$; β) $7a : [(3m-n):(6a+2b)]$.

5) α) $3a^2b^2 : \frac{12a^4b^3}{5mn^2}$; β) $24a^{11}b^{13}c^{14} : \frac{8cd}{9a^5b^6c^2}$.

6) α) $(49x^2y^3 - 28x^4y^3) : \frac{7x^2y^2}{11pq^2}$; β) $(p^2+q^2) : \frac{pq}{r}$.

7) $(x^2a^2y) : [(x^2a^2y^2):(p^2q^2r^2)]$; $9x^4y^5z^6 : [(27x^6y^9z^7):(4m^3n^2o^2)]$.

8) α) $5a : \frac{1}{6a+2b} : \frac{25a}{19d}$ β) $1 : \frac{1}{x} : \frac{1}{xx}$.

9) α) $\frac{33}{35} : \frac{7}{11}$; β) $\frac{19}{56} : \frac{25}{37}$; γ) $\frac{14}{39} : \frac{19}{58}$; δ) $1 : \frac{1}{9}$; ε) $1 : \frac{25}{36}$.

10) Ein Meter kostet $\frac{14}{19}$ *M*, wieviel Meter erhält man für $\frac{12}{57}$ *M*?

11) Ein Kilogramm kostet $\frac{36}{77}$ Fl. Wieviel erhält man für $\frac{63}{121}$ Fl?

12) Ein alter preußischer Fuß ist gleich $\frac{16}{51}$ *m*. Wie groß ist ein Meter in preußischen Fuß?

13) Ein Faß enthält $\frac{2}{7}$ *hl*, ein zweites $\frac{2}{35}$, ein drittes $\frac{3}{28}$, ein viertes $\frac{7}{14}$ *hl*. Wieviel Mal kann man das angefüllte zweite, dritte, vierte Faß in das leere erste Faß ausgießen?

14) Ein Körper legt in einer Sekunde $1\frac{3}{8}$ *m*, ein zweiter in derselben Zeit $\frac{5}{21}$ *m* zurück. Wieviel Mal so geschwind, als der zweite, bewegt sich der erste Körper?

15) α) $\frac{7ab}{3mn} : \frac{5pq}{11xyz}$; β) $\frac{14a^2b^3c}{39d^2e^5g^6} : \frac{35d^7e^4g^8}{9a^4b^5c^2}$.

16) α) $\frac{25p^4q^5r^6}{49x^4y^5z^6} : \frac{30p^7qr^8}{77xy^7z^2}$; β) $\frac{45(x-y)}{32(z+y)} : \frac{27(x-y)}{128b(z+y)}$.

17) α) $\frac{x^3}{y^3z^3} : \frac{y^2}{z^2} : \frac{x^2}{y^2}$; β) $\frac{25ab}{4mn} : \frac{5a}{2m} : \frac{6b^2}{7n} : \frac{3}{14b}$.

18) $\frac{24}{35}$ durch α) $\frac{6}{7}$, β) $\frac{3}{5}$, γ) $1\frac{1}{7}$, δ) $2\frac{2}{5}$ zu dividieren.

19) α) $\frac{22abc}{39pqr} : \frac{11ab}{3pr}$; β) $\frac{520x^2y^2p^2}{531m^4n^5q^6} : \frac{13xy^2p}{9mn^5q}$.

20) $[45(a+b)x : [64(x+y)z]] : [5(a+b) : [16(x+y)]]$.

21) $\frac{63a^4b^3 + 27a^3b^4 - 9a^2b^2}{14m^3n^5 - 21m^4n^4 - 35m^2n^2} : \frac{9a^2b^2}{7m^2n^2}$.

22) $\frac{3a(5m+7n) - (5m+7n)2b}{3a(9n-3b) - 2b(9n-3b)} : \frac{5m+7n}{9n-3b}$.

23) $\frac{7a(3m+7n) - (5a+2b)(3m+7n)}{(2a-2b)(7p+6q)} : \frac{3m+7n}{7p+6q}$.

24) $\frac{3ab}{cd} : \left(\frac{9a^2}{35c^2} : \frac{2d^2}{5b} : \frac{10bcd}{a^2}\right)$.

25) $\frac{6p^2q^2}{m+n} : \left(\frac{3(m-n)p}{7(r+s)} : \left\{\frac{4(r-s)}{21pq^2} : \frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right\}\right)$. Aufl.: $10\frac{2}{3}$.

26) $\frac{a^2b^2}{c} : \left(\frac{a^2c^2}{b} : \left\{\frac{b^2c^2}{a} \cdot \frac{ac}{b^2}\right\} : \left\{\frac{ab}{c^2} : \frac{bc}{a^2}\right\}\right)$. Aufl.: $\frac{a^3b^3}{c^3}$.

§ 25.

Division durch einen mehrgliedrigen Ausdruck.

$$\text{I.}\quad \frac{mx + my + mz}{x + y + z} = m.$$

$$\text{II.}\quad \frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B} = C - \frac{BC - A}{B}.$$

1) α) $(7a + 7b) : (a + b)$; β) $(18a - 27b) : (2a - 3b)$; γ) $(893a + 1081b) : (19a + 23b)$; δ) $(ac + bc) : (a + b)$; ε) $(mxy - nxy) : (m - n)$; ζ) $(35xz - 45yz) : (7x - 9y)$.

2) α) $(39a + 26b - 91c) : (3a + 2b - 7c)$; β) $(28x^3 - 49x^2 + 77x) : (4x^2 - 7x + 11)$; γ) $(44pm^2n^2 - 99p^2mn^2 - 143p^2m^2n) : (4mn - 9pn - 13mp)$.

3) α) $(\frac{6}{13}ad - \frac{8}{13}bd - \frac{9}{13}cd) : (\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b - \frac{3}{4}c)$;
β) $(b + b^2) : (a + ab)$; γ) $\left(x - y + \frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2}\right) : (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$;
δ) $(45x^3 - 48x^2 + 50x) : (\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{5}{6})$;
ε) $(\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{45}c^3 + \frac{1}{63}b^3) : \left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{bc} - \frac{1}{5}\frac{c^2}{ab} + \frac{1}{7}\frac{b^2}{ac}\right)$.

4) α) $\left(\frac{a^2}{cd} - \frac{ab^2}{c^2d} + \frac{ab}{d^2}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right)$;
β) $\left(\frac{3x^3y^3}{7z^4p^4} - \frac{7z}{15y} + \frac{27x^2p^3}{55z^4}\right) : \left(\frac{5x^2y^2}{7z^3p^3} - \frac{7z^2p}{9y^2x} + \frac{9p^4x}{11yz^3}\right)$.

5) α) $(mp + np + mq + nq) : (m + n)$; β) $(35 + 5x + 7z + xz) : (5 + z)$; γ) $(100mp + 10mq + 10pn + nq) : (10p + q)$; δ) $(8ac + 10ad + 12bc + 15bd) : (4c + 5d)$.

6) α) $(rt - ru + st - su) : (t - u)$; β) $182gi - 169gk - 168hi + 156hk) : (14i - 13k)$; γ) $(12pr + 6ps - 8qr - 4qs) : (24p - 16q)$.

7) α) $(rt + ru - st - su) : (t + u)$; β) $(ab + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}) : (b + \frac{1}{2})$; γ) $(15ac + 18ad - 10bc - 12bd) : (5c + 6d)$.

8) α) $(mp - mq - np + nq) : (p - q)$; β) $(xy - 2x - 3y + 6) : (y - 2)$; γ) $(77xz - 91xo - 99yz + 117yo) : (11z - 13o)$; δ) $(2ac - 3ad - 6bc + 9bd) : (\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2}b)$.

9) α) $(30ac - 15bc - 42ad + 21bd) : (5c - 7d)$;
β) $(45ac + 90ad - 32bc - 64bd) : (6c + 12d)$;
γ) $(100mp - 150mq - 135np + 202\frac{1}{2}nq) : (8\frac{1}{3}m - 11\frac{1}{4}n)$.

10) α) $(168eg - 180eh - 182fg + 195fh) : (12e - 13f)$; β) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$; γ) $(m^2 - 2mn + n^2) : (m - n)$; δ) $(42a^2 + 51ab + 15b^2) : (6a + 3b)$; ε) $(x^2 - 8x + 15) : (x - 5)$; ζ) $(x^2 + 10x - 24) : (x + 12)$; η) $(x^2 - 10x + 24) : (x - 6)$; ϑ) $(4x^2 - 4x + 1) : (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$.

11) α) $(a^2 - b^2) : (a - b)$; β) $(x^2 - y^2) : (x + y)$; γ) $(49m^2 - 121n^2) : (7m - 11n)$; δ) $(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}) : (\frac{1}{2}x + \frac{1}{3})$.

12) α) $(56x^2 - 92\frac{4}{7}y^2) : (8x + 10\frac{2}{7}y)$; β) $(6x^2 - \frac{1}{6}) : (x + \frac{1}{6})$; γ) $(12\frac{3}{5}x^2 - 17\frac{6}{7}y^2) : (21x + 25y)$; δ) $(\frac{4}{9}y^2 - \frac{9}{16}z^2) : (\frac{2}{3}y - \frac{3}{4}z)$.

13) α) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$; β) $35p^2 - 82pq - 25pr + 48q^2 + 30qr) : (5p - 6q)$; γ) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ erst durch $x - 4$, hierauf den Quotienten durch $x - 3$, und den hieraus sich ergebenden Quotienten durch $x - 2$ zu dividieren.

14) α) $(12m^2 - 51mn - 24mp + 54n^2 + 48np) : (3m - 6n)$; β) $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b)$; γ) $(8 - 12y + 6y^2 - y^3) : (2 - y)$; δ) $(x^3 - y^3) : (x - y)$; ε) $(x^3 + y^3) : (x + y)$; ζ) $(x^4 - y^4) : (x - y)$; η) $(x^4 - y^4) : (x + y)$; ϑ) $(x^5 - y^5) : (x - y)$; ι) $(x^5 + y^5) : (x + y)$. Welche Sätze folgen aus den Beispielen δ bis ι über die Teilbarkeit durch die Binome $x - y$ und $x + y$? Ist $\varkappa$) $x^3 - y^3$ auch durch $x + y$ ohne Rest teilbar? Sind ferner λ) $x^3 + y^3$ durch $x - y$, μ) $x^4 + y^4$ durch $x + y$ u. s. w. ohne Rest teilbar?

15) α) $(12x^2 + 54y^2 + 48yz - 51xy - 24xz) : (4x - 9y - 8z)$*); β) $(35a^2 - 143b^2 + 60bc + 323c^2 - 36ab - 214ac) : (7a + 11b - 19c)$; γ) $(x^2 - y^2 + 2yz - z^2) : (x + y - z)$; δ) $(x^2 - y^2 - 2yz - z^2) : (x + y + z)$; ε) $(3x^4 - 4x^3 + 1) : (x - 1)^2$.

16) α) $(4ad + 6bd + 10cd + 12be + 8ae + 20ce) : (2a + 3b + 5c)$; β) $(3x^2 - 8\frac{5}{6}xy + 6xz + 6\frac{1}{2}y^2 - 8\frac{2}{3}yz) : (2x - 3y + 4z)$; γ) $(49x^2 - 16z^2 + 21xy + 12yz) : (7x + 3y - 4z)$.

17) α) $(12aq - 36nq + 24mq - 21na + 63n^2 - 42mn) : (4q - 7n)$; β) $(p^2 - 1\frac{1}{3}pq + 1\frac{1}{15}p + \frac{4}{5}q - 1) : (\frac{1}{3}p - \frac{1}{5})$.

18) α) $(32a^2 + 45b^2 + 60c^2 + 76ab + 88ac + 104bc) : (8a + 9b + 10c)$; β) $(12m^2 + 3mn - 2m - 1\frac{1}{2}n^2 - n) : (6m + 3n)$.

19) α) $(77a^2 + 15bc + 56c^2 - 54b^2 - 133ac + 3ab) : (11a - 9b - 8c)$;
β) $(\frac{1}{10} - \frac{1}{15}y - \frac{1}{30}z + \frac{1}{18}yz - \frac{1}{24}z^2) : (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}z)$.

20) $(20a^2 + 27b^2 + 54bc - 44ad + 33bd - 51ab - 72ac) : (5a - 9b - 18c - 11d)$.

21) $(20x^4 + 32x - 51x^3 - 12x^2) : (4x^2 - 7x - 8)$**).

22) α) $(21y^4 - 17y^2 + 58y + 16 - 78y^3) : (7y^2 - 5y - 2)$; β) $(18x^4 + 38x^2 + 32 - 68x - 24x^3) : (6x - 4)$; γ) $(30x^4 - 130x^3 + 36 - 147x + 165x^2) : (60x - 180)$; δ) $(60x^5 - 85x^4 + 86x^3 - 10 + 32x - 69x^2) : (180x^2 - 120x + 60)$.

23) α) $(5x^4 - 7\frac{2}{3}x^3y + 10\frac{1}{4}x^2y^2 - 3\frac{5}{6}xy^3 + 1\frac{3}{4}y^4) : (5x^2 - 6xy + 7y^2)$; β) $(1\frac{3}{4}a^4 - 3\frac{5}{6}a^3b + 6\frac{3}{4}a^2b^2 - 4\frac{2}{3}ab^3 + 2\frac{1}{2}b^4) : (\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{2}b^2)$;

*) Man ordne den Dividenden zuerst nach den Buchstaben x, y, z.
**) Man ordne den Dividenden nach fallenden Potenzen von x.

γ) $(27x^5y^4z^4 - 30x^4y^5z^5 - 77x^3y^6z^6 + 72x^2y^7z^7 - 55xy^8z^8):$
$(3x^2y^2z^3 - xy^3z^4 - 11y^4z^5)$.

24) α) $(\frac{7}{16}a^2 - \frac{33}{160}ab + \frac{13}{48}ac + \frac{23}{16}bc - \frac{27}{40}b^2 - \frac{55}{72}c^2):$
$(\frac{7}{8}a + \frac{9}{10}b - \frac{11}{12}c)$;

β) $(8y^5 - 38y^4 + 36y^3 + 7y^2 - 20y + 6):(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{6}y + \frac{1}{8})$.

25) $(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{18}y^2 - \frac{1}{168}yz - \frac{1}{60}xy - \frac{17}{140}xz + \frac{1}{28}z^2):$
$(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z)$.

26) $(\frac{1}{12}x^5y^2 - \frac{19}{180}x^4y^3 + \frac{41}{840}x^2y^5 - \frac{37}{840}x^3y^4 + \frac{1}{56}xy^6):$
$(\frac{1}{4}x^3y - \frac{1}{6}x^2y^2 - \frac{1}{8}xy^3)$.

27) $(64m^6 - 729n^6y^{12}):(2m - 3ny^2)$.

28) $(128x^7y^7 - 2187z^7):(2xy - 3z)$.

29) $[5005x^4 - 3834xy^3 + 1485y^4 + 8067x^2y^2 - 7098x^3y]:$
$[\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{1}{7}y^2]$.

30) $(\frac{1}{16} - \frac{1}{81}x^4):(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x):(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}x^2)$*).

31) $\left(\frac{16}{625}\frac{x^{12}}{y^8} - \frac{81}{2401}\frac{y^{12}}{x^8}\right):\left(\frac{2}{5}\frac{x^3}{y^2} - \frac{3}{7}\frac{y^3}{x^2}\right):\left(\frac{4}{25}\frac{x^6}{y^4} + \frac{9}{49}\frac{y^6}{x^4}\right)$*).

32) $\frac{1}{384} - \frac{13}{30240}x - \frac{61}{18144}x^2 + \frac{1}{3240}x^3 + \frac{1}{945}x^4$ zuerst durch $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}x$, hierauf den Quotienten durch $\frac{1}{8} - \frac{1}{9}x$ und zuletzt durch $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x$ zu dividieren. Aufl.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$.

33) α) $1:(1 - x)$; β) $1:(1 + x)$ in Reihen zu entwickeln.

34) Ebenso: α) $p:(a - x)$; β) $p:(a + x)$.

35) Was wird aus den in 33) entwickelten Reihen, wenn $x = \frac{1}{2}$?

36) Was wird aus dem Resultate der Division $1:(1 + x)$, wenn $x = 7$ gesetzt wird?

37) Was wird aus dem Resultate der Division $p:(a - x)$, wenn $p = 1$, $a = 10$, $x = 1$ gesetzt wird?

38) 7853219 nach der Formel $p:(a - x)$ durch 99, durch 999, durch 9999, durch 95, durch $97\frac{1}{2}$, $98\frac{3}{4}$ und $98\frac{1}{3}$ zu dividieren. (5 Decimalstellen.)

39) 67948 nach der Formel $p:(a + x)$ durch 103, 105, 1004, $102\frac{1}{2}$ und $101\frac{1}{4}$ zu dividieren. (5 Decimalstellen.)

40) k mit $\frac{100}{104}$, ebenso mit $100:103\frac{3}{4}$ zu multiplizieren.

41) α) $1 - x + x^2$ in 1; β) $1 - 2x + x^2$ in 1 zu dividieren.
Aufl.: α) $1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - \ldots$;
β) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots$

42) 1 durch $x^2 + 2xy + y^2$ zu dividieren.

43) $[x^2 - (a + b)x + ab]:(x - a)$.

44) $x^3 - (a - b + c)x^2 + (ac - ab - bc)x + abc$ erst durch $x - a$ und hierauf den Quotienten durch $x + b$ zu dividieren.

*) Die Ordnung des Dividierens umzuändern.

45) $x^4-(b-a-c+d)x^3+(ac-ab-ad-bc+bd-cd)x^2+(abd-abc-acd+bcd)x+abcd$ erst durch $x+a$, hierauf durch $x-b$ und zuletzt durch $x+c$ zu dividieren. Antw.: $x-d$.

46) $[adx^4-(bd+ae)x^3+(af+be+cd)x^2-(bf+ce)x+cf]:[ax^2-bx+c]$.

§ 26.

Null und negative Zahlen.

Eine **negative Zahl** ist das Resultat einer Subtraktion, bei welcher der Minuend kleiner ist, als der Subtrahend. Ist $b < c$ und $d < e$, so gelten folgende Sätze:

I. $a+(b-c)=a-(c-b)$; $a-(b-c)=a+(c-b)$.

II. $a+d(b-c)=a-d(c-b)$; $a-d(b-c)=a+d(c-b)$.

III. $a\pm(d-e)(b-c)=a\pm(e-d)(c-b)$.

IV. $a+\frac{b-c}{d}=a-\frac{c-b}{d}$; $a-\frac{b-c}{d}=a+\frac{c-b}{d}$.

V. $a+\frac{d}{b-c}=a-\frac{d}{c-b}$; $a-\frac{d}{b-c}=a+\frac{d}{c-b}$.

VI. $a\pm\frac{d-e}{b-c}=a\pm\frac{e-d}{c-b}$.

1) Wie entsteht Null? Ändert sich eine Zahl, wenn zu derselben Null addiert oder von derselben Null subtrahiert wird?

2) $a+[b-(c+d)]-(p-q)$ für $a=20$, $b=7$, $c=4$, $d=3$, $p=q$ zu berechnen.

3) Was wird aus einem Produkte, wenn ein Faktor $=0$ ist?

4) Zu berechnen: α) $4+0\cdot4-7\cdot0+0\cdot0$; β) $(a-b)(c+d)-(a^2-b^2)(c-d)-(a+b)(c-d)$ für $a=b$, $c=d$.

5) Was wird aus einem Quotienten, wenn der Dividend 0 und der Divisor eine beliebige Zahl ist?

6) Wie ändert sich $n:k$, wenn k allmählich kleiner wird und sich der Null nähert? Was kann man für $n:0$ setzen? Was bedeutet das Zeichen ∞? Was kann man für $n:\infty$ setzen?

7) Was wird aus $\frac{4x-3}{24x-18}$ für $x=\frac{3}{4}$, was aus $\frac{3x}{7x}$ für $x=0$? Was kann man für $0:0$ setzen?

8) Was wird α) aus $a+(c-d):p-(d-c):n$, wenn $d=c$, $p>0$, $n>0$; β) aus $d:(C-c)$, wenn $C=c$ und $d>0$ ist?

9) $(MC-mc):(C-c)$ zu berechnen α) für $M=17$, $C=57$, $m=51$, $c=19$; β) für $M=13$, $m=5$, $C=c=11$.

10) In jedem der folgenden Ausdrücke für x einen solchen Wert zu setzen, daß derselbe zu 0 wird: α) $x-13$; β) $x-a$;

$\gamma)\ b + x - c$; $\delta)\ 13(x-7)$; $\varepsilon)\ (x-2)(x-5)$; $\zeta)\ (x-3)(x-7)(x-10)$; $\eta)\ (x-a)n$; $\vartheta)\ (x-b)(x-c)$; $\iota)\ (x-p)(x-q)(x-r)$; $\varkappa)\ (x-7):5$; $\lambda)\ (x-9):(x-3)$; $\mu)\ (x-m):(x+n)$.

11) Wie werden negative Zahlen addiert oder subtrahiert?

12) Zu berechnen für $a = 42$, $m = 11$, $n = 17$, $p = 6$, $q = 8$: $\alpha)\ a + (m-n) - (p-q)$; $\beta)\ n - (q-a) - (p-m)$*).

13) $x - (x-9) + (x-11) - (x-13)$ für $x = 7$ zu berechnen.

14) Wie groß ist $9 - (x-y) + (m-n) - (r-s-u)$, wenn $y - x = 5$, $n - m = 13$, $s + u - r = 6$ ist?

15) $\alpha)\ 22 - (-9) - (-4)$; $\beta)\ -(-48) - (-29) + (-77)$; $\gamma)\ -11\frac{1}{4} - (-3\frac{2}{3}) - 5\frac{1}{2} + (-3\frac{1}{3}) + 10\frac{1}{60}$ zu berechnen.

16) $C - c$ zu berechnen $\alpha)$ für $C = 11$, $c = -7$, oder $\beta)$ für $C = -7$, $c = -18$.

17) $m - n(n-p)$ $\alpha)$ für $m = -7\frac{1}{2}$, $n = 13$, $p = -14\frac{1}{2}$, oder $\beta)$ für $m = 3\frac{1}{4}$, $n = -9\frac{1}{2}$, $p = -7\frac{1}{4}$ zu berechnen.

18) $\alpha)\ a + (-5a) - (-9a)$; $\beta)\ -23m - [-23m - n]$.

19) $\alpha)\ 9x - (-8y) + (-9x - 8y)$; $\beta)\ 3a - 2b + (-5m) - 9n - (-7a) + (-5a) - [-3a - 2b + 4n] - [-5m - (-9n - 3a)]$.

20) $5a - (-2a - [-a - (2b - 5a) + (-a + b) - (7b] - (-9a))$.

21) Warum ist $a \times (-b) = -ab$, $(-a) \times b = -(ab)$ und $(-a) \times (-b) = ab$?

Antw.: Man setze $a = m - n$, $b = p - q$; alsdann ist, wenn $m > n$ und $p > q$, 1) $a \times (-b) = a \times (q-p) = aq - ap = -(ap - aq) = -a(p-q) = -ab$. Ebenso ist 2) $(-a) \times b = -ab$; 3) ist $(-a)(-b) = (n-m)(q-p) = nq - np - mq + mp = mp - mq - np + nq = (m-n)(p-q) = a \cdot b$ (§ 16, IV).

22) $a + m(m-a) - n(n-a)$ für $a = 42$, $m = 11$, $n = 17$ zu berechnen.

23) Ebenso: $(a-b)c + b(c-a) - (c-b)a + (a-b)(b-c) - (a-c)(c-b) + (c-b)(c-a)$ für $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 9\frac{1}{3}$, $c = 5\frac{1}{4}$.

24) Ebenso: $x + (x-8)7 - (x-7)5 - (x-5)(x-6)$ für $x = 3$.

25) Ebenso: $(-5) \cdot 9 - 11 \cdot (-3) + 6 \cdot (-9) - (-45) \cdot 8 + (-3) \cdot (-7) - (-5) \cdot (-19)$.

26) $(a-b)(c-d) + (c-b) \cdot (-d) - c(-a)$ für $a = -6\frac{1}{2}$, $b = -5\frac{1}{4}$, $c = -8\frac{1}{4}$, $d = -7$ zu berechnen.

27) $12 \cdot (-9) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-25) \cdot (-4) - 125 \cdot 17 \cdot (-8) - (-13) \cdot (-15) \cdot (-75)$ zu berechnen.

28) Was giebt eine negative Zahl durch eine positive, eine positive durch eine negative, eine negative durch eine negative dividiert?

29) $x + \dfrac{x-23}{8}$ und $9 - \dfrac{5-x}{9-x}$ für $x = 7$ zu berechnen.

---

*) Die Formeln sind vorher so umzuändern, daß nichts Negatives darin vorkommt.

30) Ebenso: $7+\frac{x-7}{11-x}-\frac{x-3}{x-18}+\frac{5(x-4)}{3(8-x)}-\frac{4(x-6)}{7(11-x)}$ für $x=13$.

31) Zu berechnen: $\frac{-27}{3}+\frac{-15}{3}-\frac{-84}{4}+\frac{26}{-2}-\frac{32}{-4}-\frac{28}{-4}-\frac{3510}{-117}+\frac{70}{-35}+\frac{-5}{-3}-\frac{-57}{-19}-\frac{270}{3}+(-5)\cdot\frac{-21}{-15}+\frac{36}{(-4):(-3)}-\frac{(-4)\cdot(-8)}{(-2)36}$.

32) $(MC-mc):(C-c)$ zu berechnen für $M=8$, $m=2$, $C=-7$, $c=-5$; ebenso $\frac{11}{6}Rr:(R+r)$ für α) $R=-7\frac{1}{2}$, $r=5$; β) $R=19\frac{1}{4}$, $r=-11$; γ) $R=-7\frac{3}{4}$, $r=-5\frac{1}{4}$.

33) α) $\frac{a-b}{b-a}$, β) $\frac{2a-3b+6c}{3b-2a-6c}$, γ) $\frac{m^2-n^2}{n-m}$, δ) $\frac{7a-7b+7c}{11b-11a-11c}$,

ε) $\frac{(a-b)(-c)(m^3-n^3)(2rs-r^2-s^2)}{(b-a)(n-m)(-c)^3(r-s)}$ aufzuheben.

34) α) x^2, β) x^3, γ) y^4, δ) x^5, ε) x^2y^3, ζ) x^5y^5, für 1) $x=-2$, $y=-3$, 2) $x=-4$, $y=-1$, 3) $x=-3$, $y=-4$ zu berechnen.

35) Welche Werte hat man für x zu nehmen, daß jeder der folgenden Ausdrücke negativ werde: α) $x-7$; β) $x-m$; γ) $x+7$; δ) $x+m$; ε) $x-a-b$; ζ) $a+x-b$; η) $(x+a)p$; ϑ) $(x-b)q$; ι) $(x+1)(x+9)$; $\varkappa$) $(x+a)(x+b)$; λ) $(x+1)(x+5)(x+8)$; μ) $(x+p)(x+q)(x+r)$; ν) $(x+8):x$; ξ) $(x+4):(x+1)$; o) $(x+a):(x+b)$; π) x^3; ϱ) x^2; σ) x^4; τ) x^7?

36) Wie läßt sich α) $(x-y)^2$ aus $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, wie β) $(m-n)^3$ aus $(m+n)^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$ ableiten?

37) Wenn $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$, welchem Ausdrucke ist alsdann $(a^3+b^3):(a+b)$ gleich?

38) Wenn $(1+x)(2+x)(3+x)=6+11x+6x^2+x^3$ ist, was giebt $(1-x)(2-x)(3-x)$?

39) Wenn $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$, was wird aus $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$?

40) Wie gehen die aus $1:(1-x)$ und $1:(1+x)$, ebenso die aus $p:(a-x)$ und aus $p:(a+x)$ (s. § 25, Beispiel 33 und 34) sich ergebenden Resultate ineinander über?

41) Was wird aus der Formel $\frac{xy+xz+yz+xyz}{x+y+z}$, wenn x allein in $-x$, was, wenn y allein in $-y$, was, wenn z allein

in $-z$ sich verwandelt? Was wird aus der Formel, wenn zwei dieser drei Zahlen zugleich negativ werden, was endlich, wenn alle drei zugleich negativ werden?

42) Was wird aus $\frac{mn}{m+n}$ für $n = \infty$? A.: $\frac{m}{m:n+1} = m$.

43) Was wird aus der Formel $\frac{11Rr}{6(R+r)}$, wenn $r = \infty$ gesetzt wird, was, wenn $R = -\infty$, $r = -12$ gesetzt werden?

44) Für welchen Wert von x werden folgende Ausdrücke unendlich: α) $4:(x-7)$, β) $x:(x-3)$, γ) $a:(x+n)$, δ) $(x+a):[(x+b)(x-c)(x+d)]$?

B. Maß der Zahlen.

§ 27.

Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisors und des gemeinschaftlichen Dividuus.

1) Wenn die Zahl m ein Maß der ganzen Zahlen a, b und c ist, so ist dieselbe auch ein Maß von $a \pm b \pm c$. Warum?

2) Wenn m ein Maß der ganzen Zahl a und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, ist dann m auch ein Maß von $a \cdot n$ oder von $a:n$? Ist unter derselben Voraussetzung $m \cdot n$ oder $m:n$ auch ein Maß von a?

3) Wenn 24 das größte Maß von 7608 ist, welche kleineren Maße hat letztere Zahl?

4) Wie findet man zu zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß? wie zu drei oder mehreren?

5) Zu α) 9982 und 67735, β) 19143 und 150308, γ) 19035 und 168495, δ) 12177 und 120540, ε) 1000 und 5069 das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen.

6) Die Quotienten: α) 186466 : 18927, β) 32376 : 324072, γ) 9215 : 90792 aufzuheben.

7) Die Brüche: α) $\frac{43395}{341637}$, β) $\frac{10395}{85185}$, γ) $\frac{6935}{61393}$, δ) $\frac{30120}{235689}$, ε) $\frac{38360}{261807}$ aufzuheben.

8) Zu α) 488 und 4873, β) 8765 und 4321, γ) 703 und 323 das größte gemeinschaftliche Maß und den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen.

9) Zu den drei Zahlen 47871, 134748 und 24428 das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen.

10) Ebenso zu den drei Zahlen 12324, 14931 und 18249.

11) Ebenso zu den vier Zahlen 13104, 16848, 24024 und 6048.

12) Zu den drei Zahlen 252, 540 und 385 den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen.

13) Ebenso zu den vier Zahlen 60, 84, 45 und 56.

14) Ebenso zu den Zahlen 3696, 1632 und 4675.

15) Folgende Brüche: $\frac{49}{252} + \frac{413}{540} + \frac{178}{385}$ zu addieren.

16) Auszuführen: $8\frac{47}{420} - 5\frac{191}{252} - 1\frac{269}{280} + 3\frac{163}{168}$.

17) Das größte gemeinschaftliche Maß zu $12x^2 + 5x - 3$ und $6x^2 + x - 1$ zu suchen. Aufl.: $3x - 1$.

18) Ebenso zu $6x^3 + 13x^2 + 15x - 25$ und $2x^3 + 4x^2 + 4x - 10$. Aufl.: $x^2 + 3x + 5$.

19) Ebenso zu $3x^5 - x^4 - 3x + 1$ und $3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$. Aufl.: $x^3 + x^2 + x + 1$.

20) Ebenso zu α) $a^7 - 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 - a$ und $a^6 - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1$; ebenso zu β) $a^4 - y^2$ und $a^3 + (a+1)ay + y^2$.

21) Ebenso zu $2y^6 + 2y^5 - 3y^4 - 5y^3 - 14y^2 - 7y$ und $2y^5 + 2y^4 - 5y^3 - 5y^2 - 7y - 7$. Aufl.: $2y^2 - 7$.

22) Ebenso zu $2x^6 - x^5 - 5x^3 - 5x^2 - x$ und $2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 1$. Aufl.: $2x^2 - 3x - 1$.

23) Ebenso zu $x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9$ und $6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12$.
Aufl.: $x^3 + x^2 - 5x + 3$.

24) Zu $a^3 - a^2 - a + 1$ und $a^3 - a^2 + a - 1$ den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen. Aufl.: $a^5 - a^4 - a + 1$.

25) Ebenso zu $x^3 + 8$ und $x^4 - 16$.
Aufl.: $x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 16x^2 + 32x - 64$.

26) Zu $6a^4 - 5a^2 - 1$, $3a^2 - 3$ und $5a^3 - 4a - 1$ den größten gemeinschaftlichen Divisor zu suchen.

27) Zu $3a^2 + a - 2$, $3a^2 + 5a + 2$ und $9a^3 + 9a^2 - 4a - 4$ den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen.

28) Zu $a^3(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b(2b^2 + 3bc + c^2) + ab^3(b + c)$ und $a^2(b^2 - c^2) - ab(2b^2 + bc - c^2) + b^3(b + c)$ den größten gemeinschaftlichen Divisor zu suchen.

29) Die Quotienten $\frac{x - 8}{x^2 - 5x + 6}$ und $\frac{x + 2}{x^2 - 9x + 14}$ zu addieren.

Anleitung. Man suche zuerst zu den beiden Divisoren den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus u. s. w.

30) $\frac{3x - 2}{x^2 - x - 6} - \frac{5x - 3}{x^2 + x - 12}$ auszuführen.

31) Ebenso: $\frac{z^4 - 2z^2 - 3}{15z^6 - 17z^2 - 18 + 25z^4} - \frac{z^2 - 4z + 1}{12z^4 - z^2 - 6}$.

32) $\frac{my - n}{y^2 + (m + n + p)y + (m + n)p} - \frac{ny + m}{m^2 + 2mn + n^2 - y^2}$.

33) $\frac{5x - 2}{x^2 - 3x - 4} + \frac{2x + 1}{x^2 - x - 12} - \frac{3x - 1}{x^2 + x - 20}.$

34) $\frac{x - 1}{x^2 - 7x + 10} - \frac{x + 2}{x^2 - 9x + 14} - \frac{x - 3}{x^2 - 12x + 35}.$

35) $\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1} + \frac{x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} - \frac{x^3}{x^4 - 1}.$

§ 28.

Teilbarkeit der Zahlen durch 2, 5, 10, 4, 25, 100, 8, 125, 1000, 9, 3, 6, 11. Zerlegung der Zahlen in Faktoren. Absolute Primzahlen. Zerlegung zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke und Faktoren.

1) Wie lassen sich die Reste der Divisionen der Zahlen 512, 713, 418, 596, 2798 durch die Zahlen 2, 5 und 10 angeben, ohne die Divisionen auszuführen?

2) Wann ist eine Zahl ohne Rest durch 2, 5 oder 10 teilbar?

3) Welche von den Zahlen 74, 95, 360, 744, 780, 1719, 2000, 1713, 1024, 9315, 125000 lassen sich durch 2, 5 oder 10 ohne Rest teilen?

4) Welche Reste lassen die Zahlen 5814, 7823, 1836, 45913, 2475, 4365, 82725 übrig, wenn man sie durch 4, 25 oder 100 dividiert?

5) In einem Korbe befinden sich 1273 Nüsse; wieviel Nüsse bleiben übrig, wenn man so viel Viertel-Hundert, als möglich, herauszählt? Wieviel bleiben von 85712 Nüssen übrig?

6) Wann ist eine Zahl durch 4, 25 oder 100 ohne Rest teilbar?

7) Welche von den Zahlen 732, 7759, 48875, 300100, 2785, 2862, 774, 825 lassen sich durch 4, 25 oder 100 ohne Rest teilen?

8) Jedes Jahr nach Christi Geburt, welches sich durch 4 ohne Rest teilen läßt, ist ein Schaltjahr. Welche Jahre in unserem Jahrhunderte und im folgenden sind Schaltjahre? (Ausnahme 1900.)

9) Welche Reste lassen die Zahlen 2719, 5304, 60700, 540008 bei der Division durch 8, 125 und 1000 übrig?

10) Ein Körper, der sich auf einem Kreise von 125 *m* Umfang bewegt, hat von einem bestimmten Punkte aus 378596 *m* zurückgelegt. Wieviel Meter ist er von dem Punkte entfernt, von dem er ausging?

11) Wann ist eine Zahl durch 8, 125 oder 1000 teilbar?

12) Welche von den Zahlen 5728, 6718, 23000, 4725, 5675, 4400 und 100000 sind durch 8, 125 oder 1000 teilbar?

13) Welche Reste lassen die Zahlen 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. bei der Division durch 9 übrig; welchen Rest 10^n, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet?

14) Welche Reste lassen die Zahlen 20, 200, 2000 u. s. w., ferner 30, 300, 3000 u. s. w., 40, 400, 4000 u. s. w., 70, 700, 7000 u. s. w. bei der Division durch 9 übrig? welchen Rest eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$, wo n und a beliebige ganze Zahlen bedeuten?

15) Jede Zahl ist ein Vielfaches von 9, nebst dem Reste, den die Division der Quersumme durch 9 übrig läßt. Warum?

16) Welche Reste lassen die Zahlen 4321, 12212, 5876, 27506, 278942, 123456789 bei der Division durch 9 übrig?

17) Wann ist eine Zahl durch neun ohne Rest teilbar? wann durch drei, wann durch sechs?

18) Welche von den in Nr. 3, 4, 7 und 12 angegebenen Zahlen lassen sich α) durch 9, β) durch 3, γ) durch 6 ohne Rest teilen?

19) Welche kleinsten, positiven oder negativen, Reste lassen die Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000 u. s. w. bei der Division durch 11 übrig?

20) Welchen Rest läßt 10^n bei der Division durch 11 übrig, wenn n eine gerade, welchen, wenn n eine ungerade Zahl ist?

21) Welche Reste lassen die Zahlen 20, 200, 2000, 20000 u. s. w., 30, 300, 3000, 30000 u. s. w., 80, 800, 8000, 80000 u. s. w. bei der Division durch 11 übrig? welche Reste die Zahlen $a \cdot 10^{2n}$ und $a \cdot 10^{2n-1}$, wo n und a beliebige ganze Zahlen bedeuten?

22) Welche Reste lassen die Zahlen 31104, 58642, 41972, 558279 bei der Division durch 11 übrig?

23) Wann ist eine Zahl durch 11 ohne Rest teilbar?

24) Welche von den Zahlen 39742857, 679534, 918290714, 448360, 9080907 lassen sich durch 11 ohne Rest teilen?

25) Schreibe irgend eine Zahl mit beliebig vielen Ziffern hin, setze darunter eine andere Zahl mit denselben Ziffern, nur in veränderter Ordnung, und subtrahiere die kleinere Zahl von der größeren. Die Differenz wird alsdann durch 9 teilbar sein. Warum?

26) Ich habe eine Zahl im Sinne und subtrahiere hiervon eine andere Zahl, die mit denselben Ziffern, nur in veränderter Ordnung, geschrieben wird. Der Rest ist: 6419 . 758, wo . an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht. Wie heißt die fehlende Ziffer?

27) Welchen Rest läßt das Produkt zweier Zahlen bei der Division durch 9 übrig? (Die Antwort ist auf 15) zu stützen.)

28) Welche Reste lassen die Produkte α) 57908×298765, β) 36729×58643 bei der Division durch 9 übrig?

Antw.: α) 57908 läßt bei der Division durch 9 Rest 2 übrig (15), 298765 läßt 1 übrig; das Produkt der beiden Zahlen läßt also bei der Division durch 9 $1 \cdot 2 = 2$ übrig.

29) Welchen Rest das Produkt $437 \times 586 \times 2719 \times 5871$?

30) Welche Reste α) 357934^2? β) 27915^3; γ) 4856431^5?

31) Welche Reste α) 4^9; β) 4^{37}; γ) 7^{49}; δ) 2347^{55}; ε) 5^7; ζ) 3866^{47}; η) 8^{31}? A.: α) 1; β) 4; γ) 7; δ) 7; ε) 5; ζ) 2; η) 8.

32) Wie macht man auf eine ausgeführte Multiplikation oder Division die Neunerprobe? Kann man aus der Richtigkeit der Neunerprobe immer auf die Richtigkeit der Rechnung schließen?*)

33) Welchen Rest läßt das Produkt der beiden Zahlen: α) 387×597; β) 3791584×2765432; γ) überhaupt zweier beliebigen Zahlen bei der Division durch 11 übrig?

34) Wie macht man die Elferprobe? Ist dieselbe untrüglich?

35) α) 10378368; β) 3675375; γ) 138752757; δ) 50875; ε) 1953125; ζ) 1048576000 in Primfaktoren zu zerlegen.

36) Ebenso: α) 10001; β) 10201; γ) 10283; δ) 637; ε) 689; ζ) 697; η) 731; ϑ) 7363; ι) 8341; $\varkappa$) 111; λ) 1111.

37) α) Wie heißen alle zwischen 1 und 300 liegenden Primzahlen? β) Jede Primzahl (1, 2, 3 ausgenommen) ist von der Form $6n \pm 1$. Warum?

Folgende Ausdrücke in Faktoren zu zerlegen:

38) α) $x^2 - y^2$; β) $4m^2 - 9n^2$; γ) $5a^2 - 45m^2$; δ) $1 - z^2$; ε) $a^2y^2 - b^2z^2$; ζ) $x^4 - 0{,}16$; η) $256x^8y^{16} - 6561z^{24}t^{48}$.

39) α) $1764m^2 - 900n^2$; β) $16x^2y^2 - 81p^2q^2r^2$; γ) $\dfrac{49a^2b^2}{841c^2d^2} - \dfrac{36c^2d^2}{25a^2b^2}$; δ) $\dfrac{(a-x)^4}{(a+x)^4} - \dfrac{(a+x)^4}{(a-x)^4}$.

40) α) $49(a-b)^2 - 64(m-n)^2$; β) $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

41) α) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; β) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$; γ) $m^2 - n^2 - 2np - p^2$; δ) $m^2 - n^2 + 2np - p^2$. (S. § 16, Nr. 12 und 21.)

42) $(x^2 + 2x + 1 - y^2) \cdot (y^2 - x^2 + 2x - 1)$.

43) $x^2 + (a+b)x + ab$. Antw.: $(x+a)(x+b)$.

44) α) $x^2 + 5x + 6$; β) $x^2 + 8x + 15$; γ) $x^2 + 20x + 91$; δ) $x^2 + 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; ε) $x^2 + 12ax + 35a^2$.

45) α) $x^2 + 2x + \frac{3}{4}$; β) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{18}$; γ) $x^2 + \frac{12}{35}x + \frac{1}{35}$; δ) $x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{1}{24}$; ε) $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2)$.

46) $x^2 + (a-b)x - ab$.

47) α) $x^2 + x - 6$; β) $x^2 + 3x - 10$; γ) $x^2 + 2x - 143$; δ) $x^2 + 7x - 120$; ε) $x^2 + 5\frac{1}{2}x - 3$; ζ) $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$.

48) $x^2 - (a-b)x - ab$.

*) Die höchst praktische Neunerprobe bei der Multiplikation und Division, welche schon im Algorithmus M. Georgii Peurbachii († 1461) de integris vorkommt und welche sich in allen alten Rechenbüchern findet, ist in unseren Tagen mit Unrecht in Vergessenheit geraten.

49) α) $x^2 - x - 12$; β) $x^2 - 5x - 24$; γ) $x^2 - 7x - 60$; δ) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$; ε) $x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{5}{8}$; ζ) $x^2 - \frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}y^2$.

50) $x^2 - (a + b)x + ab$.

51) α) $x^2 - 10x + 16$; β) $x^2 - 11x + 24$; γ) $x^2 - 13x + 30$; δ) $x^2 - 53x + 360$; ε) $x^2 - \frac{27}{20}x + \frac{9}{20}$.

52) α) $x^2 - 2mx + (m^2 - n^2)$; β) $x^2 - 2nx - (m^2 - n^2)$.

53) α) $acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$; β) $prx^2 - (pt + qr)xy + qty^2$; γ) $a^3x^2 + (ab - a^2b^2)xy - b^3y^2$.

54) α) $1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2$; β) $(x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2z^2$; γ) $(x - y)(x^2 - z^2) - (x - z)(x^2 - y^2)$.

55) α) $x^4 - y^4$, β) $x^8 - y^8$ in Faktoren zu zerlegen. (S. Nr. 14, § 25.)

56) Ebenso: α) $x^3 - y^3$; β) $x^3 + y^3$; γ) $x^5 - y^5$; δ) $x^5 + y^5$. (S. Nr. 14, § 25.)

57) Den gemeinschaftlichen Faktor zu $x^2 - 5x + 6$ und $x^2 + 3x - 10$ zu suchen.

Anleitung. Man zerlege jedes Polynom in seine binomischen Faktoren.

58) Ebenso zu: α) $x^2 - 4$ und $x^2 + x - 6$; β) $x^2 + 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$ und $x^2 + 3\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$; γ) $x^2 - (a + c)x + ac$ und $x^2 - (a - d)x - ad$; δ) $x^2 - y^2z^2$ und $x^2 + 2xyz + y^2z^2$.

59) Folgende Quotienten abzukürzen:

$$\alpha)\ \frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2};\quad \beta)\ \frac{x^3y^3 - z^6}{(xy - z^2)^2};\quad \gamma)\ \frac{x^2 - (a + b)x + ab}{x^2 + (c - a)x - ac}.$$

$$60)\ \alpha)\ \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15};\quad \beta)\ \frac{x^2y^2 - 6xyz + 9z^2}{5x^3y^2 + 5x^2yz - 60xz^2};\quad \gamma)\ \frac{x^3y^3 + z^3}{x^5y^5 + z^5}.$$

61) Mit Hilfe der Sätze über Zerlegung der algebraischen Ausdrücke in Faktoren sollen die Beispiele 29—35 in § 27 gelöst werden.

C. Decimalbrüche*).

§ 29.

Begriff eines Decimalbruches. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

1) Was ist ein Decimalbruch? Was bedeutet das Decimalkomma? Auf wie vielfache Weise kann ein Decimalbruch ausgesprochen werden?

2) Was geschieht, wenn das Decimalkomma von der Rechten zur Linken oder von der Linken zur Rechten um eine Stelle

*) Regiomontanus (1436—76) führte die Decimalbrüche zuerst ein; in allgemeineren Gebrauch kamen dieselben seit der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts (Recorde 1557, Stevin 1585).

oder um zwei, drei, n Stellen gerückt wird? Was geschieht, wenn dem Decimalbruche zur Rechten oder zur Linken p Nullen zugesetzt werden?

3) Giebt es auch unechte Decimalbrüche?

4) α) $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{100000}$; β) $\frac{7}{100} + \frac{3}{10000} + \frac{5}{1000000}$; γ) $\frac{7}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{8}{10^6}$ durch Decimalbrüche darzustellen.

5) Wie unterscheiden sich 37,859, 378,59, 3785,9, 37859 und 3,7859 voneinander?

6) Wie unterscheidet sich 0,34, 0,034, 0,0034, 0,340, 0,3400, 0,34000, 3,4 und 34 voneinander?

7) 5,43728, 0,57648, 9,3755, 1,59625, 0,000125, 0,00003125, 0,0078125 und 0,9008371 in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

8) Wie werden Decimalbrüche zu einander addiert, wie voneinander subtrahiert?

9) $27,435 + 19,764 + 23,001 + 15,075 + 24,081 + 0,071$.

10) $34,7856 + 0,3 + 4,7432 + 9,410006 + 0,074 + 1823$.

11) α) $9,9998 + 4,796 + 3719 + 42,87357 + 0,000002 + 6223,330628$; β) $3,839 + 24,4 + 7,65 + 9,7899$.

12) 9,5842—3,3964; 240,0098—39,8531; 94,0008—0,7564.

13) 1,3579911—0,797911; 44,3759—2,854; 39,4837—14,48.

14) 72,54 — 68,97364; 14,07 — 11,27463; 12 — 3,9864; 3,8744—1,8744; 1—0,30103; 1—0,4771213; 10—9,032796.

15) $0,387 + 0,723331 - 1 + 1,5237 + 2,361 - 2,6694637 + 2,7726 - 2,7709072 + 5,2 + 19,18239 - 9,538786$.

§ 30.

Multiplikation und Division. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Periodische Decimalbrüche. Unvollständige Decimalbrüche. Abgekürzte Rechnungen.

1) Wie werden Decimalbrüche multipliziert, wie dividiert?

2) $3,14159 \times 7$; $3,65 \times 66$; $0,686 \times 3125$; $1593 \times 0,00001684$.

3) $0,08765 \times 1000$; $98,7641 \times 7200$; $78,125 \times 128000$.

4) $3,7 \times 9,4$; $1,0759 \times 3,16$; $112,21 \times 0,351$; $798,35 \times 0,00076$.

5) $0,2 \times 0,3$; $0,001 \cdot 0,0001$; $0,007 \cdot 0,0009$; $0,015625 \times 0,0064$; $0,1875 \times 0,720000004$; $0,3125 \times 12,800000008$.

6) Wieviel alte preuß. Fuß enthalten α) 16, β) 43, γ) 72,05846 *m* à 3,1862 preuß. Fuß? δ) Wieviel alte preuß. Meilen à 24000 Fuß machen 113, wieviel 580 *km*?

7) α) Ein Zwanzigmarkstück in Gold wiegt 0,007 9645 *kg*, ein Fünfmarkstück in Silber wiegt 0,027 75 *kg*. Wieviel wiegen 9, 16, 62, 565 Stück von jeder Sorte? β) Wenn 1 *l* = 0,873 34 alte preuß. Quart, wieviel Quart macht 1 *hl*, wieviel Ohm (à 120 Quart) 11 *hl*? γ) Ein Jahr hat 365,242 22 Tage; wieviel Tage, Stunden, Minuten und Sekunden macht es?

8) Die Brüche: α) $\frac{3}{4}$, β) $\frac{11}{16}$, γ) $\frac{19}{32}$, δ) $\frac{27}{64}$, ε) $\frac{19}{250}$, ζ) $\frac{1}{6250}$ in Decimalbrüche zu verwandeln.

9) Ebenso: α) $\frac{22}{7}$, β) $\frac{333}{106}$, γ) $\frac{355}{113}$, δ) $\frac{103\,993}{33\,102}$, ε) $\frac{498}{7595}$, ζ) $\frac{33}{1856}$.

10) Wenn 47 alte preuß. Morgen so groß als 12 *ha* sind, wieviel beträgt ein Morgen? (4 St.)

11) α) Wie muß der Nenner eines Bruches beschaffen sein, damit derselbe durch einen vollständigen Decimalbruch sich darstellen läßt? β) Warum entsteht, wenn der Decimalbruch ein unvollständiger ist, eine **Periode**? γ) Wieviel Ziffern kann höchstens die Periode enthalten? δ) Die Anzahl der Ziffern der Periode in den Decimalbrüchen, welche den Brüchen $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{19}$, $\frac{11}{23}$, $\frac{58}{59}$, $\frac{17}{21}$, $\frac{31}{36}$, $\frac{47}{48}$ gleich sind, zu bestimmen.

12) Woher kommt es, daß in den Decimalbrüchen, welche man aus den sechs Brüchen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{6}{7}$ erhält, die Perioden mit denselben Ziffern, nur in veränderter Ordnung, geschrieben werden?

13) Folgende periodische Decimalbrüche sollen in gewöhnliche Brüche verwandelt werden: α) 0,1111....; β) 0,6666....; γ) 0,010101....; δ) 0,3636....; ε) 0,001001001.......; ζ) 0,270270.....; η) 0,000 001 000 001 000 001......; ϑ) 0,243 902 4390......; ι) 0,142857 142857......; $\varkappa$) 0,256410 256410......; λ) 0,126 582 278 481 012 658 227 848 10...... .

14) Ebenso: α) 0,8333... (Periode 3); β) 0,297 474... (Per. 74); γ) 0,055...(Per. 5); δ) 0,428 535 535...(Per. 535); ε) 0,379 643 219... (Per. 43 219); ζ) 0,153846 153846....*).

15) Welche Regel hat man zu befolgen, wenn unvollständige Decimalbrüche nur bis auf eine bestimmte Stelle angegeben werden sollen? Was hat man für a) 0,785 4321....., b) 0,497 998 32...., c) 0,497 3541...., d) 0,582 7651...., e) 0,576 4349.... zu setzen, wenn man nur α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 5 Decimalstellen beibehalten will? Was heißt es, ein unvollständiger Decimalbruch habe eine Genauigkeit von 2, 3, n Stellen?

16) α) 6285,92 : 8; β) 3314,961 : 39; γ) 5938,7778 : 654.

17) α) 8,641 92 : 7; β) 2203,1213 : 29; γ) 27,010278 : 387.

18) α) 387,54 : 100; β) 4,8321 : 10 000; γ) 0,008756 : 100 000.

---

*) Die einzelnen Ziffern der Periode 846 ergänzen die einzelnen Ziffern der Periode 153 zu 9. Perioden dieser Art werden nach **Zindler** (Programm des k. k. Obergymnasiums in Zengg 1870) **dualistische** genannt. Setzt man den obigen Decimalbruch $= x$, so ist $1000x + x = 154$; $x = \frac{154}{1001} = \frac{2}{13}$.

19) α) 301,53 : 69000; β) 7006,652 : 1,234; γ) 1,0665 : 0,001 35.

20) 8,81076 : 0,357; 3,315816 : 1,806; 3,365 39 : 0,000 1835.

21) α) 97 406 784 : 0,000 0789; β) 1 : 0,1024; γ) 1 : 0,156 25; δ) 118,853 801 : 98,765; ε) 6978 : 0,29075; ζ) 3 : 0,007 5; η) 400 : 56,5784; ϑ) 3 : 4943,34; ι) 300 : 0,000 017 32; $\varkappa$) 10 : 0,025.

22) Den gesetzlichen Bestimmungen gemäß war 1 *m* = 443,296 Pariser Linien, und 1 preuß. Fuß = 139,13 Pariser Linien. Wie groß ist hiernach α) 1 *m* in preuß. Fußen? β) 1 preuß. Fuß in Metern? (8 Stellen.) γ) Wieviel Meter betragen 3 alte preußische Ellen, wenn 1 Elle $25\frac{1}{2}$ Zoll lang ist?

23) Der Sonnen-Durchmesser ist 108,75, der Durchmesser des Planeten Venus 0,94, des Planeten Jupiter 11,28, des Mondes 0,27275 Erd-Durchmessern gleich. Wieviel Mal ist der Sonnen-Durchmesser größer, als jeder der Durchmesser der genannten Himmelskörper? (4 Decimalstellen.)

24) Die Entfernung Merkurs von der Sonne beträgt 0,387 0988, des Planeten Venus 0,723 3322, des Planeten Mars 1,523 6914 Halbmesser der Erdbahn. Wieviel Mal sind die beiden letzteren Planeten weiter von der Sonne entfernt, als der erstere? (4 St.)

25) Von einem Neumonde zum nächstfolgenden sind 29,530 588 Tage. Wieviel Mondmonate verfließen in 19 Sonnenjahren, wenn jedes derselben zu 365,24222 Tagen gerechnet wird? (3 Stellen.)

26) Jemand verfertigt mehrere Kugeln von gleicher Größe aus verschiedenen Metallen und bestimmt deren Gewichte. Eine Kugel aus Platin wiegt 20,855 *g*, eine zweite aus Gold 19,258 *g*, eine dritte aus Blei 11,352 *g*, eine vierte aus Silber 10,474 *g*, eine fünfte aus Kupfer 8,434 *g*. Wieviel Mal so schwer ist jede der vorhergenannten Kugeln, als eine folgende? (Jedes der 10 Beispiele auf 3 Stellen zu berechnen.)

27) $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdots8} + \frac{x^9}{1\cdot2\cdots9} + \frac{x^{10}}{1\cdot2\cdots10} + \frac{x^{11}}{1\cdot2\cdots11}$ für α) $x = 1$, β) $x = 0,9$, γ) $x = 0,8$ zu berechnen. (7 Stellen.)

28) Ebenso: $4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15})$. (4 St.)

29) Ebenso α) $\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{6}$ für $a = 0,1$ (7 St.); β) $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \frac{a^{11}}{11}$ für $a = 0,2$. (8 Stellen.)

30) $16\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9\right\} - 4\left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3\right\}$ zu berechnen. (9 St.) A.: 3,141 592 682.

31) α) Wenn p unvollständige Decimalzahlen, von welchen jede n Decimalstellen hat, addiert werden, welche Genauigkeit hat alsdann das Resultat? β) Wenn man die Summe der unvollständigen Decimalbrüche 17,4386... + 19,8765... + 0,8757... + 0,9863... + 0,7987... nimmt, auf welche Decimalstelle kann man sich alsdann im Resultate als zuverlässig richtig verlassen? γ) Wenn zwei unvollständige Decimalzahlen voneinander subtrahiert werden, welche Genauigkeit hat alsdann das Resultat? δ) Welche Genauigkeit hat die Differenz der unvollständigen Decimalzahlen 9,8761... und 3,854...?

32) Wie werden Decimalbrüche miteinander in abgekürzter Weise multipliziert oder durcheinander dividiert? Wie bestimmt sich die Genauigkeit des Resultates, wenn die Decimalbrüche unvollständig oder vollständig sind? In den folgenden Beispielen soll jedesmal angegeben werden, bis auf welche Stelle des Resultates man sich als zuverlässig richtig verlassen könne.

33) α) $37{,}9858764 \times 0{,}4872635$; β) $0{,}5872193 \times 0{,}4196215$; γ) $27{,}5639 \times 2{,}8743$; δ) $0{,}0072246 \times 0{,}56287$.
Aufl.: α) 18,50810544.

34) α) $1{,}414214^2$; β) $1{,}44225^3$; γ) $3{,}8571431^3$.
Aufl.: γ) 57,38485.

35) α) πr^2; β) $\frac{4}{3}\pi r^3$ für $\pi = 3{,}14159265$ und $r = 0{,}387564$.

36) Nach verkürzter Division auszuführen:
α) $58{,}732196 : 34{,}4827913$; β) $14{,}297543 : 119{,}89543$;
γ) $0{,}80754167 : 0{,}0032197$; δ) $16 : 1{,}4876532$.

37) Ein Pariser Kubikzoll reines Wasser ist 1,3551017 Pariser Lot schwer. Wieviel wiegt ein Pariser Kubikzoll Gold, wenn dasselbe 19,2580123mal so schwer als Wasser ist?

38) Der alte griechische Fuß betrug 0,30828 *m*, der alte römische Fuß 0,29574 *m*. Wie groß war ein römischer Fuß in griechischen Fußen und umgekehrt?

39) Der Umfang eines Kreises beträgt das 3,14159265fache seines Durchmessers. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 39926000 Meilen ist?

40) $\dfrac{49876 \cdot 0{,}037542 \cdot 68{,}7075}{7{,}81649 \cdot 578{,}93 \cdot 28{,}4299}$ zu berechnen.

41) Ein Meter beträgt 3,1862 preußische Fuß. a) Wieviel preuß. Quadratfuß enthält 1 *qm*, wieviel enthalten 7, wieviel 13 *qm*? b) Wieviel preuß. Kubikfuß enthält 1 *cbm*? wieviel enthalten 3, wieviel 26 *cbm*? c) Wieviel Liter machen 7 Quart à $\frac{1}{27}$ Kubikfuß?

42) Wieviel preuß. Morgen enthält 1 *ha*, wenn 1 *ha* = 100 *a*, 1 *a* = 1 Quadratdekameter, 1 Dekam. = 10 *m*, 1 Morgen = 180 Quadratruten, 1 Quadratrute = 144 Quadratfuß? Antw.: 10151,864 : 2592 = 3,9166 preuß. Morgen.

43) Ein Zwanzigmarkstück in Gold wiegt 0,007 9645 kg, ein Fünfmarkstück in Silber 0,027 75 kg; wieviel gehen von jeder Sorte a) auf 1 kg, b) 100 kg? Wie stellt sich der Wert des reinen Goldes zu dem des reinen Silbers, wenn beide Geldstücke 0,9 reines Metall enthalten?

D. Verhältnisse und Proportionen.

§ 31.

Verhältnisse.

1) Was ist ein Verhältnis? Wieviel Arten von Verhältnissen giebt es? Was versteht man unter Antecedent, Konsequent und Exponent*)?

2) Zu den geometrischen Verhältnissen: α) 24 M : 16 M; β) 12 M : 2 ₰; γ) $42\frac{5}{8} : 7\frac{3}{4}$; δ) 6 kg : 7 g; ε) $89\frac{1}{3}$ Stunden : $5\frac{7}{12}$ Stunden; ζ) 3 M 75 ₰ : 2 M 25 ₰; η) 204,72 : 12,795; ϑ) 0,462 m : 0,0007 m; ι) $(a+b)(m^2-n^2):(a^2-b^2)(m-n)$ die Exponenten zu suchen.

3) Wie groß ist der Antecedent eines geometrischen Verhältnisses, wenn der Konsequent $13\frac{17}{18}$ und der Exponent $5\frac{2}{7}$ ist? wie groß, wenn der Konsequent 40 M 75 ₰ und der Exponent $19\frac{3}{8}$ ist?

4) Der Antecedent eines geom. Verhältnisses sei 0,070 06652, der Exponent 0,5678. Wie groß ist der Konsequent?

5) Wie wird ein Verhältnis geändert, wenn der Antecedent oder der Konsequent sich vergrößert oder verkleinert?

6) Wie ändert sich der Exponent eines geometrischen Verhältnisses, wenn der Antecedent oder Konsequent multipliziert oder dividiert wird? wie, wenn der Antecedent und Konsequent beide mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert werden?

7) Bleibt ein geometrisches Verhältnis ungeändert, wenn zum Antecedenten und Konsequenten dieselbe Zahl addiert wird?

8) Der Exponent des Verhältnisses eines preußischen Fußes zu einem Pariser Fuße ist 0,96618. Wie groß ist der Exponent des Verhältnisses einer preußischen Rute (12 Fuß) oder eines preußischen Zolles zu einem Pariser Fuße? wie groß der Exponent des Verhältnisses eines preußischen Zolles zu einem Pariser Zolle?

9) Der Exponent des Verhältnisses eines Meters zu einem preußischen Fuße ist 3,1862. Wie groß ist α) der Exponent des

*) Der Exponent eines geometrischen Verhältnisses wird so genommen, daß der Konsequent, mit demselben multipliziert, dem Antecedenten gleich wird.

Verhältnisses eines Decimeters (0,1 *m*) zu einem preußischen Zolle? β) eines Dekameters (10 *m*) zu einer alten preuß. Rute?

10) Folgende Verhältnisse in andere gleich große, deren Glieder ganze Zahlen sind, zu verwandeln: α) $5\frac{3}{4} : 18\frac{1}{4}$; β) $5\frac{3}{7} : \frac{5}{11}$; γ) $4\frac{9}{10} : 5\frac{7}{13}$; δ) $0{,}078 : 4\frac{3}{8}$; ε) $6{,}976 : 0{,}003\dot{2}$.

11) Folgende Verhältnisse durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken: 1) $3825 : 5175$; 2) $13{,}284 : 1{,}19\dot{8}\dot{8}$; 3) $26\frac{1}{4} : 61\frac{1}{4}$; 4) $5\frac{1}{7} : 18\frac{6}{7}$; 5) $289\,575 : 334\,125$; 6) $4\,352\,049 : 4\,426\,443$; 6) 57 *M* 75 *ϑ* : 65 *M* 45 *ϑ*; 8) 35 *kg* 280 *g* : 47 *kg* 160 *g*.

12) Wie läßt sich das Verhältnis eines Pariser Fußes zu einem Meter $25\,296 : 77\,872$ durch kleinere Zahlen ausdrücken?

13) Welches ist der Exponent des Verhältnisses eines preußischen Fußes zu einem Meter? (s. Aufg. 9).

14) Wie ändert sich der Exponent e eines Verhältnisses $a : b$, wenn dasselbe in $b : a$, oder in $(a \pm b) : b$, oder in $(a \pm b) : a$, oder in $a : (a \pm b)$, oder in $b : (a \pm b)$, oder in $(a + b) : (a - b)$, oder endlich in $(ma \pm nb) : (pa \pm qb)$ umgeändert wird?

15) Wenn n der Exponent des Verhältnisses $p : q$ ist, wie groß ist der Exponent des Verhältnisses $(5p + 3q) : (7p - 6q)$?

§ 32.

Proportionen.

1) Was versteht man unter einer Proportion? Wieviel Arten von Proportionen giebt es? Welche Glieder müssen bei einer arithmetischen, welche bei einer geometrischen Proportion gleichartig sein? Welche Glieder heißen homologe, welche innere und äußere? Was versteht man unter einer stetigen Proportion? Was versteht man unter einem arithmetischen, was unter einem geometrischen Mittel?

2) Welche Veränderung kann man in einer Proportion*) mit den einzelnen Gliedern durch Multiplikation oder Division, unbeschadet der Richtigkeit der Proportion, vornehmen?

3) Folgende Proportion in eine andere umzuändern, deren Glieder ganze Zahlen sind: $5\frac{4}{7} : 4\frac{8}{11} = 3\frac{3}{7} : 1\frac{1}{11}x$.

4) Warum ist in jeder Zahlen-Proportion das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der inneren Glieder gleich?

5) Wie überzeugt man sich von der Richtigkeit einer Proportion?

*) In der Folge soll, wenn von einer Proportion schlechtweg die Rede ist, hierunter jedesmal eine geometrische Proportion verstanden werden.

6) Welche von den nachstehenden Proportionen sind richtig, welche unrichtig?

I. $(3a + 4b) : (9a + 8b) = (a - 2b) : (3a - 4b)$.

II. $(9a^2 - 4b^2) : (15a^2 - 31ab + 14b^2) = (15a^2 + 31ab + 14b^2) : (25a^2 - 49b^2)$.

III. $(a^3 + b^3) : (a^2 + b^2) = (a^2 - b^2) : (a - b)$.

IV. $(a^3 + b^3) : (a + b) = (a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5) : (a^3 - b^3)$.

7) Warum ist $a^2 - b^2$ die mittlere Proportionale zwischen $a^2 + 2ab + b^2$ und $a^2 - 2ab + b^2$?

8) Welche **Versetzungen** kann man mit den Gliedern der Proportion $m : n = p : q$ vornehmen?

9) Können die vier Zahlen 323, 195, 285 und 221 zu einer Proportion miteinander verbunden werden?

10) Können die vier Ausdrücke $1 - x^2$, $4 - y^2$, $2 - 2x + y - xy$ und $2 + 2x - y - xy$ zu einer Proportion zusammengestellt werden?

11) Wenn die beiden Produkte $21p^2qr$ und $55mn$ einander gleich sind, welche Proportionen kann man aus den Faktoren derselben bilden?

12) Ist $a : b = c : d$, so ist:
α) $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$, β) $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$, γ) $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$, δ) $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$. Warum?

13) Wenn $a : b = c : d$, warum ist $(ma \pm nb) : (pa \pm qb) = (mc \pm nd) : (pc \pm qd)$?

14) Welche einfachere Proportion läßt sich aus der Proportion: $(7x + 8y) : (7x - 8y) = (35m + 24z - 24u) : (35m - 24z + 24u)$ durch Addition und Subtraktion der Antecedenten und Konsequenten herleiten?

15) Wie findet man zu drei bekannten Gliedern einer Proportion das **unbekannte** Glied?

Aus den folgenden Proportionen 16—21 x zu bestimmen:

16) $221a^2b^2 : 17pqa = 26ab^2 : x$.

17) $29(a + b) : x = 551(a^2 - b^2) : 19(a - b)$. **Aufl.**: $x = 1$.

18) $13\frac{1}{1}\frac{7}{8} : x = 0{,}00831 : 4\frac{1}{1}\frac{1}{8}$.

19) $[a - b] : \left[\frac{(a+b)^2}{2ab} - 1\right] = x : \left(a + b + \frac{2b^2}{a - b}\right)$. A.: $x = 2ab$.

20) $(3a^2 + 2ab - 8b^2) : (5a^2 + 4ab - 12b^2) = x : (5a - 6b)$.

21) $(a - x) : (x - b) = a : b$.

Bemerkung. x heißt das **harmonische** Mittel der beiden Zahlen a und b. Der reciproke Wert des harmonischen Mittels der Zahlen a und b ist das arithmetische Mittel der reciproken Werte der Zahlen a und b. Warum?

22) Die beiden ersten Glieder einer Proportion $x : y = p : q$ zu finden, wenn die Summe s oder Differenz d derselben und die beiden letzten Glieder bekannt sind.

23) Die Zahl 3390 in zwei Summanden zu zerlegen, die in dem Verhältnisse 13 : 17 zu einander stehen.

24) Aus $x : (a - x) = m : n$ die unbekannte Zahl x zu bestimmen.

25) Aus α) $x : (d + x) = p : q$, β) $a : b = (y - m) : m$ und aus γ) $(c + z) : (c - z) = r : s$ die Unbekannten x, y und z zu finden.

26) Folgende Proportion aufzulösen:

$$x : y = \left[a + b - \frac{ab}{a+b}\right] : \left[a - b + \frac{ab}{a-b}\right], \text{ wenn } x + y = 2a^3 \text{ ist}$$

Aufl.: $x = a^3 - b^3$, $y = a^3 + b^3$.

27) Ebenso: $x : y =$

$$\left[a - b + \frac{b^2}{a-b}\left(1 - \frac{b(a+b)}{a^2 + ab + b^2}\right)\right] : \left[\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2}\right],$$

wenn $x - y = 2b^5$. Aufl.: $x = a^5 + b^5$, $y = a^5 - b^5$.

28) Wenn $A : B = m : n$, $B : C = n : o$, $C : D = o : p$, $D : E = p : q$, welchen Verhältnissen sind alsdann die Verhältnisse: $A : C$, $A : D$, $A : E$, $B : D$, $B : E$ und $C : E$ gleich?

29) Wenn $A : B = f : g$, $B : C = h : i$, $C : D = k : l$, $D : E = m : n$, welchen Verhältnissen sind alsdann die Verhältnisse: $A : C$, $A : D$ und $A : E$ gleich?

30) Was heißt: M zu N ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$, $g : h$?

31) Welche Proportionen kann man aus $a : b = c : d$, $e : f = g : h$, $i : k = l : m$, $n : o = p : q$ durch Multiplikation ableiten?

32) Was versteht man unter einer fortlaufenden Proportion $a : b : c : d : e = m : n : o : p : q$? Wie werden mehrere Proportionen $a : b = m : n$, $b : c = p : q$, $c : d = r : s$ in eine fortlaufende Proportion verwandelt?

33) Wenn $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$, $d : e = 7 : 8$, welchen Verhältnissen ist alsdann $a : b : c : d : e$ gleich?

34) Wenn $a : b = 11 : 13$, $c : d = 7 : 9$, $e : c = 9 : 5$, $d : b = 11 : 7$, welchen Verhältnissen ist alsdann $a : b : c : d : e$ gleich?

35) Wenn $a : b = 4 : 5$, $d : f = 5 : 2$, $e : c = 6 : 7$, $d : b = 7 : 3$ und $f : c = 4 : 3$, welchen Verhältnissen ist alsdann $a : b : c : d : e : f$ gleich? Aufl.: 24 : 30 : 21 : 70 : 18 : 28.

36) Wenn $x : y : z : u = p : q : r : s$, so ist $(x \pm y \pm z \pm u) : x : y : z : u = (p \pm q \pm r \pm s) : p : q : r : s$. Warum?

37) Wie groß sind x, y, z, u, wenn $x : y : z : u = a : b : c : d$ und $x + y + z + u = s$ ist?

38) x, y, z, u zu bestimmen, wenn $x : y : z : u = 19 : 11 : 4 : 1$ und $x - y - z + u = 95$ ist.

39) Wie groß sind x, y, z, p, wenn $x : y : z : p = 133 : 247 : 285 : 371$ und $y - x + p - z = 1000$ ist?

40) $x : y : z : t = 3 : 5 : 7 : 9$ und $7x - 4y + 2z - t = 66$. Wie groß sind x, y, z und t?

41) $x : y : z : u = (a^3 + a^2 + a + 1) : (a^2 + a + 1) : (a + 1) : 1$ und $x - y + z - u = a \frac{a^4 - 1}{a + 1}$. Wie groß sind x, y, z und u?

Aufl.: $x = a^4 - 1$, $y = a^3 - 1$, $z = a^2 - 1$, $u = a - 1$.

42) Wenn $x : y = a : b$, $y : z = c : d$, $z : u = e : f$ und $x + y + z + u = s$, wie lassen sich hieraus x, y, z und u bestimmen?

43) $x : y = 7 : 26$, $y : z = 5 : 21$, $z : u = 9 : 20$ und $x + y - z + u = 2497$. Wie groß sind x, y, z und u?

§ 33a.

Anwendung der Proportionslehre.

(Gerades und umgekehrtes Verhältnis. Einfaches, zusammengesetztes, quadratisches, kubisches Verhältnis. Kettenregel. Gesellschafts- und Mischungs-Rechnung.)

1) Wann sind Größen miteinander gerade, wann umgekehrt proportioniert?

2) Wann stehen Größen mit mehreren anderen im zusammengesetzten, wann im quadratischen, wann im kubischen Verhältnisse?

3) a Gewichtseinheiten, z. B. Kilogramm, Gramm einer Ware, kosten m *M*. Wieviel kosten b Gewichtseinheiten der Ware?

4) Wenn $14\frac{2}{5}$ [p] preußische Pfund einer Ware ebensoviel kosten, als $34\frac{2}{5}$ [q] preuß. Pfund einer anderen Ware, und das Kilogramm der ersteren Ware 2 *Frc* 45 *Cent* [n *Frc*] kostet, wieviel kostet das Kilogramm der letzteren Ware?

5) 43 *m* machen 137 preußische Fuß. Wieviel Meter machen 51 preußische Fuß?

6) Wieviel Zinsen geben k *M* zu p Prozent in einem Jahre? wieviel in n Jahren?

7) Welches Kapital giebt nach n Jahren zu p Prozent z *M* Zinsen?

8) Zu wieviel Prozent stehen 288 *M*, wenn sie ebensoviel Zinsen geben, als 352 *M* à $4\frac{1}{2}$ Prozent? Wie heißt die Auflösung, wenn für 288, 352 und $4\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen k, k' und p gesetzt werden?

9) Ein Kaufmann kauft von einem Fabrikanten Ware für 12800 *Frc*, und erhält auf je 100 *M*, die er zu bezahlen hat,

$4\frac{3}{4}$ M Nachlaß ($4\frac{3}{4}$ Prozent Rabatt in Hundert). Wieviel beträgt der Rabatt und wieviel die bare Zahlung?

10) Ein anderer kauft Ware für den Wert von 12800 Fl, erhält aber auf je 100 Fl Ware für $4\frac{3}{4}$ Fl Ware hinzu (d. h. er zahlt für je $104\frac{3}{4}$ Fl nur 100 Fl = $4\frac{3}{4}$ Prozent Rabatt auf Hundert). Wieviel beträgt der Rabatt, wieviel die bare Zahlung?

11) Jemand kauft für a M Ware. Wieviel wird in Abzug gebracht, und wieviel beträgt die Zahlung, wenn ein Rabatt von p Prozent in Hundert, wieviel, wenn ein Rabatt von p Prozent auf Hundert gestattet wird?

12) Ein Wechsel von a Fl, der erst nach n Monaten fällig ist, wird mit einem jährlichen Diskonto (Abzug) von p Prozent bezahlt. Wieviel beträgt der Diskonto, wieviel die Zahlung?

13) Jemand hat in 4 Terminen jedesmal nach n Jahren ein Kapital von k M zu bezahlen. Wieviel kann er jetzt bar bezahlen, wenn jährlich p Prozent auf Hundert diskontiert werden?

14) Ein Kaufmann ist genötigt, seine Ware so zu verkaufen, daß er für $43\frac{1}{2}$ kg ebensoviel erhält, als ihm 36 kg gekostet haben. Wieviel Prozent Schaden erleidet er?

15) Wenn Friedrichsdor gegen Silber $13\frac{1}{3}$ Prozent Agio (Aufgeld) thun, wieviel machen 10 M Gold in Silbergeld aus? wieviel a M Gold in Silber? wieviel n M Silber in Gold?

16) Wenn ein Staatspapier zu $97\frac{3}{4}$ Prozent (100 = pari) steht, wieviel sind a Fl von jenem Papiere in Münze wert? wieviel erhält man von jenem Papiere für b Fl?

17) Wenn die Aktien auf eine Eisenbahn, welche jährlich 10 Prozent reinen Gewinn abwirft, auf 168 stehen (100 = pari), zu wieviel Prozent Zinsen legt man sein Geld an, wenn man Aktien kauft?

18) Ein Arbeiter verdient in a Tagen so viel, als ein anderer in b Tagen. Der erstere verdient in t Tagen s M. Wieviel verdient der andere in derselben Zeit?

19) Ein Maurer führt, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in 17 Tagen 27 cbm Mauer auf. Wieviel Stunden muß er täglich arbeiten, um in derselben Zeit 33 cbm aufführen zu können?

20) In wieviel Jahren bringt das Kapital k so viel Zinsen, als das Kapital m bei gleichen Prozenten in n Jahren?

21) Das Vorderrad eines Wagens hat p m im Umfange, das Hinterrad q m. Wieviel Mal hat sich letzteres umgedreht, wenn ersteres n Umläufe gemacht hat?

22) Aus einem Behälter, der 23711 *l* Wasser enthält, werden alle $4\frac{1}{2}$ Minuten durch ein Rohr $87\frac{1}{4}$ *l* abgelassen. In welcher Zeit wird der Behälter leer?

23) Die Geschwindigkeiten zweier sich bewegenden Körper verhalten sich wie $C : c$. Der eine gebraucht zu einem Wege t Sekunden; wieviel wird der andere zu demselben Wege gebrauchen?

24) In jedem Kreise ist das 113fache der Peripherie nahe dem 355fachen des Durchmessers gleich. Wie groß ist der Umfang der Erdbahn, wenn dieselbe kreisförmig angenommen wird, und wenn, den neuesten Forschungen gemäß, die Entfernung der Erde von der Sonne im Mittel zu 19963000 geographischen Meilen angenommen wird?

25) Wenn 41 *l* Wasser ebensoviel als 50 *l* Weingeist, und 1 *l* Wasser 1 *kg* wiegt, wieviel wiegt 1 *l* Weingeist?

26) 12 *kg* gesponnener Flachs geben 67 *m* Leinwand, wenn dieselbe 1 *m* breit ist. Wieviel Meter geben 12 *kg*, wenn dieselbe 1,5 *m* breit ist?

27) Das Straßburger Münster wirft am 21. Juni mittags auf dem horizontalen Boden einen Schatten von 45,8 *m* Länge; ein in der Nähe des Turmes aufgestellter senkrechter Stab von $2\frac{3}{4}$ Pariser Fuß Höhe wirft zu derselben Zeit einen Schatten von $10\frac{1}{2}$ Pariser Zoll Länge. Wie läßt sich hieraus die Höhe des Straßburger Münsters berechnen?

28) Um die ausgeworfene Erde eines Festungsgrabens in 12 Tagen 832 *m* weit zu bringen, werden 20 Arbeiter erfordert. Wieviel Arbeiter sind nötig, um in derselben Zeit die ausgeworfene Erde 1088 *m* weit fortzuschaffen?

29) Mittels einer Dampfmaschine von 20 Pferdekräften werden in einer gewissen Zeit 1700 *hl* Wasser in die Höhe gepumpt. Wieviel Hektoliter werden mittels einer Dampfmaschine von 29 Pferdekräften in derselben Zeit auf dieselbe Höhe gepumpt?

30) Wegen bevorstehender Überschwemmung eines Flusses soll ein am Ufer liegender Warenvorrat in $2\frac{1}{4}$ Stunden an einen sicheren Ort hingeschafft werden. Hierzu sind 13 Arbeiter nötig, wenn jeder derselben in einer Minute 45 *m* zurücklegt. Wieviel Arbeiter sind nötig, wenn jeder derselben in einer Minute nur 39 *m* abmacht, und die Waren in derselben Zeit fortgeschafft werden sollen?

31) Eine gewisse Last in einer bestimmten Zeit fortzuschaffen, sind 4 Pferde nötig, wenn jedes 2000 *kg* zu ziehen imstande ist. Wieviel Pferde sind nötig, wenn jedes derselben nur 1600 *kg* fortzuziehen vermag?

32) Ein Diamant von 1,18 *g* kostet 120 Fl. Wieviel kostet ein Diamant von gleicher Güte und Form, der 2,36 *g* schwer ist?

Bemerkung. Die Preise der Diamanten stehen im quadratischen Verhältnisse ihrer Gewichte.

33) Wenn ein Körper in 6 Sekunden 176,5 *m* fällt, wie tief ist ein Brunnen, wenn ein in denselben fallender Stein in 3½ Sekunden den Boden erreicht?

Bemerkung. Bei fallenden Körpern verhalten sich die vom Anfange an durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten.

34) Die Erde hat 1718,87 geogr. M. Durchmesser und 9 261 238 geogr. Quadratmeilen Oberfläche. Die Sonne hat 186 192 geogr. Meilen Durchmesser. Wie groß ist die Oberfläche der Sonne?

Bemerkung. Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

35) In einen Weingarten gehen 3744 Stöcke, wenn dieselben quadratisch in einer Entfernung von 1¼ *m* gepflanzt werden. Wieviel Stöcke können gepflanzt werden, wenn die Entfernung derselben nur 1 *m* beträgt?

Bemerkung. Man denke den Weingarten in Quadrate abgeteilt, ein Mal von 1¼ *m*, ein anderes Mal von 1 *m* Länge und in die Mitte jedes Quadrates einen Weinstock gesetzt. Die Weinstöcke an den Rand des Gartens setzen zu wollen, wäre unstatthaft.

36) Ein Ochs ist auf einer Weide an einem 2¼ *m* langen, am Ende befestigten, Seile angebunden und frißt in zwei Tagen alles Gras, was er erreichen kann, ab. Wieviel Tage wird er mit dem Futter auskommen können, wenn das Seil 3¾ *m* lang ist?

Bemerkung. Kreise stehen im quadratischen Verhältnisse ihrer Halbmesser.

37) Die Stärke des Sonnenlichtes auf unserer Erde ist der Lichtstärke von 50 000 Wachskerzen in 1 *m* Entfernung gleich. Wie groß ist die Lichtstärke der Sonne a) auf dem Planeten Uranus, b) auf dem Planeten Neptun, wenn die mittleren Entfernungen dieser Planeten in Vergleich zur mittleren Entfernung der Erde von der Sonne 19,182 639 und 30,033 86 sind?

Bemerkung. Bei doppelter, dreifacher, vierfacher u. s. w. Entfernung ist das Licht 4, 9, 16 u. s. w. mal so schwach.

38) Ein hohler Würfel von 25 *cm* Länge faßt 15⅝ *l* Wasser. Wieviel Liter enthält ein kubischer Wasserbehälter, dessen Höhe 150 *cm* beträgt?

39) Eine Kanonenkugel von 12,75 *kg* Gewicht hat 15 *cm* Durchmesser. Wie schwer ist eine Kanonenkugel, deren Durchmesser 9 *cm* beträgt?

Bemerkung. Kugeln stehen dem körperlichen Inhalte nach im kubischen Verhältnisse ihrer Durchmesser.

40) 250 *kg* 108 *km* weit zu fahren, kostet 7,50 *M*. Wieviel muß man bezahlen, um 1050 *kg* 175 *km* weit zu fahren?

41) Um einen Kanal von 245 *m* Länge, 3,3 *m* Tiefe, 7 *m* Breite auszugraben, gebrauchen 140 Arbeiter, wenn sie täglich $7\frac{1}{2}$ Stunden arbeiten, 546 Tage. Auf welche Länge kann ein Kanal von 5 *m* Tiefe und 8,2 *m* Breite in 324 Tagen durch 182 Arbeiter gegraben werden, wenn dieselben täglich $8\frac{1}{4}$ Stunden arbeiten, und wenn ihr Fleiß zu dem der ersteren sich wie 8 : 9 verhält?

42) Ein cylindrischer Wasserbehälter von 1,5 *m* Breite und 1,2 *m* Höhe kann in 4 Stunden ausgeleert werden. In welcher Zeit wird ein Wasserbehälter leer, der eine Breite von 1,2 *m* und eine Höhe von 1,5 *m* hat, wenn aus diesem in der nämlichen Zeit 5 *l* ausgeschöpft werden, in der aus jenem 6 *l*?

43) a *M* geben in n Jahren q *M* Zinsen. Wieviel Zinsen geben bei gleichem Zinsfuße b *Frc* in r Jahren?

44) Ein sich gleichförmig bewegender Körper, der alle t Minuten s *m* zurücklegt, gelangt von einem Orte zum anderen in n Stunden. In welcher Zeit wird ein Körper denselben Raum zurücklegen, wenn er alle p Minuten q *m* macht?

45) Zwei gezahnte Räder, von denen das erste 15, das andere 28 Zähne hat, greifen ineinander. Wenn sich nun das erste in $7\frac{1}{2}$ Sekunden 16 mal umdreht, wieviel Mal dreht sich das zweite in 21 Sekunden um?

46) Ein voller Wasserbehälter, aus dem man alle m Minuten mit einem Gefäße, welches q *l* faßt, n mal herausschöpft, wird in s Stunden leer. In welcher Zeit wird der leere Behälter angefüllt sein, wenn man mit einem Gefäße, welches t *l* faßt, alle u Minuten v mal Wasser eingießt?

47) Um in einem Bergwerke Bleierz aus einer Tiefe von 175 *m* zu fördern, sind 21 Pferde nötig, von denen jedes in 4 Sekunden 115 *kg* 3 *m* in die Höhe zu ziehen imstande ist. In einem anderen Bergwerke, dessen rohe Ausbeute sich zu der des ersteren wie 16 : 9 verhält, soll Erz aus einer Tiefe von 135 *m* in die Höhe geschafft werden. Wieviel Pferde sind hierzu nötig, wenn jedes in 15 Sekunden 103,5 *kg* 10 *m* hoch zu ziehen imstande ist?

48) Verfertigt man aus Blei und aus Zinn zwei Würfel von gleichem Gewichte, so verhalten sich die Höhen derselben wie 56 : 65. Wenn nun 18 *ccm* Zinn 130 *g* wiegen, wie schwer sind 13,7 *ccm* Blei?

49) Ein Mühlstein von Basalt, von 1,25 *m* Durchmesser und 0,62 *m* Dicke, ist 814 *kg* schwer. Wie schwer ist ein Mühlstein

von Quarz, von 1,12 *m* Durchmesser und 0,54 *m* Dicke, wenn zwei gleich große Stücke von Basalt und Quarz sich dem Gewichte nach wie 13 : 15 verhalten?

50) Schöpft man aus einem kubischen Behälter, der 2,5 *m* hoch ist, mit einem cylindrischen Gefäße von 21 *cm* Höhe und 16 *cm* Durchmesser Wasser aus, so wird der Behälter in 2¼ Stunden leer. In welcher Zeit wird ein kubischer Behälter leer, der 2,8 *m* hoch ist, wenn man mit einem cylindrischen Gefäße von 25 *cm* Höhe und 18 *cm* Durchmesser in 23½ Minuten aus demselben ebensoviel Mal Wasser ausschöpft, als mit dem ersten Gefäße aus dem ersten Behälter in 17 Minuten?

51) Wieviel Meter machen 3 alte preuß. Ellen, wenn 1 preuß. Elle = 2 Fuß 1½ Zoll preuß., 1 Fuß preuß. = 139,13 Pariser Linien, 443,296 Pariser Linien = 1 Meter?

52) Wieviel preuß. Ohm machen 11 *hl* aus, wenn 1 Ohm = 120 Quart, 27 Quart = 1 Kubikfuß preuß., 51 Fuß preuß. = 16 *m*, 1 *cbm* = 10 *hl*?

53) Wieviel Hektoliter machen 10 alte preuß. Scheffel, wenn ein preuß. Scheffel den hohlen Raum eines rechtwinkligen Parallelepipeds von 1½ Fuß Länge, 1½ Fuß Breite und 1 Fuß Höhe ausfüllt, und 51 Fuß preuß. = 16 *m*, 1 *cbm* = 10 Hektoliter?

54) Jemand vertauscht 512 *m* Tuch und erhält für je 7 *m* 9 *kg* Kaffee. Den Kaffee vertauscht er gegen Honig und erhält für je 9½ *kg* Kaffee 12½ *kg* Honig. Den Honig vertauscht er gegen Reis und giebt für je 8½ *kg* Reis 3½ *kg* Honig. Den Reis vertauscht er gegen Tabak und erhält für je 17 englische Pfund Reis 6½ englische Pfund Tabak. Wieviel Tabak erhält er für obige 512 *m* Tuch?

55) Jemand will 1218 Rubel in deutschen Reichsmark bezahlen. Nun aber machen 14 Rubel 5 Dukaten und 6 Dukaten 51 *M*. Wieviel hat er zu bezahlen?

56) Eine alte preußische Meile verhält sich zu einer deutschen Meile, wie 2000 : 1972, eine deutsche Meile zu einer englischen Seemeile, wie 1972 : 493, eine englische Seemeile zu einer französischen Liene, wie 493 : 1183, und eine französische Lieue zu einer niederländischen Stunde, wie 1183 : 1503. In welchem Verhältnisse stehen je zwei der genannten Meilen zu einander?

57) Macht man aus verschiedenen Stoffen gleich große Würfel, so verhalten sich dem Gewichte nach: Eisen zu Blei, wie 23 : 36, Blei zu Kupfer, wie 35 : 26, Kupfer zu Kreide, wie 15 : 4, Kreide zu Eichenholz, wie 31 : 23, Eichenholz zu Tannenholz, wie 2 : 1. In welchem Verhältnisse stehen bei gleichem körperlichen Inhalte die Gewichte je zweier der genannten Körper?

58) Dem Durchmesser nach verhalten sich die nachstehenden Himmelskörper, wie folgt: die Sonne zur Erde, wie 325 : 3, die Erde zum Monde, wie 11 : 3, der Mond zur Venus, wie 7 : 24, die Venus zum Jupiter, wie 1 : 12, der Jupiter zum Saturn, wie 11 : 9. In welchem Verhältnisse stehen die Durchmesser je zweier der genannten Himmelskörper zu einander?

59) Die Reichs-Kupfermünzen bestehen aus einer Metallmischung von 95 Teilen Kupfer, 4 Teilen Zinn und einem Teile Zink. Wieviel hat man von jeder Metallsorte nötig, um 735 Mark in Zweipfennigstücken, deren 300 ein Kilogramm wiegen, und wieviel, um dieselbe Summe in Einpfennigstücken, deren 500 ein Kilogramm wiegen, auszuprägen?

60) Zu Neusilber, welches dem Silber von dem Gehalte 750 am nächsten kommt, nimmt man 53,4 Teile Kupfer, 29,1 Teile Zink und 17,5 Teile Nickel. Wieviel von jedem der Metalle hat man nötig, wenn 1200 *kg* Neusilber dargestellt werden sollen und wenn man beim Zusammenschmelzen $1\frac{1}{2}$ Prozent Verlust erleidet?

61) Das Verhältnis des Alters eines Vaters zu dem seines Sohnes ist 9 : 5. Wie alt sind Vater und Sohn, wenn ersterer 25 Jahre älter ist, als letzterer?

62) Zum Sprengen der Steine in Bergwerken bedient man sich eines Pulvers, in dem das Verhältnis des Salpeters zur Kohle 16 : 5, das des Salpeters zum Schwefel 10 : 3 ist. Wieviel hat man von den angeführten Stoffen nötig, um 5934 *kg* Pulver zu verfertigen?

63) A, B, C und D nehmen gemeinschaftlich ein Lotterielos. Hierzu giebt A 24 *M*, B 38 *M* 50 *ℌ*, C 20 *M*, D 39 *M*. Das Los kommt heraus mit 30 000 *M*, wovon aber $12\frac{1}{2}$ Prozent für die Lotterie-Kasse und $3\frac{1}{3}$ Prozent für den Einnehmer abgezogen werden. Wieviel erhält jeder?

§ 33 b. Wiederholungs-Beispiele.

1) Wieviel Jahre sind: α) von a Jahren vor Christus bis b Jahre nach Christus? β) von c Jahren vor Christus bis d Jahre vor Christus? γ) von m Jahren nach Christus bis n Jahre nach Christus?

2) Ein Thermometer zeigt abends n Grad über Null und fällt nachts auf p Grad unter Null. Wieviel Grad ist dasselbe gefallen?

3) Ein Ort A liegt m Meter höher als B, B n Meter höher als C, C p Meter tiefer als D, D q Meter tiefer als E, E r Meter höher als F und F endlich t Meter tiefer als G. Wann wird A

höher, wann tiefer als G liegen, und um wieviel liegt A höher oder tiefer als G?

4) Die folgenden Ausdrücke von 1. bis 8. sollen zu einander addiert und von der Summe sämtliche Summanden, und zwar einzeln in der Ordnung 1., 2., 3. bis 8., subtrahiert werden, bis zuletzt nichts übrigbleibt.

1) $2\frac{1}{2}a-3\frac{1}{4}b+6\frac{3}{4}e-5\frac{1}{3}d-4\frac{1}{4}e$; 2) $1\frac{1}{3}a+2\frac{1}{3}b-5\frac{1}{2}c+4\frac{3}{4}d-3\frac{1}{3}e$;
3) $2\frac{1}{4}a+1\frac{1}{4}b-2\frac{3}{4}c-1\frac{1}{3}d+1\frac{1}{4}e$; 4) $2\frac{1}{2}a-4\frac{3}{4}b-6\frac{1}{3}c-7\frac{1}{8}d-5\frac{1}{6}e$;
5) $6\frac{3}{4}a-7\frac{3}{4}b+7\frac{3}{8}c+6\frac{1}{3}d-4\frac{1}{4}e$; 6) $5\frac{3}{4}a-3\frac{1}{4}b-2\frac{1}{3}c-3\frac{3}{8}d-5\frac{1}{4}e$;
7) $7\frac{1}{3}a-5\frac{5}{8}b-6\frac{2}{3}c-7\frac{3}{4}d-3\frac{1}{6}e$; 8) $9\frac{1}{3}a+8\frac{1}{2}b+4\frac{3}{4}c+6\frac{2}{3}d-4\frac{1}{3}e$.

5) In dem folgenden Beispiele:

$$\begin{array}{r}
7\frac{1}{2}a-2\frac{3}{4}a-5\frac{1}{3}a+7\frac{3}{4}a-6\frac{1}{3}a+5\frac{1}{2}a \\
-3\frac{3}{4}a+1\frac{1}{3}a+2\frac{1}{4}a-5\frac{1}{2}a-6\frac{1}{4}a-7\frac{3}{4}a \\
-2\frac{1}{3}a-5\frac{1}{4}a-6\frac{2}{3}a-3\frac{3}{4}a+2\frac{1}{3}a-9\frac{1}{4}a \\
-3\frac{1}{2}a+2\frac{1}{3}a-5\frac{1}{4}a+6\frac{3}{4}a-7\frac{1}{2}a+5\frac{1}{3}a \\
-6\frac{1}{3}a-2\frac{1}{3}a-4\frac{1}{3}a-5\frac{1}{4}a+6\frac{1}{8}a-6\frac{1}{4}a \\
2\frac{1}{2}a-1\frac{1}{4}a+6\frac{1}{2}a+9\frac{1}{3}a-1\frac{1}{4}a+3\frac{3}{4}a \\
-2\frac{3}{4}a+1\frac{2}{3}a-3\frac{1}{4}a-5\frac{5}{8}a+6\frac{1}{4}a-7\frac{1}{8}a
\end{array}$$

soll 1) die Summe der einzelnen wagerechten Reihen genommen und das Resultat rechts daneben geschrieben werden; 2) die Summe der senkrecht übereinander stehenden Glieder mit jedesmaliger Berücksichtigung der Zeichen genommen und das Resultat unter jede Reihe geschrieben werden; 3) die Summe der neuen senkrechten Reihe sowohl, als der neuen wagerechten Reihe gebildet werden. Hat man richtig gerechnet, so wird man bei 3) zu denselben End-Resultaten gelangen.

6) Was erhalte ich, wenn ich die halbe Differenz zweier beliebigen Zahlen α) zur halben Summe dieser Zahlen addiere, β) von der halben Summe subtrahiere? Was erhalte ich ferner, wenn ich γ) die halbe Summe zweier Zahlen von der größeren Zahl abziehe; δ) die halbe Differenz zweier Zahlen von der größeren Zahl abziehe; ε) die halbe Summe zweier Zahlen um die kleinere Zahl vermindere; ζ) die halbe Differenz zweier Zahlen zur kleineren Zahl addiere; η) die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multipliziere; ϑ) zum Quadrate der Summe zweier Zahlen das Quadrat ihrer Differenz addiere; ι) von der Summe der Quadrate zweier Zahlen das Quadrat der Differenz der Zahlen abziehe, oder $\varkappa$) von dem Quadrate der Summe zweier Zahlen das Quadrat der Differenz der Zahlen abziehe? λ) Was muß ich von dem Quadrate der Summe zweier Zahlen abziehen, um das

Quadrat der Differenz der Zahlen zu erhalten? μ) Was muß ich zu dem Quadrate der Differenz zweier Zahlen addieren, um das Quadrat der Summe zu erhalten? Die Sätze sollen sowohl in algebraischen Zeichen, als in Worten ausgedrückt werden.

7) In den Ausdrücken: α) $([(x - 10)\,x + 35]\,x - 50)\,x + 24$; β) $36 + [13 - (13 - [1 + x]\,x)\,x]\,x$ die Klammern aufzuheben und die Ausdrücke selbst sowohl, als die ihnen gleichen für α) $x = 1$, β) $x = 2$, γ) $x = 3$, δ) $x = 4$ zu berechnen.

8) Zu berechnen: α) $(p + q)(p - q)$; β) $(2a - x)(2a + x)$; γ) $(x + 1)(1 - x)$; δ) $(y^2 + y)(y^2 - y)$; ε) $(3a - 7b)(7b + 3a)$; ζ) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$; η) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$.

9) Folgende Beispiele in § 16 nach der Formel für $(p + q)(p - q)$ aufzulösen: Nr. 29 β), Nr. 30 α) und β), Nr. 43, 45, 46 und 47.

10) In zwei Faktoren zu zerlegen: α) $x^2 - y^2$; β) $(a + b)^2 - c^2$; γ) $[\frac{1}{2}(a + b)]^2 - [\frac{1}{2}(a - b)]^2$; δ) $[\frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{2}(b - c)]^2 - [\frac{1}{2}(c - a)]^2$.

11) α) $\left(a - \frac{ac}{b}\right)(b + c)$; β) $\left(\frac{x^2}{y} + x\right)\left(y - \frac{y^2}{x}\right)$;

γ) $\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}\right)$; δ) $\left(m + \frac{mb^2}{a^2}\right)\left(n + \frac{nb}{a}\right)(a - b)$.

12) Wem ist α) $(a + b + c)^2$, wem β) $(a + b + c + d)^2$ gleich? Aus den Resultaten dieser Formeln sollen Sätze hergeleitet werden.

13) α) $(a - b + c)^2$; β) $(a + 2b - 3c)^2$; γ) $(a - 3b - 5c)^2$; δ) $(2m - 3n + 4p)^2$; ε) $(a - 2b - 3c + 4d)^2$.

14) α) $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$; β) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$; γ) $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y)$; δ) $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$; ε) $(2a^2x^2 - 2abx + b^2)(2a^2x^2 + 2abx + b^2)$.

15) Nach den Beispielen der vorigen Nummer aufzulösen: α) $(9a^2 + 6ab + 4b^2)(3a - 2b)$; β) $(25a^2 - 20ab + 16b^2)(5a + 4b)$; γ) $(27a^3 + 3a^2b + \frac{1}{3}ab^2 + \frac{1}{27}b^3)(3a - \frac{1}{3}b)$, δ) $(\frac{1}{64}x^3 - \frac{1}{48}x^2y + \frac{1}{36}xy^2 - \frac{1}{27}y^3)(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y)$; ε) Nr. 44, § 16; ζ) Nr. 48, § 16.

16) α) $\frac{1}{2}(a + 1)(b + 1)(c + 1) + \frac{1}{2}(a - 1)(b - 1)(c - 1)$;
β) $\frac{1}{2}(a + 1)(b - 1)(c + 1) + \frac{1}{2}(a - 1)(b + 1)(c - 1)$;
γ) $(2 - x)^2(1 + x)$; δ) $(a + x)^2(a - 2x)$.

17) Aus $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} + 1$ soll $\frac{(a + b + c - d)(a + b - c + d)}{2(ab + cd)}$ abgeleitet werden.

18) Umzuformen: α) $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)} + 1$;

β) $1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$; γ) $1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)}$.

19) α) $\dfrac{a + b - \dfrac{2(a + 2b)}{3}}{a - b - \dfrac{2(a - 2b)}{3}}$; β) $\dfrac{x - y + \dfrac{2xy}{x - y}}{x + y - \dfrac{2xy}{x + y}}$;

γ) $\left(\dfrac{2x}{x - z} - \dfrac{x + z}{x}\right) \cdot \dfrac{x - z}{z^2 + x^2}$ zu vereinfachen.

20) Was kann für α) $1 : (1 - x)$, β) $1 : (1 + x)$ näherungsweise gesetzt werden, wenn x eine sehr kleine Zahl ist?

Antw.: α) $1 + x$; β) $1 - x$.

21) Auszuführen: α) $(p^2 - q^2) : (p - q)$; β) $(p^2 - q^2) : (p + q)$; γ) $(p^3 - q^3) : (p - q)$; δ) $(p^4 - q^4) : (p + q)$; ε) $(p^4 - q^4) : (p^2 - q^2)$; ζ) $(p^5 - q^5) : (p - q)$; η) $(p^5 + q^5) : (p + q)$; ϑ) $(p^6 - q^6) : (p - q)$.

22) Mit Hilfe der vorhergehenden Formeln aufzulösen: § 25, Nr. 11 γ) und δ), 12 δ), 15 γ) und δ), 27, 28, 30 und 31.

23) $[(x + y)^4 - (x - y)^4] : [(x + y)^3 + (x + y)^2 (x - y) + (x + y)(x - y)^2 + (x - y)^3]$. Antw.: $2y$.

24) α) Es soll $1\frac{3}{4}x - 1\frac{2}{3}y$ mit $3\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{4}y$ multipliziert werden und das Produkt mit $2\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{4}y$. Das letztere Produkt soll dann durch $3\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{4}y$ und der Quotient endlich durch $1\frac{3}{4}x - 1\frac{2}{3}y$ dividiert werden; β) $(a^6 - b^6) : (a^2 - ab + b^2)$; γ) $(4n^4y^4 + p^4) : (2n^2y^2 + 2npy + p^2)$; δ) $1 \mp x + (1 - 2a)x^2 \pm a(1 - a + a^2)x^3] : (1 \pm ax)$; ε) $[(1 - a)(1 + a)^2 + (1 - 3a)(1 + a)x - (1 + 3a)x^2 - x^3] : [1 - (a + x)]$.

25) Auszuführen: $\left(\dfrac{ap^2 - aq^2 + 2bpq}{p^2 + q^2}\right)^2 + \left(\dfrac{bq^2 - bp^2 + 2apq}{p^2 + q^2}\right)^2$.

26) In den folgenden Ausdrücken sollen sowohl die Produkte, welche mit dem Faktor x, als auch die, welche mit dem Faktor y behaftet sind, vereinigt werden:

α) $ax + by - \frac{1}{2}(a + b)x - \frac{1}{2}(a - b)y$;
β) $\frac{1}{2}(m + n)x - \frac{1}{2}(p - q)y + \frac{1}{2}(m - n)x + \frac{1}{2}(p + q)y$;
γ) $(a + b)\,2ax - (a + b)^2x + (p - q)\,2qy + (p - q)^2y$.

27) Auf gemeinschaftlichen Divisor zu bringen und zu vereinigen:

α) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{2b(a - b)} - \dfrac{a^2 + ab + b^2}{2b(a + b)}$;

β) $\dfrac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{2(a + b)a^3} + \dfrac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}{2(a - b)a^3}$.

28) Es sei $y = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $z = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; wie groß ist y bloß durch x ausgedrückt?

29) $ax + bx - cx$ für $x = d : (a + b - c)$ zu berechnen.

30) Ebenso: $(a^2 - x)a + bx$ für $x = a^2 + ab + b^2$.

31) Ebenso: $\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}-\frac{a+b}{x}$ für $x=a^2-b^2$.

32) Ebenso: $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}-\frac{4ab}{4b^2-x^2}$ für $x=\frac{ab}{a+b}$.

33) Was wird aus den beiden Formeln: α) $mx+ny$, β) $rx+sy$, wenn in jeder $x=\frac{ps-nt}{ms-rn}$, $y=\frac{mt-pr}{ms-rn}$ gesetzt wird?

34) In α) $\frac{x+y-1}{x-y+1}$, β) $\frac{y-x+1}{x-y+1}$ soll für x der Wert $\frac{a+1}{ab+1}$ und für y der Wert $\frac{a(b+1)}{ab+1}$ gesetzt werden.

35) Ebenso: $x=\frac{a+b^2}{2b}$, $y=\frac{a-b^2}{2b}$ in α) $x-y$, β) x^2-y^2.

36) Zu beweisen, daß: α) $(x^2+y^2)(z^2+u^2)=(xz+yu)^2+(xu-yz)^2$; β) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$; γ) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(n^2+q^2+r^2+s^2)=(an+bq+cr+ds)^2+(aq-bn+cs-dr)^2+(ar-cn+dq-bs)^2+(br-cq+as-dn)^2$.

37) Wenn $A=b\gamma+c\beta+a\alpha$, $B=c\gamma+a\beta+b\alpha$, $C=a\gamma+b\beta+c\alpha$, so ist: 1) $(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)=A+B+C$; 2) $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)=A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC$; 3) $(a^3+b^3+c^3-3abc)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)=A^3+B^3+C^3-3ABC$. Diese Formeln zu beweisen.

38) $(3-x)(5-x)-(7-x)(x-1):(2-x)$ für x gleich α) 3, β) 4, γ) 5, δ) 1, ε) 2, ζ) -3, η) -5 zu berechnen.

39) Welche Werte erhält der Ausdruck $x^2-(2an-n)x+a(a-n)$ für α) $x=a$, β) $x=a-n$, γ) $x=a+p$, δ) $x=a-n-p$, wenn a, n und p positive Zahlen bedeuten?

40) Wenn $a>b$, $b>c$ ist, für welche Werte von x wird der Ausdruck $(a-x)(b-x):(c-x)$ 1) positiv, 2) negativ, 3) Null, 4) unendlich?

41) Welche Werte muß man für x nehmen, wenn das Produkt $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ zu Null werden soll?

42) α) x^2-49, β) x^2-p^2 in zwei Faktoren zu zerlegen und die Werte von x anzugeben, welche das Produkt zu Null machen.

43) Ebenso α) x^2-5x+6, β) $x^2-1\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ in Produkte von zwei Faktoren, und γ) x^3+10x^2+21x in ein Produkt von drei Faktoren zu verwandeln, und die Werte für x anzugeben, durch welche jedes der Produkte zu Null wird.

44) α) x^3-y^3, β) x^4-y^4, γ) x^5-y^5, δ) x^3+y^3, ε) x^5+y^5, ζ) x^6-y^6 in Faktoren zu zerlegen.

45) Das gemeinschaftliche Maß α) zwischen $ab^2c^2 - a + bc^2 - c$ und $b^2c^2 - 1$; β) zwischen $ab^2 + ab^2cd - abcd^2 - ad^2 + bcd + b - cd^2 - d$ und $b^2 + b^2cd - bcd^2 - d^2$; γ) zwischen $x^5 + 5x^4 + 8x^3 + x^2 - 8x - 7$ und $x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x - 10$ zu suchen.

46) Der Quotient $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$ erlangt für den Wert $x = 3$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$; welches ist der wahre Wert des Quotienten? Antw.: Der obige Quotient wird $= \frac{x-5}{x-7}$, wenn man Dividend und Divisor durch den gemeinschaftlichen Teiler $x - 3$ dividiert und erhält für den Wert $x = 3$ den Wert $\frac{1}{2}$.

47) Den Wert des Quotienten $\frac{x^3 - 15x^2 + 74x - 120}{x^3 - 12x^2 + 41x - 30}$ für α) $x = 5$, β) $x = 6$ anzugeben.

48) Den Wert des Quotienten $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$ für $x = a$ anzugeben.

49) Das Produkt $n(n+1)(n+2)$ sowohl, als auch $n(n+1)(2n+1)$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, ist immer durch 6 teilbar. Warum?

50) Das Produkt $ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, ist immer teilbar durch 30. Warum?

51) Die Summe aus dem größten und kleinsten Gliede einer geometrischen Proportion ist größer, als die Summe der beiden anderen Glieder. Warum?

52) α) Die mittlere geometrische Proportionale zweier ungleichen Zahlen a und b ist kleiner, als die mittlere arithmetische Proportionale dieser Zahlen. Warum? β) Das geometrische Mittel zweier ungleichen Zahlen a und b ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem arithmetischen nnd harmonischen Mittel dieser Zahlen. Warum?

53) Wenn $a : b = c : d$ ist, in welchem Falle ist auch $(a + m) : (b + m) = (c + m) : (d + m)$?

54) Wenn $a : b = c : d$ ist, so ist auch $ab : cd = (a + b)^2 : (c + d)^2$ und $ab : cd = (a^2 + b^2) : (c^2 + d^2)$. Warum?

55) In welchem Falle folgt aus $a : b = c : d$ und $a' : b' = c' : d'$ die Proportion $(a + a') : (b + b') = (c + c') : (d + d')$?

56) Stellt sich bei den Multiplikationen von α) $(x - a)(x - b)(x - c)$, β) $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, und γ) $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$, wenn man die Resultate nach Potenzen von x ordnet, irgend ein Gesetz heraus?

57) Es sollen ausgeführt und nach den Potenzen von x geordnet werden: α) $(x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d)$;
β) $(x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d)(x^2 - ex + f)$.

58) Die alten Mathematiker nannten befreundete Zahlen

ein Paar Zahlen, deren jede gleich ist der Summe der aliquoten Teile der anderen. Michael Stifel sagt: „Es ist lustig zu sehen, wie so eben alle Partes aliquote von 220 machen 284 und wiederumb alle Partes aliquote von 284 so eben machen 220." Van Schooten führt außer den Zahlen 220 und 284 noch als befreundete Zahlen an: 18416 und 17296; 9437056 und 9363584; ferner Euler: 10744 und 10856; 63020 und 76084. Es soll die Richtigkeit dieser Behauptungen dargethan werden.

59) Eine Zahl wird eine vollkommene Zahl genannt, wenn die Summe ihrer Faktoren ihr selbst gleich ist. Euklides giebt die Regel: „Ist die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 \ldots. + 2^n = 2^{n+1} - 1$ eine Primzahl, so ist $2^n(2^{n+1} - 1)$ eine vollkommene Zahl." Es sollen Zahlen dieser Eigenschaft aufgesucht werden.

60) Für die Teilbarkeit einer Zahl durch 7 gilt folgende Regel, deren Richtigkeit bewiesen werden soll. Man multipliziere die Zahl der Einer, Zehner, Hunderte und Tausende u. s. w. einzeln der Ordnung nach bezüglich mit 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, 3, 2 u. s. w. und nehme die algebraische Summe dieser Produkte. Ist dieselbe durch 7 teilbar, so ist die ganze Zahl durch 7 teilbar. Beispiele: 278355; 111111; 387387; 1001.

Dritter Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

A. Potenzen mit ganzen Exponenten.

§ 34.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad \text{(Vgl. § 14, II.)}$$

1) Wie werden Potenzen von gleichen Basen (Grundzahlen, Dignanden) miteinander multipliziert?

2) Wie wird eine Zahl mit einer Summe potenziert?

3) α) $a^{36} \cdot a^{17}$; β) $a^{27} \cdot a^{36} \cdot b^{12} \cdot b^{13} \cdot b^{24} \cdot a^{45} \cdot b^{59}$; γ) $a^{x-y} a^y$; δ) $x^n \cdot x$; ε) $y^{n-1} \cdot y$; ζ) $y \cdot y^{n-2} \cdot y$.

4) α) $a^x a^{3x} b^{4y} a^{2x} b^y$; β) $a^{m-n} a^n b^{2m-3n} b^{4n-m}$; γ) $(a^m + a^n)(a^m - a^n)$.

5) Womit muß man $387420489 = 3^{18}$ multiplizieren, um 3^{22} zu erhalten, und wie groß ist 3^{22}?

6) Wenn $13^5 = 371293$ und $13^4 = 28561$, wie groß ist 13^9?

7) $\alpha)$ $(x + y)^p \cdot (x + y)^q$; $\beta)$ $(a - b)^{m-1} \cdot (a - b)$.
8) $(a^{2m-n} + b^{3m-7n}) \times (a^{2n-2m} + b^{7n-2m})$.
9) $\alpha)$ $(a^{3m-n} + a^{2m} + a^{4m-2n}) \times (a^m - a^n)$;
$\beta)$ $(a^{3n} - a^{2n+m} + a^{n+2m} - a^{3m})(a^n + a^m)$.
Aufl.: $\alpha)$ $a^{5m-2n} - a^{2m+n}$.
10) $(a^{3m-6n} + a^{5m-8n} + a^{7m-10n} + a^{9m-12n}) \cdot (a^{m-2n} - a^{3m-4n})$.
11) $4x^m y^n : (9z^x t^{y+3}) : (16z^{y-x} t^{3-y})$.
12) $\dfrac{z^{3m-2n}}{4(m+n)} \cdot z^{m+6n}$. 13) $\dfrac{a^{8m-7n} b^{6p-5q}}{c^{4r-3s} d^{2t-u}} \cdot \dfrac{a^{9n-7m} b^{9q-3p}}{c^{r+9s} d^{5t+9u}}$.
14) $(x^{4n} + x^{3n}y^2 + x^n y^6 + y^8) \cdot (x^{2n} - x^n y^2 + y^4)$.
15) $\alpha)$ $\dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$; $\beta)$ $\dfrac{x^{n-1}}{(x+y)^{m-1}} - \dfrac{x^n}{(x+y)^m}$.

Anleitung. Man bringe zuerst die beiden Quotienten auf gleichen Divisor.

Antwort zu $\beta)$ $\dfrac{x^{n-1}y}{(x+y)^m}$.

16) $\dfrac{y^n}{(y-z)^n} - \dfrac{y^{n-1}}{(y-z)^{n-1}}$. 17) $\dfrac{a^m + b^m}{a^m - b^m} - \dfrac{a^m - b^m}{a^m + b^m}$.
18) $\dfrac{b}{a^{x-y}} + \dfrac{c}{a^{x-z}} + \dfrac{d}{a^{x-u}} - \dfrac{e}{a^x}$.
19) $\dfrac{a^{2x} + a^x b + b^2}{a^{4x} - a^{3x}b + a^{2x}b^2 - a^x b^3 + b^4} - \dfrac{1}{a^{2x} - a^x b + b^2}$.
20) $\dfrac{a^{x+y+z} - a^{x-y+z}}{a^{x-y-z} - a^{x-y+z}} - \dfrac{a^{x+y-z} - a^{x-y+z}}{a^{x+y+z} + a^{x+y-z}}$.

§ 35.

$a^m : a^n = a^{m-n}$ oder $= 1 : a^{n-m}$, je nachdem $m \gtrless n$.
(Vgl. § 14, II.)

1) Wie werden zwei Potenzen von gleichen Basen durcheinander dividiert?
2) Wie wird eine Zahl mit einer Differenz potenziert?
3) $\alpha)$ $a^{44} : a^{11}$; $\beta)$ $c^{7x} : c^{2x}$; $\gamma)$ $a^x : a^{3y-2x}$; $\delta)$ $a^x : a^{x-y}$; $\varepsilon)$ $a^3 : a^{11}$; $\zeta)$ $a^{3x} : a^{5x}$; $\eta)$ $n^{y-1} : n^y$; $\vartheta)$ $p^{x-y} : p^x$.
4) $\alpha)$ $a^{36}b^{42}c^{49} : (b^{38}a^{60}c^{43})$; $\beta)$ $a^{5x}b^{7y}c^{3z} : (a^{2x}b^{3y}c^{4z})$.
5) Wodurch muß man $7^9 = 40\,353\,607$ dividieren, um 7^7 zu erhalten, und wem ist 7^7 gleich?
6) $1{,}234\,5^{20} = 67{,}580\,6$. Wie groß ist $1{,}234\,5^{18}$?
7) $\alpha)$ $(x + y)^p : (x + y)^q$; $\beta)$ $(x - y)^n : (x - y)$.
8) $\dfrac{m^{4a+b}\, m^{6a-3b}}{m^{2a-6b}\, m^{4a-7b}} \cdot \dfrac{m^{13b-7a}}{m^{14b-13a}}$.

9) $\frac{x^{m+3n}y^{7m-8n}}{x^{4m-7n}y^{3m-11n}} : \frac{x^{2m-6n}y^{5m+6n}}{x^{6m-17n}y^{2m+4n}}$. Aufl.: $x^{m-n}y^{m+n}$.

10) $(a^{2n-m} + a^{3m-2n} - a^{4m-3n}) : a^{m-6n}$.

11) $(\frac{4}{7}a^{8m-2n}b^{3m-4n} - \frac{7}{10}a^{5m-6n}b^{7m-8n}) : (\frac{2}{5}a^{6n-m}b^{5n-m})$.

12) $[27y^{4m+8n} - 6y^{2m+4n} + \frac{1}{3}] : [3y^{2m+4n} + 2y^{m+2n} + \frac{1}{3}]$.

13) $y^{2m-4n} - 4y^{m-2n}z^{m+3n} + 4z^{2m+6n}$ in $y^{6m-12n} - 16y^{3m-6n}z^{3m+9n} + 64z^{6m+18n}$ zu dividieren.

14) $m^{x+y}n^{y} - 4m^{x+y-1}n^{2y} - 27m^{x+y-2}n^{3y} + 42m^{x+y-3}n^{4y}$ durch $m^{x}n^{y} - 7m^{x-1}n^{2y}$ zu dividieren.

15) $(x^{n} - y^{n}) : (x - y)$.

16) α) $(x^{2n} - y^{2n}) : (x + y)$; β) $(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x + y)$.

Welche Sätze ergeben sich aus 15 und 16? Nach diesen Sätzen sollen die Resultate für folgende Divisionen angegeben werden: α) $(x^{5} - y^{5}) : (x - y)$; β) $(x^{6} - y^{6}) : (x - y)$; γ) $(x^{6} - y^{6}) : (x + y)$; δ) $(x^{7} + y^{7}) : (x + y)$.

17) $nx^{n+1} - (n + 1)x^{n} + 1) : (x - 1)^{2}$.

18) $x^{24m-16n} - x^{6m-4n}$ durch $x^{6m-4n} - 1$ zu dividieren.

19) $\frac{x^{4n}}{y^{6n}} - \frac{4z^{6m}u^{8m}}{y^{10n}} + \frac{14z^{5m}u^{4m}}{x^{4n}y^{8n}} - \frac{49z^{4m}}{4x^{8n}y^{6n}}$ durch $\frac{x^{2n}}{y^{3n}} + \frac{2z^{3m}u^{4m}}{y^{5n}} - \frac{7z^{2m}}{2x^{4n}y^{3n}}$ zu dividieren.

20) $0,094818816x^{6m+3} - 0,001860867x^{3m-3}$ durch $0,456x^{2m+1} - 0,123x^{m-1}$ zu dividieren.

21) Es soll zu $x^{3m} - 27y^{6n}$ und zu $x^{5m} - 9x^{3m}y^{4n}$ der größte gemeinschaftliche Divisor gesucht werden. Antw.: $x^{m} - 3y^{2n}$.

22) $\frac{(a^{n+x} - a^{n})(a^{n} - a^{n-x})}{(a^{n+x} - a^{n}) - (a^{n} - a^{n-x})}$ auszuführen.

§ 36.

$$a^{m} \cdot b^{m} = (ab)^{m}.$$ (Vgl. § 14.)

1) Wie werden Potenzen von gleichen Exponenten miteinander multipliziert?

2) Wie wird ein Produkt mit einer Zahl potenziert?

3) α) $5^{7} \cdot 2^{7}$, β) $25^{9} \cdot 4^{9}$, γ) $2^{6} \cdot 5^{6} \cdot 5^{6} \cdot 2^{6}$, δ) $125^{8} \cdot 4^{8} \cdot 2^{8}$, ε) $5^{8} \cdot 2^{11}$ auf die kürzeste Art zu berechnen.

4) α) $17^{7} \cdot 6^{7}$; β) $167^{4} \cdot 6^{4}$; γ) $23^{5} \cdot 29^{5} \cdot 15^{5}$; δ) $19^{3} \cdot 4^{3} \cdot 9^{3} \cdot 2^{3} \cdot 17^{3} \cdot 43^{3}$.

5) $\left(\frac{a^{7}}{b^{y}}\right)^{m} \cdot (b^{y})^{m} \cdot a^{m}$. 6) $\left(\frac{a+b}{z-x}\right)^{m} \cdot \left(\frac{z+x}{a+b}\right)^{m} \cdot \left(\frac{z-x}{a-b}\right)^{m}$.

7) $(3a - 4b)^{m} \cdot (9a^{2} + 16b^{2})^{m} \cdot (3a + 4b)^{m}$.

8) α) $(1\frac{3}{7})^{10} \cdot (1\frac{2}{5})^{10}$; β) $5,872^{4} \cdot 0,875^{4} \cdot 0,0027^{4}$ zu berechnen.

9) Wenn $17^5 = 1\,419\,857$, wie groß ist 34^5?

10) Womit muß man $6^{10} = 60\,466\,176$ multiplizieren, um 12^{10} zu erhalten, und wie groß ist 12^{10}?

11) Auszuführen: α) $[(25a)^m + (2b)^m]\,[(4c)^m - (5d)^m]$; β) $(7^x - 1)\,(98^x + 14^x + 2^x)$; γ) $(a^x + 1)\,[(aa)^x - a^x + 1]$.

12) $\left(\frac{4x^n}{y^p}\right)^m \cdot \left(\frac{25y^{p+1}}{x^{n-1}}\right)^m$.

13) $(3mn)^5$.

14) $\frac{(2ab)^5 \cdot (3ab)^2 \cdot (5a)^4}{(3b)^3 \cdot (4ab)^6}$. Aufl.: $\frac{625a^5}{384b^2}$.

15) $(5anx)^{2y} \cdot (2an)^{y+2} \cdot (2nx)^{y-2}$.

16) $(ab)^{x-2y} \cdot (ac)^{5x-6y} \cdot (bc)^{9x-10y}$.

§ 37.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & a^m : b^m = (a : b)^m. \\ \text{II.} & 1 : b^x = (1 : b)^x. \end{array} \Bigg\}$$ (Vgl. § 14.)

1) Wie werden Potenzen von gleichen Exponenten durcheinander dividiert?

2) Wie wird ein Quotient mit einer Zahl potenziert?

3) Was kann man für den reciproken Wert einer Potenz setzen?

4) Was kann man für die Potenz des reciproken Wertes einer Zahl setzen?

5) α) $12^7 : 4^7$; β) $34^5 : 17^5$; γ) $9^5 \cdot 17^5 : 51^5$.

6) α) $2{,}199\,05^6 : 3{,}141\,5^6$; β) $(11\tfrac{1}{3})^5 : (1\tfrac{2}{3})^5$.

7) $2{,}785\,431^3 : 19{,}876\,982^3$. (6 Decimalstellen.)

8) Wenn $38^7 = 114\,415\,582\,592$, wie groß ist 19^7?

9) Wenn $1{,}818^{20} = 155\,553$, wie groß ist $0{,}606^{20}$? (8 St.)

10) α) $\left(\frac{7a^2}{3b}\right)^m : \left(\frac{14a}{15b^3}\right)^m$; β) $\left(\frac{3a^2b^3c^4}{5d^5e^6f^7}\right)^m : \left(\frac{9a^4b^2c}{25d^6e^7f^2}\right)^m$.

11) $(5a^2 + 8ab - 21b^2)^x : (a + 3b)^x$.

12) $(49x^2 - 36y^2)^m : (7x - 6y)^m$.

13) α) $[(35a^5)^m]^x : [(7a^3)^m]^x$; β) $(2187^x - 1) : (3^x - 1)$.

14) α) $(\tfrac{3}{5})^6$, β) $(\tfrac{1}{10})^9$, γ) $(\tfrac{6}{35})^4 : (2\tfrac{6}{7})^4$ zu berechnen.

15) $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{5c}{6a}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2$ auf die kürzeste Form zu bringen.

16) Ebenso: $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$.

17) Ebenso: $\left(\frac{p+q}{r}\right)^{3x+1} \cdot \left(\frac{rs}{p+q}\right)^{2x-2} \cdot \left(\frac{p+q}{st}\right)^{4x-7} t^{2x}$.

18) $\frac{1}{0{,}25^4} + \frac{1}{0{,}031\,25^3} + \frac{1}{(1:3)^5}$ zu berechnen. Antw.: 33 267.

§ 38.

$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$. (Vgl. § 14.)

1) Wie wird eine Potenz mit einer Zahl potenziert? Wie wird eine Zahl mit einem Produkte potenziert?

2) α) $(a^3)^5$; β) $[(x^5)^7]^9$; γ) $(a^m)^n$; δ) $[(ma)^p]^q$.

3) Wie groß ist 5^{12}, wenn $5^6 = 15\,625$ ist?

'4) Wie groß ist $1{,}824\,896^{24}$, wenn $1{,}824\,896^8 = 123$ ist?

5) $\left(\frac{a^9 \cdot b^{28} \cdot c^{47}}{d^{10} \cdot e^{29}}\right)^{17} \cdot \left(\frac{d^9 e^{26}}{a^8 b^{25} c^{42}}\right)^{19}$. Aufl.: *abcde*.

6) $[(8x - 6y)^{2a}]^{5a} : [(4x - 3y)^{5a}]^{2a}$.

7) $(ax)^{3y+4z}$ soll zur Potenz $5y - 6z$ erhoben werden.

8) $m^{aa} \cdot m^{bb}$ soll durch $(m^{a+b})^{a-b}$ dividiert werden.

9) $(p^{3a-5b})^{7a-4b} : (p^{2a-3b})^{4a-8b}$.

10) Die zwölfte Potenz von $(m^{2x-y})^{x-2y}$ soll durch die dritte Potenz von $(m^{2x-3y})^{6x-7y}$ dividiert werden.

11) α) Wie groß ist $(5^3)^7$, wenn $5^7 = 78\,125$? β) Wie groß ist $1{,}414\,213\,6^{24}$, wenn $1{,}414\,213\,6^2 = 2$ ist?

12) Wie groß ist $1{,}442\,249\,6^{24}$, wenn $1{,}442\,249\,6^3 = 3$ ist?

13) 2^{64} aus $2^{10} = 1024$ und $2^4 = 16$ zu berechnen.

14) Wovon ist α) a^{16}, β) a^{12} das Quadrat? wovon γ) a^{27}, δ) a^{12} die dritte Potenz?

15) $a^{2x} - a^{2y}$ soll nach § 16 Nr. 21 in ein Produkt aus zwei Binomen verwandelt werden.

16) α) $a^{3x} - a^{3y}$, β) $a^{4x} - a^{4y}$ sollen nach § 25 Nr. 14 in Faktoren zerlegt werden.

17) $a^{pp} \cdot a^{pq} \cdot a^{qq}$ soll zur $(p - q)$ten Potenz erhoben werden.

18) Ebenso: $(a^{xxx} \cdot a^{xyy}) : (a^{xxy} \cdot a^{yyy})$ zur $(x + y)$ten Potenz.

§ 39.

Potenz mit der Basis 1, mit dem Exponenten 0, der Basis 0, mit negativem Exponenten und mit negativer Basis.

Jede endliche Potenz mit der Basis 1 ist = 1. Jede Potenz mit dem Exponenten 0 und mit endlicher Basis ist = 1; jede Potenz mit der Basis 0 und mit endlichem positivem Exponenten = 0; der Ausdruck 0^0 ist unbestimmt. Jede Potenz mit negativem Exponenten ist dem reciproken Werte derselben Potenz mit positivem Exponenten, oder dem reciproken Werte der Basis, potenziert mit dem positiven Exponenten, gleich.

1) Gelten die für ganze positive Exponenten aufgestellten fünf Sätze §§ 34—38 auch für den Exponenten 0 und für negative Exponenten, und warum?

Anleitung: 1) $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$. Beweis: $a^n \cdot a^0 = a^n \cdot 1 = a^n$; $a^{n+0} = a^n$, mithin $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$; ebenso: 2) $a^n : a^0 = a^{n-0}$. 3) $a^0 \cdot b^0 = (ab)^0$. Beweis: $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$; $(ab)^0 = 1$, mithin $a^0 \cdot b^0 = (ab)^0$; ebenso ist 4) $a^0 : b^0 = (a : b)^0$. 5) α) $(a^0)^0 = a^0$. Beweis: $(a^0)^0 = 1^0 = 1$, $a^{0 \cdot 0} = a^0 = 1$, mithin $(a^0)^0 = a^{0 \cdot 0}$. Ebenso werden bewiesen: β) $(a^0)^n = a^{0 \cdot n}$ und γ) $(a^n)^0 = a^{n \cdot 0}$. Für negative Exponenten werden die Beweise auf ähnliche Art geführt: 1) α) $a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$. Beweis: $a^x \cdot a^{-y} = a^x \left(\frac{1}{a^y}\right) = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, also $a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$; β) $a^{-x} \cdot a^{-y} = a^{-(x+y)}$. Beweis: $a^{-x} \cdot a^{-y} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)}$. Ebenso ist: 2) α) $a^x : a^{-y} = a^{x+y}$; β) $a^{-x} : a^y = a^{-(x+y)}$; γ) $(a^{-x})^{-y} = a^{xy}$. Beweis für den letzten Satz: $(a^{-x})^{-y} = \left(\frac{1}{a^x}\right)^{-y} = a^{xy}$.

2) α) 1^x, β) $1^x \cdot 1^y$, γ) $(1^x)^y$, δ) a^0, ε) $b^0 \cdot c^0$, ζ) $d^0 : e^0$, η) $(n^0)^x$, ϑ) $(q^y)^0$, ι) $(m^0)^0$ zu berechnen.

3) $a^{2p-q} \cdot b^{6p-18}$ für $p = 3$, $q = 6$ zu berechnen.

4) Die Werte von $(m + n)^{x-y} : (p + q)^{4x-3z}$ und von $[(m + p)^{x-y}]^{4x-3z}$ für $x = 3$, $y = 3$, $z = 4$ zu berechnen.

5) Was wird aus $(m - n)^x$, wenn $m = n$ und $x > 0$?

6) Was wird aus $a^{x-y} : (x - y)^a$, wenn $x = y$?

7) Was wird aus $\left(\frac{a - b}{c - d}\right)^n \cdot \left(\frac{c - d}{a + b}\right)^n$, wenn $a = b$, $c = d$?

8) α) 3^{-7}, β) 7^{-3}, γ) 1^{-1}, δ) $0{,}1^{-1}$, ε) $0{,}4^{-3}$, ζ) $0{,}25^{-4}$, η) $0{,}125^{-3}$, ϑ) $0{,}625^{-4}$, ι) $(1 : 7)^{-3}$ zu berechnen.

9) Wie groß wird: α) 3^{2x-3y}, β) 7^{5x-4y}, γ) 2^{-x-y} für $x = 4$, $y = 6$; δ) was wird aus $(a : b)^n$, wenn $a < b$ und $n = \infty$?

10) α) $(\frac{a}{b})^{-1}$; β) $(\frac{3}{5})^{-1}$; γ) $(\frac{1}{3})^{-2}$; δ) $(3\frac{3}{4})^{-3}$; ε) $\frac{1}{3^{-3}}$; ζ) $\frac{1}{a^{-x}}$; η) $\frac{1}{0{,}2^{-6}}$; ϑ) $1 : 0{,}25^{-4}$; ι) $1 : 0{,}375^{-5}$; $\varkappa$) $1 : 0{,}031\,25^{-4}$ zu berechnen.

11) α) $a^9 \cdot a^{-3}$; β) $a^0 \cdot a^{-7}$; γ) $2^{-3} \cdot 2^{-5}$; δ) $2^3 : 2^{-5}$; ε) $a^0 : a^{-11}$; ζ) $a^{-12} : a^0$; η) $2^{-3} \cdot 25^{-3} \cdot 2^{-3}$; ϑ) $[(\frac{1}{2})^3]^{-2}$; ι) $(a^0)^{-6}$; $\varkappa$) $[(\frac{3}{4})^{-2}]^3$; λ) $(a^{-n})^0$; μ) $(2^{-2})^{-4}$ auszuführen.

12) Ebenso: α) $a^{-6}b^{-7}c^{-10}a^{-4}b^2c^6$;
β) $(m^{-7}n^{-3}o^{-5}p^6) \cdot (m^{-3}n^{-5}o^4p^{-7}) \cdot (m^{-1}o^{17}n^8p^{-10})$.

13) $(a^{-6}b^{-3} - a^{-7}b^{-5})(a^{-2}b + a^{-3}b^{-1}) - (a^{-4} - a^{-7} + a^{-10})(a^{-2} + a^{-5})$. A.: $a^{-8}b^{-2} - a^{-10}b^{-6} - a^{-6} - a^{-15}$.

14) In $\dfrac{n^{-8}c^5p^{-10}o^{-9}}{a^{-3}b^{-4}d^{-6}m^7}$ die negativen Exponenten zu entfernen.

15) $\dfrac{5a^{-3}b^{-0}m^{-5}p}{13c^{10}d^2n^{-1}q^{-3}}$ durch $\dfrac{15a^{-4}b^{-2}c^{-13}q^{11}}{26d^6m^0n^{-7}p^{-8}}$ zu dividieren.

16) Ebenso: $\dfrac{a^{-3m}b^{-2m+1}}{c^{-4m}d^{-5m-7}}$ durch $\dfrac{a^{-2m+1}b^3}{c^{-m+3}d^{-m-3}}$.

17) $\dfrac{21m^{-1}a^{-1}}{x^3} - \dfrac{35x^{-4}p^{-1}}{2a^{-1}m^{-2}} - \dfrac{6p^3m^{-3}}{a^{-5}} + \dfrac{5a^7x^{-1}}{p^{-2}}$ durch $\dfrac{7m^2a^{-3}}{x^5} - \dfrac{2p^3x^{-2}}{a^{-3}}$ zu dividieren. Aufl.: $\dfrac{3a^2x^2}{m^3} - \dfrac{5a^4x}{2p}$.

18) $(\frac{3}{5})^{-7} \cdot (\frac{4}{11})^{-7} \cdot (2\frac{7}{24})^{-7} + (2\frac{7}{12})^{-3} : (20\frac{2}{3})^{-3}$ zu berechnen.
Aufl.: 640.

19) Den Quotienten $\dfrac{2abc}{3mnp}$ zur $-x$ten Potenz zu erheben.

20) $\left(\dfrac{2ab}{3cd}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{4cd}{5ab}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{5ab}{2cd}\right)^{-4}$. Aufl.: $\dfrac{27c^5d^5}{200a^5b^5}$.

21) $([(\frac{3}{4})^{-1}]^{-1})^{-1} + ([(2^{-1})^{-2}]^{-3})^{-4}$. Aufl.: $16\,777\,217\frac{1}{3}$.

22) $\left(\dfrac{a^{-3}b^{-7}c^{-0}}{m^{-5}n^{-11}p^{13}}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{a^2b^{-3}c^{-4}}{m^4n^7p^0}\right)^{-2}$. Aufl.: $\dfrac{a^8b^{34}c^8p^{52}}{m^{12}n^{30}}$.

23) Was wird aus $(2a - b)^{-x}$ für $a = 3$, $b = 6$? was aus $1 : (5a - 3b)^{2b-3a}$ für $a = 3$, $b = 5$?

24) $(-3)^2 + (-7)^5 - (-2)^7 + (-1)^{-1} + (-2)^{-2} - (-0{,}3)^{-3} + (-4)^0$. Aufl.: $-16\,632\frac{77}{108}$.

25) Was wird aus $(-1)^{2n}$, was aus $(-1)^{2n+1}$, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet? Was aus $(-1)^{-2n}$, $(-1)^{-2n-1}$?

26) $(-1)^5 \cdot (-2)^3 - (-3)^4 \cdot (-4)^3$ zu berechnen.

27) Ebenso: α) $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$; β) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ für 1) $x = -1$, 2) $x = -2$, 3) $x = -3$, 4) $x = -4$.

28) $(a - b)^4 : (b - a)^4 + (a - 2b + 3c)^5 : (2b - 3c - a)^5$.
Aufl.: 0.

29) Wie lassen sich die in § 35, Nr. 16 α) und β) erhaltenen Resultate aus dem Resultate von Nr. 15 desselben Paragraphen ableiten?

§ 40.

Potenzierung einer Summe oder einer Differenz.

Binomial-Koeffizienten-Tafel.

0.	1										
I.	1	1									
II.	1	2	1								
III.	1	3	3	1							
IIII.	1	4	6	4	1						
V.	1	5	10	10	5	1					
VI.	1	6	15	20	15	6	1				
VII.	1	7	21	35	35	21	7	1			
VIII.	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
VIIII.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
X.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

1) Es sollen durch Multiplikation nach und nach die Potenzen von $a + b$ von der ersten bis zur zehnten Potenz gebildet werden.

2) Es sollen durch Multiplikation nach und nach die Potenzen der Summe $m + n$ bis zur zehnten Potenz mit absichtlicher Vernachlässigung der Koeffizienten gebildet werden.

3) Welches Gesetz stellt sich bei der Potenzierung einer Summe $a + b$ für die Potenz-Exponenten von a und b heraus?

4) Auf welche Weise lassen sich die Koeffizienten der Potenzen von a und b bei der Potenzierung der Summe $a + b$, mit Vernachlässigung der Potenzen selbst, nach und nach entwickeln? (Siehe vorstehende Binomial-Koeffizienten-Tafel.)

5) Wie unterscheidet sich die Potenz einer Differenz von der Potenz einer Summe?

6) $p \pm q$ zur zweiten, dritten u. s. w. zwölften Potenz zu erheben.

7) Zu entwickeln: α) $(1 + y)^{12}$; β) $(2 - 3y)^5$.

8) Ebenso: α) $(a - 2b)^6 - (3a - 4b)^6$; β) $(a + b)^{11} \pm (a - b)^{11}$.

9) α) $[(3a - 2b)^3]^2$; β) $[(4m - 3n)^{-3}]^{-2}$.

10) α) $(x^2 - 2xy + y^2)^6$; β) $(9a^2 - 6ab + b^2)^5$.

11) α) $(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b)^7$; β) $(\frac{3}{4}m - \frac{4}{5}n)^6$; γ) $(\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y)^4$.

12) α) $(2ab - 3bc)^4$; β) $(4mnp - 5mpq)^3$.

13) α) $(2a^2 - 3b^3)^6$; β) $(3a^3 + 6b^4c^2)^5$.

14) α) $(\frac{1}{3}a^2b^2 - \frac{3}{4}c^2d^3e^5)^4$; β) $(a^{-1}b^{-3} - c^{-5}d^{-6})^6$.

15) α) $(2x - \frac{1}{2}y)^{-5}$; β) $(x^{-1}y - xy^{-1})^{-4}$.

16) $(a + b)^7 \cdot (a - b)^7$. Aufl. mit Anwendung von § 36.

17) $(a - b)^5 \cdot (a^2 + ab + b^2)^5$.

18) $13\,579^2 = 184\,389\,241$; wie groß ist α) $13\,581^2$; β) $13\,573^2$?

19) $28\,743^3 = 23\,746\,318\,288\,407$; wie groß ist α) $28\,748^3$; β) $28\,739^3$?

20) α) $99^2 = (100 - 1)^2$; β) 999^2; γ) 9999^2 zu berechnen.

21) Ebenso: α) 999^3; β) 9999^4; γ) $99\,999^5$.

22) Ebenso: α) 9997^3; β) $99\,996^4$.

23) Wie groß ist $(12\frac{1}{6})^5$, wenn $12^5 = 248\,832$?

24) Wie groß ist $(12\frac{1}{4}\frac{3}{4})^5$, wenn $13^5 = 371\,293$?

25) Wie groß sind folgende Potenzen: α) $8{,}999\,993^3$; β) $17{,}999\,997^3$; γ) $3{,}0003^9$; δ) $27{,}998^3$, ε) $19{,}998^5$ mit Vernachlässigung der achten Decimalstelle?

26) Was kann man α) für $(a \pm k)^2$, β) für $(a \pm k)^3$ näherungsweise setzen, wenn k gegen a eine sehr kleine Zahl bedeutet?

Aufl.: α) Vernachlässigt man in $a^2 \pm 2ak + k^2$ die zweite Potenz von k, die in Bezug auf $a^2 \pm 2ak$, da k schon sehr klein ist, um so kleiner wird, so ist α) $(a \pm k)^2$ sehr nahe $= a^2 \pm 2ak$; β) $(a \pm k)^3$ sehr nahe $= a^3 \pm 3a^2k$.

27) Was kann man für $1 : (1 \pm k)^2$ und $1 : (1 \pm k)^3$ setzen, wenn k eine sehr kleine Größe bedeutet?

Antw.: $1 \mp 2k$ und $1 \mp 3k$.

28) Auf fünf Decimalstellen zu berechnen: α) $287{,}000\,06^2$; β) $317{,}000\,08^3$; γ) $53{,}000\,07^3$; δ) $291{,}999\,93^2$; ε) $81{,}999\,94^3$.

Aufl.: α) $82\,369{,}034\,44$; β) $31\,855\,037{,}117\,36$; γ) $148\,877{,}589\,89$; δ) $85\,263{,}959\,12$; ε) $551\,366{,}789\,68$.

29) Ein Eisenstab nimmt durch Erhitzung vom Schmelzpunkte des Schnees bis zur Siedehitze des Wassers (von 0° — 100° C.) um den 819ten Teil der Länge zu. Um wieviel nimmt α) eine quadratische Eisenplatte, um wieviel β) ein Eisenwürfel bei derselben Erwärmung zu?

30) Wieviel beträgt α) die Flächen-Ausdehnung, wieviel β) die räumliche Ausdehnung eines Körpers von 0° — 100° C., wenn die lineare Ausdehnung $\frac{1}{x}$ beträgt? Wieviel betragen γ) und δ) diese Ausdehnungen von 0 Grad bis p Grad (Centesimal) über 0? wieviel ε) und ζ) die Zusammenziehungen von 0 Grad bis n Grad unter 0?

B. Wurzeln.

§ 41.

Begriff der Wurzeln.

I. $(\sqrt[x]{a})^x = a$. II. $\sqrt[x]{a^x} = a$.

(Vgl. §§ 8 und 17.)

1) Durch welche Rechnung wird jede der drei Zahlen Potenz, Basis und Exponent aus den beiden übrigen abgeleitet? Warum hat die Potenz-Rechnung zwei umgekehrte Rechnungen, die Wurzel- und die Logarithmen-Rechnung, während die Additions- und die Multiplikations-Rechnung jede nur eine umgekehrte Rechnung hat?

2) Was heißt aus einer Zahl die zweite, dritte, vierte u. s. w. $n$te Wurzel ausziehen (sie mit n radizieren)? Wie wird die $x$te Wurzel aus a bezeichnet*)? Was versteht man unter Radikand, Wurzel-Exponent und Wurzel?

3) In Zeichen auszudrücken und zu berechnen: α) die 2te Wurzel aus 49; β) die 3te Wurzel aus 27; γ) die vierte Wurzel aus 10000; δ) die 2te Wurzel aus $16 + 9$; ε) die 2te Wurzel aus 16 nebst der 2ten Wurzel aus 9.

4) Was versteht man unter Quadrat- und Kubikwurzel?

5) In welchem Falle darf man den Wurzel-Exponenten auslassen?

6) Wie groß sind: α) $\sqrt[1]{49}$; β) $\sqrt[1]{a}$; γ) $\sqrt[3]{1}$; δ) $\sqrt[a]{1}$?

7) 1024 soll in zehn gleiche Faktoren zerlegt werden.

8) Wenn m in x gleiche Faktoren zerlegt wird, wie groß ist jeder Faktor?

9) α) Welche Zahl giebt, zur 6ten, welche zur 3ten, welche zur 2ten Potenz erhoben, 729? β) Welche Zahl giebt, zur $y$ten Potenz erhoben, x?

10) Welcher Zahl ist $(\sqrt[3]{8})^3$, welcher $\sqrt[3]{8^3}$ gleich?

11) α) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$; β) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

*) Geschichtliche Bemerkung. Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ wurde zuerst durch Christoff Rudolff vom Jawer eingeführt („Behend und Hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln der Algebra. 1525").

12) Womit muß α) $\sqrt{7}$ multipliziert werden, damit 7 herauskommt? womit β) $\sqrt{a}$, damit a herauskommt? γ) Was giebt $\frac{x}{\sqrt{x}}$; was $\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}$?

Auszuführen:

13) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{b^4} + (\sqrt[n]{m})^n + a : (\sqrt{a:b})^2$. Aufl.: $a + m$.

14) $a + (\sqrt[7]{a-b})^7 + 5\sqrt[3]{(a-b)^3} - \sqrt{(a-b)^2} - 6(\sqrt[8]{a-b})^8$.

15) $(\sqrt[5]{213})^3 \cdot (\sqrt[5]{213})^2 + (\sqrt[17]{517})^9 \cdot (\sqrt[17]{517})^{-2} \cdot (\sqrt[17]{517})^{10}$.

16) $(\sqrt[x]{a})^{3y-p} \cdot (\sqrt[x]{a})^{2x-3y} \cdot (\sqrt[x]{a})^{p-x}$. Antw.: a.

17) $\sqrt[27]{(2^{-9})^{-3}} + [(\sqrt[12]{4})^{-6}]^{-2} - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})^2$.

18) $(3\sqrt{x})^2 + (4\sqrt[3]{x})^3 - (2\sqrt[4]{x-y})^4$. Aufl.: $57x + 16y$.

19) α) $(\sqrt[n]{x \cdot a^m} \cdot \sqrt[n]{p+q})^n$; β) $(\sqrt[n]{a^2b^2c} \cdot \sqrt[n]{a^3b^5c^{-7}} \cdot \sqrt[n]{a^{-5}b^{-7}c^6})^n$.

20) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$; $(\sqrt{m} - \sqrt{m-n})(\sqrt{m} + \sqrt{m-n})$.

21) $(\sqrt{x+y-z} + \sqrt{x-y+z})(\sqrt{x+y-z} - \sqrt{x-y+z})$.

22) $x - [x - x : (\sqrt{x:y})^2]$. Aufl.: y.

23) $(-\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - n})^2 + m(-\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - n}) + n$.

24) α) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;
β) $(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(c\sqrt{x} - d\sqrt{y}) + (a\sqrt{x} - b\sqrt{y})(c\sqrt{x} + d\sqrt{y})$.

25) Läßt sich $m - n$ als die Differenz zweier Quadrate betrachten? Welchem Produkte binomischer Faktoren ist $m - n$ gleich?

§ 42.

$$\sqrt[x]{ab} = \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b}.$$ (Vgl. §§ 19 und 36.)

1) Wie wird aus einem Produkte die Wurzel gezogen?

2) Wie werden Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten miteinander multipliziert?

3) $\sqrt{49 \cdot 64} + \sqrt{100a^2b^2c^2} - \sqrt[3]{8a^3b^3c^3}$.

4) $\sqrt{18} + \sqrt{28} - \sqrt{75}$. Aufl.: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{3}$.

5) α) $\sqrt{20}+\sqrt{125}+\sqrt{63}-\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{567}-\sqrt{605}$;
β) $\sqrt{2\tfrac{2}{3}}+\sqrt{3\tfrac{3}{8}}+\sqrt{4\tfrac{4}{15}}+\sqrt{5\tfrac{5}{24}}+\sqrt{6\tfrac{2}{21}}$.

6) $5\sqrt{48}+4\sqrt{147}-2\sqrt{3}-5\sqrt{432}$. Aufl.: $-14\sqrt{3}$.

7) $\sqrt{7168}-2\sqrt{18}-7\sqrt{5}+2\sqrt{45}-26\sqrt{2}+4\sqrt{363}$.

8) $3\tfrac{1}{2}\sqrt{24}-5\tfrac{3}{4}\sqrt{54}+13\tfrac{1}{3}\sqrt{99}+2\tfrac{17}{24}\sqrt{216}-21\sqrt{44}$.

9) $2\sqrt{2450}-3\sqrt{2048}+5\sqrt{13\,122}$. Aufl.: $379\sqrt{2}$.

10) Wenn $\sqrt{5}=2{,}236\,068\,0$ ist, wie groß ist $\sqrt{320}$?

11) α) $\sqrt[3]{24}$; β) $\sqrt[3]{81}$; γ) $5\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}+8\sqrt[3]{2}$.

12) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372}$. Aufl.: 0.

13) $\sqrt{4a^3b}+\sqrt{25ab^3}-(a-5b)\sqrt{ab}$. Aufl.: $(a+10b)\sqrt{ab}$.

14) $\frac{a}{mc}\sqrt{m^3nc^2}-\frac{b}{ne}\sqrt{4mn^3e^2}+\frac{1}{pq}\sqrt{9mnp^2q^2c^2}$.

15) $\sqrt[3]{16a^4b^4c}-\sqrt[3]{54ab^4c^4}+\sqrt[3]{250a^4bc^4}$.

16) $c\sqrt[5]{a^6b^7c^3}-a\sqrt[5]{ab^7c^8}+b\sqrt[5]{a^6b^2c^8}$. Aufl.: $abc\sqrt[5]{ab^2c^3}$.

17) $\sqrt[n]{a^{n+2}b^{n+3}}-\sqrt[n]{a^{n+3}b^{n+2}}$.

18) $\sqrt{ax^2-bx^2}+\sqrt[3]{a^2b^3c^3-d^2b^3c^3}+\sqrt{4m^3n^3-9m^2n^2}$.

19) $\sqrt[x]{a^{x+1}b^x-a^xb^{x+1}}-\sqrt[x+y]{a^{2x+y}b^{x+2y}-a^{x+2y}b^{2x+y}}$.

20) α) $\sqrt{\sqrt[3]{49^3\cdot 64^3}}+\sqrt[3]{\sqrt[x]{27^x\cdot 64^x}}$; β) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$.

In den folgenden Beispielen die Multiplikation auszuführen:

21) α) $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}\cdot\sqrt[x]{c}\cdot\sqrt[x]{a^3}\cdot\sqrt[x]{a^{x-7}}\cdot\sqrt[x]{a^4}$; β) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1:x}$.

22) $\sqrt[x+1]{a^3bc}\cdot\sqrt[x+1]{a^7b^xc^{13-x}}\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-9}b^0c^{2x-13}}$. Aufl.: abc.

23) α) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{d}}\cdot\sqrt[3]{dc}$; β) $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$;
γ) $\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}-\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}\sqrt{17}-1\tfrac{1}{8}}\right)\sqrt[3]{3+\tfrac{1}{3}\sqrt{17}}$;
δ) $(a+b\sqrt{c})(d-e\sqrt{f})$.

24) α) $4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8}\cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot \frac{5}{16}\sqrt{2}$; β) $2\sqrt{245}\cdot \frac{1}{7}\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$.

25) α) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{27})$; β) $(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3})$.

26) $2(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{11}-3\sqrt{7})$. Aufl.: $-20-4\sqrt{77}$.

27) $(\sqrt{3}+3\sqrt{5}-5\sqrt{7})(7\sqrt{7}-3\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

28) $(3\sqrt{45}-7\sqrt{5})(\sqrt{1\frac{4}{5}}+2\sqrt{9\frac{4}{5}})$. Aufl.: 34.

29) α) $(\sqrt{200}-\sqrt{800})(\sqrt{0{,}5}-\sqrt{0{,}125})$;

β) $(0{,}1\sqrt{0{,}1}-0{,}2\sqrt{0{,}2})(0{,}4\sqrt{0{,}4}+0{,}5\sqrt{0{,}5})$.

30) $2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-3\sqrt[3]{2})$. Aufl.: $6-6\sqrt[3]{6}$.

31) α) $(m+\sqrt{n})^2$; β) $(\sqrt[3]{ab^2c}-\sqrt[3]{a^2bc^2})^2$.

32) $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{12}+2}+\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$. Aufl.: 5

33) $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$.

34) α) $\sqrt{a+b+\sqrt{2ab}}\cdot\sqrt{a+b-\sqrt{2ab}}$. Aufl.: $\sqrt{a^2+b^2}$

β) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$;

γ) $\sqrt[3]{a+b-2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

In den folgenden Beispielen den Faktor unter das Wurzelzeichen zu bringen:

35) $a\sqrt[x]{b}$. Aufl.: $\sqrt[x]{a^x}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a^xb}$.

36) α) $2\sqrt{2}$; β) $7\sqrt{5}$; γ) $3\frac{1}{2}\sqrt{8}$; δ) $4\sqrt{0{,}125}$; ε) $6\sqrt{3\frac{1}{2}}$.

37) $7\frac{1}{3}\sqrt[3]{7\frac{19}{32}}+4\sqrt[3]{0{,}21875}-5\sqrt[4]{0{,}0256}$.

38) $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}+5\sqrt{0{,}2\sqrt{0{,}2}}$. 39) $4\sqrt{0{,}25\sqrt{0{,}25\sqrt{0{,}25}}}$.

40) α) $2\sqrt{0{,}5\sqrt{0{,}5\sqrt{0{,}5\sqrt{0{,}5}}}}$; β) $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$.

41) α) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; β) $(a+b)\sqrt{\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}}$; γ) $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

42) α) $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; β) $(m+n)\sqrt{\frac{m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3+n^4}{m+n}}$

γ) $\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Aufl.: $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

43) $\alpha)\ \frac{a^3b^2}{c^2}\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^5b^5}}$; $\beta)\ \frac{b^{-3}c^{-6}}{a^{-2}}\sqrt[4]{a^{-7}b^{13}c^{25}}$.

44) $\frac{ab^2c^3}{d^4}\sqrt[x]{\frac{d^{4x-4}}{a^{x-1}b^{2x-2}c^{3x-3}}}$. Aufl.: $\sqrt[x]{\frac{ab^2c^3}{d^4}}$.

§ 43.

I. $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$. II. $\sqrt[n]{1:a} = 1:\sqrt[n]{a}$.

(Vgl. § 19 und § 37.)

1) Wie wird aus einem Quotienten die Wurzel gezogen?

2) Wie werden zwei Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten durcheinander dividiert?

3) Wie groß ist die Wurzel aus dem reciproken Werte einer Zahl, und wie groß der reciproke Wert der Wurzel einer Zahl?

4) $\alpha)\ \sqrt{\frac{25}{49}}$; $\beta)\ \sqrt{\frac{64}{81}}$; $\gamma)\ \sqrt{5\frac{1}{16}}$; $\delta)\ \sqrt{2\frac{14}{25}}$; $\varepsilon)\ \sqrt{1\frac{9}{16}}$.

5) Wenn $\sqrt{13} = 3{,}605\,551\,3$, wie groß ist $\sqrt{13:9}$?

6) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}+\sqrt[3]{\frac{64}{125}}-4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-2\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}+3\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$. Aufl.: $-3\frac{11}{30}$.

7) $3\sqrt{\frac{a^2m^2n^2}{x^2y^2}}-\sqrt[3]{\frac{8a^3m^3n^3}{x^3y^3}}+2\sqrt[x]{\frac{(a+b)^x}{m^xn^x}}-3\sqrt[x]{\frac{(a-b)^x}{(mn)^x}}$.

8) $\sqrt[3]{\frac{a^4b^2c^3}{m^3n}}+\sqrt[x]{\frac{a^{x-1}}{b}}-\sqrt[x]{\frac{a}{b^{x-1}}}+\sqrt[x]{\frac{1}{a^xb^x}}$.

9) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{25^3}{64^3}}}+\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{8^2}{27^2}}}-\sqrt[3]{\sqrt[x]{\frac{27^x}{125^x}}}$. Aufl.: $\frac{83}{120}$.

10) $\sqrt{\frac{m}{a^2}-\frac{n}{a^2}}+\sqrt{\frac{m}{n^2}-\frac{1}{n}}$. Aufl.: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{n}\right)\sqrt{m-n}$.

11) $\sqrt{2\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2}-2\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}}$. Aufl.: $\frac{2ab}{c}\sqrt{2}$.

12) $\sqrt{\frac{1}{a^2b^2c^2}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{abc^2}+\frac{1}{ab^2c}+\frac{1}{a^2bc}}$.

13) $\sqrt[y]{\frac{1}{m^4n^6z^y}-\frac{m^{y-4}n^{y-6}-p^yq^y}{m^yn^yz^y}}$.

14) $\alpha)$ $\sqrt{a^3} : \sqrt{a}$; $\beta)$ $\sqrt[6]{a^9 b^8 c^6} : \sqrt[6]{a^3 b^2}$; $\gamma)$ $\sqrt[x]{a^{3x+2}} : \sqrt[x]{a^{2x+2}}$.

15) $\alpha)$ $\sqrt[9]{\dfrac{a^{17} b^3 c^5}{d^8 e^5}} : \sqrt[9]{\dfrac{a^8 c^5 d}{b^6 e^5}}$; $\beta)$ $\sqrt[x]{\dfrac{a^{x-2} b^y}{c^{x-3} d^x}} : \sqrt[x]{\dfrac{b^{y-x} c^3}{a^2}}$.

16) $\sqrt[7]{(a^3 b^2 c^5)^4 (a^5 b^3 c)^5} : \sqrt[7]{(a^2 b^3 c^4)^4 (a^4 b^2 c)^2}$. Aufl.: $a^3 bc$.

17) $\sqrt[3]{3a^2 b^2 c^4 - 4a^4 b^2 c^2 + 5a^2 b^4 c^2}$ durch $\sqrt[3]{\dfrac{3c}{ab} - \dfrac{4a}{bc} + \dfrac{5b}{ca}}$ zu dividieren. Aufl.: abc.

18) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} - \dfrac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}} + \dfrac{\sqrt{105}}{\sqrt{2\frac{1}{7}}}$ zu berechnen. Aufl.: 8.

19) Ebenso: $0{,}06\sqrt[6]{1{,}788\,998\,4} : 0{,}12\sqrt[6]{0{,}027\,953\,1}$. Aufl.: 1.

20) $\alpha)$ $m : \sqrt{m}$; $\beta)$ $a^2 b^2 c^2 : \sqrt{abc}$; $\gamma)$ $m^2 p^3 q^4 : \sqrt[3]{mp^2 q^5}$.

21) $1 : \sqrt[x]{\dfrac{a}{b}}$. Aufl.: $\sqrt[x]{\dfrac{b}{a}}$.

22) $1 : \sqrt{0{,}04}$; $1 : \sqrt{0{,}015\,625}$; $1 : \sqrt[3]{0{,}008}$; $1 : \sqrt[3]{0{,}001\,953\,125}$.

23) $\alpha)$ $1 : \sqrt{1\frac{13}{36}}$; $\beta)$ $1 : \sqrt{\dfrac{0{,}001\,25}{4{,}5}}$; $\gamma)$ $1 : \sqrt[3]{\dfrac{0{,}013\,57}{0{,}366\,39}}$.

24) $1 : \sqrt{\dfrac{a + 2b}{a^3 - 3ab^2 + 2b^3}}$. Aufl.: $a - b$.

25) $\alpha)$ $ad - (db + ae)\sqrt{c} + bce$ durch $d - e\sqrt{c}$ zu dividieren; $\beta)$ ebenso: $42 - 35\sqrt{3} - 18\sqrt{5} + 15\sqrt{15}$ durch $6 - 5\sqrt{3}$.

26) In den Quotienten $\alpha)$ $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, $\beta)$ $\dfrac{m}{n \pm \sqrt{p}}$ das Wurzelzeichen aus dem Divisor fortzuschaffen.

Aufl.: $\alpha)$ $\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$; $\beta)$ $\dfrac{m(n \mp \sqrt{p})}{n^2 - p}$.

27) Ebenso in: $\dfrac{a}{\sqrt{m} \pm \sqrt{n}}$. Aufl.: $\dfrac{a(\sqrt{m} \mp \sqrt{n})}{m - n}$.

In den folgenden Beispielen sollen die Wurzelzeichen aus dem Divisor fortgeschafft werden:

28) α) $\frac{7}{\sqrt{2}}$; β) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; γ) $\frac{3+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; δ) $\frac{5-\sqrt{4,5}+3\sqrt{12,5}}{\sqrt{2}}$.

29) α) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; β) $\frac{1}{5+\sqrt{5}}$; γ) $\frac{1}{7-\sqrt{27}}$; δ) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$.

30) α) $9:(\sqrt{19}+4)$; β) $2,9:(0,003+0,5\sqrt{0,001})$.

31) α) $66:(13-7\sqrt{3})$; β) $180:(9\sqrt{5}+21)$.

32) α) $81\sqrt{5\tfrac{9}{11}}:(7\sqrt{11}-24)$; β) $3\sqrt{0,78}:(5\sqrt{0,23}-0,01)$.

33) α) $(1+2\sqrt{3}):(5-\sqrt{3})$; β) $\sqrt{2}:(3-\sqrt{5})$.

34) $(\sqrt{1\tfrac{1}{15}}-1):(5\sqrt{\tfrac{3}{5}}+4)$. Aufl.: $\tfrac{31}{15}\sqrt{15}-8$.

35) $(5\sqrt{7}+6\sqrt{10}):(5\sqrt{1,75}+6\sqrt{2,5})$. Aufl.: 2.

36) α) $\frac{13\sqrt{15}-7\sqrt{21}}{13\sqrt{1\tfrac{2}{3}}-7\sqrt{2\tfrac{1}{3}}}$; β) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}-a}$.

37) α) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; β) $\frac{259}{5+\sqrt{7}+\sqrt{11}}$.

38) $23:(2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+6\sqrt{7})$.

39) $(\sqrt{10}-\sqrt{8}+\sqrt{6}):(\sqrt{10}+\sqrt{8}-\sqrt{6})$.

40) $(2\sqrt{3}-4\sqrt{5}-6\sqrt{7}):(\sqrt{3}-3\sqrt{5}-5\sqrt{7})$.

41) α) $\sqrt{xy}:\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$; β) $\frac{b\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$.

42) α) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; β) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

43) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$. 44) $\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$.

45) $\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$. 46) $\frac{1}{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$.

47) Es ist $\sqrt{\tfrac{2}{3}}+\sqrt{2\tfrac{2}{3}}=\frac{4}{\sqrt{2\tfrac{2}{3}}}$. Warum?

§ 44.

I. $\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x:m]{a^{y:m}}$. (Vgl. § 18.)

II. $\sqrt[x]{a^y} = a^{y:x} = \sqrt[x:y]{a}$.

1) Warum darf man den Potenz-Exponenten und Wurzel-Exponenten (Radikand-Exponenten) einer Zahl mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren?

2) $5\sqrt[12]{a^{30}} + 3\sqrt[14]{a^{35}} + 9\sqrt[16]{a^{40}} - 7\sqrt[18]{a^{45}}$. Aufl.: $10\sqrt{a^5}$.

3) $\sqrt[15]{a^7}\cdot\sqrt[15]{a^3} + \sqrt[39]{a^{57}}:\sqrt[39]{a^{31}}$. Aufl.: $2\sqrt[3]{a^2}$.

4) α) $\sqrt[mnx]{a^{nxp}}$; β) $\sqrt[7xxy]{a^{49xyy}}$; γ) $\sqrt[2(m+n)]{a^{3m+3n}}$.

5) Die Wurzeln $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[8]{a^9}$, $\sqrt[12]{a^7}$, $\sqrt[6]{a^5}$, $\sqrt[10]{a^9}$ in andere von gleichem Werte zu verwandeln, deren Wurzel-Exponent 120 ist.

6) Die Wurzeln $\sqrt[7]{a^4}$, $\sqrt[y]{a^5}$, $\sqrt[y]{a^6}$, $\sqrt[13]{a^7}$ in andere zu verwandeln, in denen der Potenz-Exponent der Wurzelgröße 420 ist.

7) Die Wurzeln $\sqrt[x]{a^y}$, $\sqrt[ny]{a^{px}}$, $\sqrt[xy]{a^{np}}$ in andere zu verwandeln, deren Wurzel-Exponent nxy ist.

8) α) $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[r]{a^s}$. Aufl.: $\sqrt[nr]{a^{mr+ns}}$; β) $\sqrt[r]{a}\cdot\sqrt[q]{a}$.

9) α) $\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^7}$; β) $\sqrt[4]{a^7}\cdot\sqrt[9]{a^4}\cdot\sqrt[7]{a^3}$.

10) α) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[8]{a^7}$; β) $\sqrt[xy]{a^m}\cdot\sqrt[yz]{a^n}$.

11) α) $\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[o]{z}$; β) $\sqrt[nx]{a^y}\cdot\sqrt[ny]{a^x}\cdot\sqrt[xy]{a}$.

12) $\sqrt[10]{x^3y^2p}\cdot\sqrt[8]{xy^3p^2}\cdot\sqrt[14]{xyp^3}\cdot\sqrt[24]{x^2y^2p^2}$.

13) α) $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{\frac{bc}{a}}$; β) $\sqrt[x-1]{\frac{m^3n^5}{p^6q^7}}\cdot\sqrt[x+1]{\frac{p^4q^7}{m^{10}\cdot n^{13}}}$; γ) $\sqrt{q}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{q}}$.

14) $\sqrt[6]{\frac{a^{-3}b^{-4}}{c^{-3}}}:\sqrt[4]{\frac{a^{-2}b^{-1}}{c}}:\sqrt[35]{\frac{a^{-3}b^{-2}}{c}}$. Aufl.: $\sqrt[420]{\frac{a^{36}c^{327}}{b^{151}}}$.

15) $\sqrt[21]{\frac{a^2b^3}{c^2}}:\sqrt[14]{\frac{a^5b^3}{c^4}}:\sqrt[6]{\frac{a^{-3}b^2}{c^{-5}}}$. Aufl.: $\sqrt[42]{\frac{a^{10}}{b^{17}c^{27}}}$.

16) $\sqrt[-3]{a^2}$. Aufl.: $\sqrt[(-3).(-1)]{a^{2.(-1)}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = 1 : \sqrt[3]{a^2}$.

17) $\sqrt[-x]{a}$. Aufl.: $1 : \sqrt[x]{a}$ oder $\sqrt[x]{1 : a}$.

18) Was bedeutet eine Wurzel mit negativem Wurzel-Exponenten?

19) Wie wird aus einer Potenz eine Wurzel gezogen?

20) α) $\sqrt[2]{a^6}$; β) $\sqrt[3]{a^{15}}$; γ) $\sqrt[19]{a^{133}}$; δ) $\sqrt[37]{a^{703}}$.

21) α) $\sqrt[x]{a^{pqx}}$; β) $\sqrt[y]{a^{3y}}$; γ) $\sqrt[x+1]{a^{3x+3}b^{5x+5}}$.

22) α) $\sqrt[x]{a^{nx+m}}$. Aufl.: $a^n\sqrt[x]{a^m}$; β) $\sqrt[x]{a^{3x+2}b^{2x+4}}$.

23) α) $\sqrt[2]{a^7}$; β) $\sqrt[3]{a^{22}}$; γ) $\sqrt[7]{a^{39}b^{15}}$; δ) $\sqrt[13]{a^{108}b^{28}c^{65}}$.

24) $\sqrt[5y]{a^{42yz-9tyq}} \cdot \sqrt[5y]{a^{3yz-7tyq}} \cdot \sqrt[5y]{a^{tyq-10yz}}$. Aufl.: a^{7z-3tq}.

25) α) $\sqrt[3x+5y]{a^{21xx+8xy-45yy}}$; β) $\sqrt[11x-7y]{a^{121xx-49yy}}$.

26) $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x-2}c^{x-3}d^{x-4}}}$. Aufl.: $\frac{a\sqrt[x]{ab^2c^3d^4}}{bcd}$.

27) $\sqrt[4x+6y]{\frac{a^{28xx}a^{10xy}}{a^{48yy}}}$. Aufl.: a^{7x-8y}.

28) $\sqrt[3a-2]{(x^{5am})^3 \cdot (x^6)^2} : \sqrt[3a-2]{x^{10m} \cdot x^{18a}}$. Aufl.: x^{5m-6}.

29) $\sqrt[12x-14y]{(a^{7x}a^{11x})^{8x}} : \sqrt[12x-14y]{(a^{5y} \cdot a^{23y})^{7y}}$. Aufl.: $a^{12x+14y}$.

30) α) $\sqrt[7]{\frac{a^{21}b^{-35}(c+d)^{-7}}{m^{-28}n^{-14}}}$; β) $\sqrt[m]{\frac{a^{-3m+3}b^{-7m}}{c^{-9m-11}}}$.

31) α) $\sqrt[63]{a^9}$; β) $\sqrt[128]{a^8}$; γ) $\sqrt[221]{a^{17}}$; δ) $\sqrt[1739]{a^{47}}$; ε) $\sqrt[mn]{a^n}$.

32) α) $\sqrt[105]{(a^3)^5}$; β) $\sqrt[112]{(a^2)^7}$; γ) $\sqrt[360]{[(a^3)^4]^5}$.

33) α) $\sqrt[2xm]{a^m}$; β) $\sqrt[6xym]{a^{2ym}}$; γ) $\sqrt[27mnop]{(a^{3m})^{3p}}$.

34) α) $\sqrt[ax+bx]{m^{a+b}}$; β) $\sqrt[nx-mx]{a^{n-m}}$.

35) α) Die $(9a^2 - 49b^2)$-te Wurzel aus m^{3a-7b};
β) die $(12a^2 + 61ab + 77b^2)$-te Wurzel aus m^{4a+11b}.

36) $\sqrt[27]{a^4} \cdot \sqrt[27]{a^5} + \sqrt[42]{a} \cdot \sqrt[42]{a^5} : \sqrt[21]{a^{-4}}$. Aufl.: $2\sqrt[3]{a}$.

37) $\sqrt[mx]{\dfrac{a^{x-2}b^{x-4}}{c^{x-6}}} : \sqrt[mx]{\dfrac{b^{-4}}{a^2c^{-6}}}$. Aufl.: $\sqrt[m]{\dfrac{ab}{c}}$.

§ 45.

$$\sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y. \quad \text{(Vgl. §§ 9 und 21.)}$$

1) Wie wird aus einer Potenz eine Wurzel gezogen?

2) Wie wird eine Wurzel potenziert?

3) $\sqrt[3]{8^7} + \sqrt{25^3} + \sqrt[3]{64^8}$ zu berechnen. Aufl.: 65789.

4) Ebenso: $\sqrt[3]{(45^3)^2} + \sqrt[7]{(9^7)^5} + \sqrt[5]{100000^7} + \sqrt{(1\frac{11}{25})^3}$.

5) Ebenso: $\sqrt{(\frac{16}{25})^7} \cdot \sqrt{(\frac{25}{64})^6}$. Aufl.: $\frac{1}{80}$.

6) $\sqrt[3]{(4ab^2)^x} \cdot \sqrt[3]{(2a^2b)^x}$. Aufl.: $\sqrt[3]{(8a^3b^3)^x} = (2ab)^x$.

7) $\sqrt[x]{\left(\dfrac{a^{2x}}{a^3}\right)^z} \cdot \sqrt[x]{\left(\dfrac{a^{5x}}{a^9}\right)^z} \cdot \sqrt[x]{\left(\dfrac{a^{12}}{a^{6x}}\right)^z}$. Aufl.: a^z.

8) $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)^3} + \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)^3}$. Aufl.: $2a^3 + 6ab^2$.

9) $(\sqrt[7]{a^3b^5})^3 \cdot (\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4$. 10) $(\sqrt[x]{a^m b^n})^y \cdot (\sqrt[x]{a^n b^r})^z$.

11) α) $(\sqrt[3]{2^5})^5 \cdot (\sqrt[5]{3})^2$; β) $(\sqrt[n]{x})^m \cdot (\sqrt[p]{x})^q$.

12) α) $(\sqrt[15]{a^2b^{-3}c^4})^7$ β) $\left(\sqrt[x]{\dfrac{a^y b^x}{c^m}}\right)^n$; γ) $\left(\sqrt{\dfrac{3x^{-3}}{7z^{-7}}}\right)^3$.

13) α) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}\right)^7$; β) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[11]{16a^4}}\right)^{11}$; γ) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$;

δ) $\left(\sqrt{\sqrt[9]{2\frac{14}{25}}}\right)^9$. 14) $\left[\sqrt[x]{\sqrt[y]{\dfrac{a^x b^x}{c^x}}}\right]^y$.

15) α) $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})^2$; β) $(\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{a^2})^3$.

16) α) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^3$; β) $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3$.

17) α) $\left(\sqrt[x]{a}+\sqrt[y]{b}\right)^2$; β) $\left(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}\right)^3$.

18) α) $\left(\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[2]{a^5}\right)^5$; β) $\left(\sqrt[3]{mn^2}-\sqrt[3]{m^2n}\right)^4$.

§ 46.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$ (Vgl. §§ 10 und 22.)

1) Wie wird aus einer Wurzel eine Wurzel gezogen?

2) Wie wird eine Zahl durch ein Produkt radiziert?

3) $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}-3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}}-\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$. Aufl.: $\sqrt[60]{7}$.

4) $\sqrt[2x]{\sqrt[3y]{a^5}}\cdot\sqrt[6x]{\sqrt[y]{a^3}}\cdot\sqrt[x]{\sqrt[6y]{a^9}}\cdot\sqrt[6y]{\sqrt[x]{a}}$. Aufl.: $\sqrt[xy]{a^3}$.

5) $\sqrt[6]{\sqrt[8]{a^5b^7c^{-11}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[16]{a^{-43}b^7c^{37}}}$. Aufl.: $\sqrt[24]{a^{-19}b^7c^{13}}$.

6) $\sqrt[3x]{\sqrt[4y]{\frac{a^{4x-2}b^{15-3x}}{c^{2x-9}}}}\cdot\sqrt[6y]{\sqrt[2x]{\frac{a^{8x+2}b^{15x-15}}{c^{22x+9}}}}$.

7) $\sqrt[3]{531\,441}=81$; wie groß ist α) $\sqrt[6]{531\,441}$; β) $\sqrt[12]{531\,441}$?

8) Wenn $\sqrt[5]{282\,475\,249}=49$, wie groß ist $\sqrt[10]{282\,475\,249}$?

9) α) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{25}{49}a^2b^6c^8}}$; β) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}$; γ) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;

δ) $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$; ε) $\sqrt[7]{a^2\sqrt[3]{a}}$.

10) $\sqrt{3\sqrt[3]{5}}$. Aufl.: $\sqrt[6]{135}$.

11) α) $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{7}}$; β) $\sqrt[x]{a\sqrt[y]{b}}$; γ) $\sqrt[n]{a^p\sqrt[r]{a^q}}$.

12) α) $a\sqrt{\left(a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\right)}$; β) $a\sqrt[x]{a\sqrt[x]{a}}$; γ) $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

Antw.: α) $\sqrt[32]{a^{63}}$; β) $\sqrt[xx]{a^{xx+x+1}}$; γ) $\sqrt[16]{2\,147\,483\,648}$.

13) $a\sqrt[n]{\left(a^1 - {}^{n}\sqrt[n]{a^1 - {}^{n}\sqrt[n]{a^{1-n}}}\right)}$. Aufl.: $\sqrt[nnn]{a}$.

14) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$. Aufl.: $\sqrt[3]{2}$. 15) $\sqrt[x-1]{\frac{a}{\sqrt[x]{a}}}$. Aufl.: $\sqrt[x]{a}$.

§ 47.

Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten*).

1) Wie entsteht eine Potenz mit gebrochenem Exponenten?

2) Wie entsteht eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten?

3) Wie läßt sich eine Potenz oder eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten umändern?

4) Was bedeutet eine Potenz oder Wurzel mit gebrochenem negativen Exponenten?

5) Gelten die für Potenzen und Wurzeln mit ganzen Potenz- oder Wurzel-Exponenten bewiesenen Sätze auch für Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten, und warum?

6) $16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} + 125^{\frac{1}{3}} - 512^{\frac{5}{3}} + 100^{0,5} - 81^{0,75}$.

7) Umzuändern: $5^{\frac{3}{7}} + 7^{-\frac{3}{4}} + 5^{-\frac{3}{11}} + 9^{-\frac{1}{3}}$.

8) Zu berechnen: α) $36^{1\frac{1}{2}}$; β) $49^{3\frac{1}{2}}$; γ) $4^{-3\frac{1}{2}}$; δ) $8^{-2\frac{1}{3}}$; ε) $9^{-0,5}$.

9) Ebenso: α) $(3\frac{1}{16})^{-2\frac{1}{2}}$; β) $(1\frac{24}{25})^{-1\frac{1}{2}}$; γ) $(5\frac{1}{16})^{-1,25}$.

10) Ebenso: $\sqrt[\frac{1}{2}]{7} - \sqrt[\frac{2}{3}]{6\frac{1}{4}} + \sqrt[0,3]{8} - \sqrt[0,75]{27} + \sqrt[\frac{3}{4}]{64}$. Aufl.: $1232\frac{3}{8}$.

11) Ebenso: α) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{25}$; β) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{1}{36}}$; γ) $\sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{8}{27}}$; δ) $\sqrt[-0,375]{8}$.

12) α) $\sqrt[3]{a^5}$, β) $\sqrt[20]{a^{15}}$, γ) $\sqrt[13]{a^{-4}}$, δ) $\sqrt[-6]{a^{17}}$ in Potenzen oder in Wurzeln mit gebrochenen Exponenten zu verwandeln.

13) Ebenso: $\sqrt{a+b}$; $\sqrt{(a-b)^3}$; $1:\sqrt{(a-b)^5}$; $1:\sqrt[x]{a^{4x+3}}$.

14) Ebenso: α) $\sqrt[7]{\frac{a^2 b^3 c^4}{d^5 e^6}}$; β) $\sqrt[-9]{\frac{a^{-6} b^{12} c^{-3}}{d^5 e^{-13}}}$.

15) Zu berechnen: $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{7}{4}} + 16^{1\frac{3}{17}} \cdot 16^{\frac{5}{17}} \cdot 16^{\frac{1}{34}}$. A.: 2465.

*) Potenzen mit gebrochenen Exponenten wurden zuerst durch Newton eingeführt. (S. Leibnitzens mathem. Schriften. Berlin 1849. I. S. 101.)

16) Auszuführen: α) $a^{\frac{x}{y}} \cdot a^{\frac{z}{n}}$; β) $c^{\frac{p}{q}} c^{\frac{r}{s}} c^{\frac{t}{u}}$; γ) $m^{-\frac{x}{y}} \cdot m^{\frac{n}{z}} \cdot m^{-\frac{r}{s}}$.

17) Ebenso: $(a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{4}}) \cdot (a^{\frac{5}{8}} + a^{-\frac{7}{8}} + a)$.

18) Wenn $10^{2,089\,91} = 123$ und $10^{2,658\,96} = 456$ ist, wie groß ist $10^{4,748\,87}$?

19) $10^{0,301\,03} \cdot 10^{-1,477\,12} \cdot 10^{0,221\,85} \cdot 10^{2,954\,24}$.

20) $(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}} c^{\frac{3}{4}} d^{-\frac{5}{6}}) : (a^{\frac{7}{8}} b^{-\frac{9}{10}} c^{-\frac{10}{11}} d^{\frac{11}{12}})$.

21) $(16a^{\frac{3}{20}} - 40a^{1\frac{53}{70}} + 22a^{\frac{9}{52}} - 55a^{1\frac{71}{91}}) : (2a^{-\frac{3}{4}} - 5a^{\frac{6}{7}})$.

22) $8a^{-1\frac{7}{15}} - 12a^{-\frac{4}{5}} b^{-\frac{3}{4}} - 10a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{5}{6}} + 15b^{-1\frac{7}{12}}$ durch $4a^{-\frac{4}{5}} - 5b^{-\frac{5}{6}}$ zu dividieren. Antw.: $2a^{-\frac{2}{3}} - 3b^{-\frac{3}{4}}$.

23) Ebenso: $a^{-1,3} + a^{-\frac{2}{15}} - a^{-0,05} - a^{\frac{1}{3}} - a^{1,5} + a^{1\frac{7}{12}} + a^{\frac{5}{14}} + a^{1\frac{11}{21}} - a^{1\frac{17}{28}}$ durch $a^{-0,5} + a^{\frac{2}{3}} - a^{0,75}$.

24) Ebenso: $x^{-3,75} + y^{-4}$ durch $x^{-0,75} + y^{-0,8}$.

25) Wenn $9^{-1\frac{1}{6}} = 0,077\,040\,1$, wie groß ist $9^{-\frac{2}{3}}$?

26) $(1\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{8}{11})^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{7})^{\frac{1}{2}}$ zu berechnen.

27) $(a^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{7}{9}})^{\frac{x}{y}} \times (a^{\frac{11}{13}} - a^{\frac{15}{17}})^{\frac{x}{y}}$.

28) $\frac{16a^4 b^{12} c^4}{81 n^8 p^{12}}$ zur Potenz mit dem Exponenten $\frac{3}{4}$ zu erheben.

29) Wenn $10^{0,135\,79} = 1,367\,07$ und $2^{0,135\,79} = 1,098\,69$, wie groß ist $5^{0,135\,79}$?

30) α) $(a^{\frac{3}{7}})^{\frac{5}{9}}$; β) $(a^{-\frac{2}{5}})^{1\frac{2}{5}}$; γ) $(a^{\frac{3}{7}})^{-1\frac{2}{5}}$; δ) $3(a^{-1\frac{3}{11}})^{-1\frac{4}{7}}$; ε) $(a^{\frac{x}{y}})^{\frac{p}{q}}$; ζ) $(a^{-\frac{x}{y}})^{-\frac{m}{n}}$.

31) Wie groß ist $10^{0,903\,09}$, wenn $10^{0,301\,03} = 2$ ist?

32) $10^{0,1} = 1,258\,925$; $10^{0,01} = 1,023\,293$; $10^{0,001} = 1,002\,305$; $10^{0,000\,1} = 1,000\,230$. Wie groß ist α) $10^{3,214\,3}$; β) $10^{4,797}$; γ) $10^{1,041\,\dot{4}}$? (Anmerk.: Abgekürzte Multiplikation.)

33) Wenn $e^{\frac{x}{y}} = m$ und $e = v^{\frac{p}{q}}$, wie groß ist m in Bezug auf die Basis v?

34) Wenn $2{,}71828^{1{,}94591} = 7$ und $10^{0{,}43429} = 2{,}71828$, wie groß ist 7 in Bezug auf die Basis 10? Aufl.: $10^{0{,}84509}$.

35) $a^{0{,}30103} - a^{-0{,}47712}$ zur 3ten und 4ten Potenz zu erheben.

36) α) $\sqrt[7]{2{,}71828^{13{,}62137}}$; β) $\sqrt[-3]{10^{-3{,}8362608}}$.

§ 48.

Über das Vorzeichen der Wurzel.

I. $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \left\{\begin{matrix} a - b \\ b - a \end{matrix}\right\} = \pm (a - b)$.

II. $\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$; III. $\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}$,
wo n eine ganze Zahl bedeutet.

IIII. Einer geraden Wurzel aus einer negativen Zahl wie $\sqrt[2n]{-a}$ entspricht keine der gewöhnlichen Zahlengrößen im positiven und negativen Zahlengebiete.

(In Bezug auf das doppelte Zeichen einer Wurzel möge bemerkt werden, daß man nur in dem Falle ein doppeltes Zeichen erhält, wenn man die Art der Entstehung der Wurzelgröße nicht kennt. $a^2 - 2ab + b^2$ z. B. kann sowohl aus $(a-b)(a-b)$, als aus $(b-a)(b-a)$ entstanden sein, es ist also $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ entweder $= +(a-b)$ oder $= -(a-b)$, nicht aber $= +(a-b)$ und $= -(a-b)$. $\sqrt{(+a)^2}$ ist nur $= +a$ und $\sqrt{(-a)^2} = -a$).

1) α) $\sqrt{36}$; β) $\sqrt{49}$; γ) $\sqrt{4a^2b^4c^6}$; δ) $(36x^4y^6z^8)^{\frac{1}{2}}$.

2) α) $\sqrt{m^2+n^2-2mn}$; β) $\sqrt{1-2x+x^2}$; γ) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$.

3) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-512} - \sqrt[3]{-27} + (-\frac{64}{125})^{\frac{1}{3}} - (\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$.

4) $4\sqrt[3]{-(a-b)^3} - \sqrt[3]{-(5p-6q)^3} - \sqrt[3]{(-a)^3(-b)^6(-c)^{12}}$.

5) $\sqrt[4]{a^{12}b^{16}c^{20}} + \sqrt[5]{(-a)^{15}b^{-25}(-c^{35})} + \sqrt[7]{a^{-14}b^{21}c^{-28}}$.

6) $\sqrt{(-x)^2}$; $\sqrt{(-13)^2}$; $\sqrt[3]{(-a)^4}$; $\sqrt[3]{(-27)^4}$; $(-64)^{-\frac{2}{3}}$.

7) $x + \sqrt{x}$ für $x = (+4)^2$ und für $x = (-5)^2$ zu berechnen.

8) Ebenso: $x - \sqrt{x}$ für $x = (-4)^2$ und $x = (+5)^2$.

9) Ebenso: $x - (a+b)\sqrt{x}$ für $x = (b-a)^2$ und $x = (-2a)^2$.

10) Ebenso: $x + \sqrt{25 + x}$ für $x = (-14)^2 - 25$.

11) Ebenso: $x + 2(a + b)\sqrt{3(a^2 + b^2) + x} + 10ab$ für $x = (b - 3a)^2 - 3(a^2 + b^2)$. Aufl.: 0.

§ 49.

Rechnung mit imaginären Größen.

I. $(\sqrt{-a})^2 = -a$. II. $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$.

III. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$. IIII. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a : b}$.

V. $\sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \cdot \sqrt{-1}$. VI. $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = -\sqrt{a : b} \cdot \sqrt{-1}$.

Bezeichnung: $\sqrt{-1}$ wird nach Gauß (Disq. arithm. 337) mit i bezeichnet*).

1) α) $\sqrt{-49} + \sqrt{-64} - \sqrt{-100} + 3\sqrt{-25} - \sqrt{-2\frac{1}{4}} - 3\sqrt{-1\frac{7}{9}} - 5\sqrt{-1\frac{9}{16}}$ Antw.: $8\frac{1}{4}\sqrt{-1}$;

β) $2\sqrt{-12} - 3\sqrt{-27}$; γ) $\sqrt{-a^2b^2} + \sqrt{-a^2 - b^2 - 2ab}$.

2) Wie groß sind α) $(\sqrt{-1})^1$; β) $(\sqrt{-1})^2$; γ) $(\sqrt{-1})^3$; δ) $(\sqrt{-1})^4$; ε) i^5; ζ) i^6; η) i^7; ϑ) i^8; ι) i^9?

3) $4\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} - 3\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-1\frac{1}{5}} + \sqrt{-2}(\sqrt{-2} + \sqrt{3}) - \sqrt{-6}(\sqrt{-24} + \sqrt{6} - \sqrt{-\frac{1}{6}})$.

Antw.: $-\sqrt{6} + 9 + \sqrt{-6} - 6\sqrt{-1}$.

4) α) $a\sqrt{-a^2b^3} \cdot \sqrt{-a^4b^5}$; β) $a^2b^2\sqrt{-a^{-5}b^{-1}} \cdot \sqrt{-a^9b^5}$.

5) $(1 - 2\sqrt{-3})(4 - 5\sqrt{-6}) - (7 - 8\sqrt{-9})(10 + 11\sqrt{-12})$.

6) α) $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})$;

β) $(x + \sqrt{-y})(x - \sqrt{-y})$; γ) es soll $p + q$ als das Produkt zweier Binome dargestellt werden.

7) $(\sqrt{-17} + \sqrt{-19}) \cdot (\sqrt{-119} - \sqrt{-133})$. Antw.: $2\sqrt{7}$.

8) α) $(a + \sqrt{-b^2})(a - \sqrt{-b^2})$; β) $(a + bi)(c + di)$; γ) $(x + yi)(x - yi)$.

9) $(\sqrt{-a^3b^5} + \sqrt{-a^7b^9})(\sqrt{-a^5b^7} - \sqrt{-a^9b^{11}})$.

10) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-40} \cdot \sqrt{-5} - \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$.

11) $\sqrt{-a^2b} \cdot \sqrt{-ab^3} \cdot \sqrt{-ab^2}$.

12) $\sqrt{-m^4n^2} \cdot \sqrt{-mn^3} \cdot \sqrt{-m^3n^7} \cdot \sqrt{-m^2n}$.

---

*) Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$ werden nach Gauß „laterale" (Gött. gel. Anz. 1831), nach Cauchy „komplexe" Zahlen genannt.

13) α) $\sqrt{-176}:\sqrt{11}-\sqrt{-325}:\sqrt{-13}+\sqrt{540}:\sqrt{-15}$;
β) $(2\sqrt{8}-\sqrt{-10}):(-\sqrt{-2})$;
γ) $(3\sqrt{-4}-2\sqrt{-12}+\sqrt{6}-9):(-3\sqrt{-2})$.

14) $(18\sqrt{-30}+36\sqrt{50}-54\sqrt{70}):(9\sqrt{-10})$.

15) $(\sqrt{-1})^{4n}$, $(\sqrt{-1})^{4n+1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2}$, $(\sqrt{-1})^{4n+3}$ zu berechnen, wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

16) $(\sqrt{-1})^{15}+(\sqrt{-1})^{24}-(\sqrt{-1})^{39}+(\sqrt{-1})^{44}+(\sqrt{-1})^{55}-(\sqrt{-1})^{113}-(\sqrt{-1})^{130}$ zu berechnen.

17) Ebenso: α) $(\sqrt{-5})^4$; β) $(\sqrt{-3})^8$; γ) $(\sqrt{-7})^5$; δ) $(\sqrt{-2})^{25}$; ε) i^{-1}; ζ) i^{-2}; η) i^{-3}; ϑ) i^{-4}; ι) $i^{-(2n+1)}$.

18) α) Wenn $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=J_1$ und $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=J_2$ gesetzt wird, so soll nachgewiesen werden, daß a) $J_1{}^3=1$, b) $J_2{}^3=1$, c) $J_1{}^2=J_2$, d) $J_2{}^2=J_1$, e) $J_1{}^{3n}=J_2{}^{3n}=1$, f) $J_1{}^{3n+1}=J_2{}^{3n+2}=J_1$, g) $J_2{}^{3n+1}=J_1{}^{3n+2}=J_2$; β) was wird aus x^2-2x+2 für $x=1\pm\sqrt{-1}$ und γ) aus $x^3-5x^2+12x-7$ für $x=2\mp\sqrt{-3}$?

19) α) $(\sqrt{-75}-5)^3$; β) $(\sqrt{-1{,}08}-0{,}6)^3$.

20) $\left[-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}+\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\right]^3$. Aufl.: a.

21) $\frac{1}{1024}\left[-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right]^5$. Aufl.: 1.

In folgenden Quotienten die imaginären Größen aus dem Divisor in den Dividenden zu schaffen:

22) α) $\frac{1}{a-\sqrt{-b}}$; β) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}$; γ) $\frac{\sqrt{-3}-\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}+\sqrt{-2}}$.

23) α) $\frac{7\sqrt{2}-5\sqrt{-3}}{9-2\sqrt{-2}}$; β) $\frac{83-2\sqrt{-5}}{4+5\sqrt{-5}}$; γ) $\frac{23-37\sqrt{-2}}{7-6\sqrt{-2}}$.

24) $\frac{m+\sqrt{-n}}{m-\sqrt{-n}}+\frac{m-\sqrt{-n}}{m+\sqrt{-n}}$. Aufl.: $\frac{2(m^2-n)}{m^2+n}$.

25) $\frac{69+\sqrt{-3}-6\sqrt{-5}-7\sqrt{15}}{3-\sqrt{-3}+3\sqrt{-5}}$. Aufl.: $2+\sqrt{-3}-4\sqrt{-5}$

C. Wurzeln aus gemeinen Zahlen und algebraischen Summen.

§ 50.

Quadratwurzel aus gemeinen Zahlen.

I. $\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = a \pm b$.

II. $\sqrt{a^2 \pm k} = a \pm \frac{k}{2a}$, wenn k gegen a sehr klein ist.

1) Wieviel Ziffern kann das Quadrat einer einzifferigen, wieviel das Quadrat einer zwei-, drei- oder mehrzifferigen Zahl haben?

2) Wieviel Ziffern kann die dritte Potenz einer ein-, zwei-, drei- oder mehrzifferigen Zahl haben?

3) Wieviel Ziffern muß die zweite und dritte Wurzel aus einer ein-, zwei-, drei-, vier- u. s. w. zifferigen Zahl haben?

4) Zwischen welchen Einern liegen die Quadratwurzeln aus 3, 19, 63, 50, 99, 80 und 35?

5) Zwischen welchen Zehnern liegen die Quadratwurzeln aus 200, 700, 7700, 1719, 810, 3141, 360, 9899 und 4901?

6) Zwischen welchen Hunderten liegen die Quadratwurzeln aus 60000, 52000, 25000, 64000, 759121, 487312 und 173191?

7) Wie wird jede Zahl, aus der die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, in Klassen abgeteilt? Wie muß die Abteilung vorgenommen werden, wenn die Zahl eine oder mehrere Decimalstellen enthält?

8) Wie wird aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen?

Aus folgenden Zahlen (Nr. 9—25) die Quadratwurzel zu ziehen:

9) 169; 441; 1849; 784; 1521; 6084; 8100. Reste: 0.

10) 783; 1279; 1818; 3190; 4815; 5095; 7623. Reste: 54.

11) 15129; 207936; 622521; 185761; 163216; 40000. Reste: 0.

12) 1841449; 97535376; 4401604; 9054081; 51825601. Reste: 0.

13) α) 780811249; β) 900540081; γ) 3466383376. R.: 0.

14) 846398; 2619761; 2717741; 1019918. Reste: 1837.

15) α) 150229108836; β) 1524155677489. Reste: 0.

16) 9512381399; 1824998399; 1848999439. R.: 85438.

17) 248004; 630436; 15968016; 2499700009*). R.: 0.

18) 13,69; 5760,81; 33708,96; 227,7081; 4762,104064; 25,0007000049; 0,09; 0,2209; 0,013689; 0,00056644; 0,000000000361. Reste: 0.

*) Diese Beispiele können nach der Formel $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ berechnet werden.

19) α) 2; β) 3; γ) 5.
Aufl.: α) 1,414 213 5....; β) 1,732 050 8....; γ) 2,236 067 977.....

20) α) 5,5; β) 4,9; γ) 25,16; δ) 0,9. (6 Decimalstellen.)
Antw.: β) 2,213 594; γ) 5,015 974.

21) α) 18 439; β) 1,1029; γ) 0,000 64; δ) 0,001; ε) 0,000 04. (6 Decimalstellen.) Antw.: γ) 0,025 298; ε) 0.006 325.

22) α) $\frac{49}{64}$; β) $\frac{100}{121}$; γ) $\frac{3083536}{8108169}$; δ) $1\frac{600}{2209}$; ε) $9\frac{11104}{12769}$.

23) α) $\frac{17}{49}$; β) $\frac{1111}{8100}$; γ) $\frac{1357}{4900}$; δ) $789\frac{2785}{1841449}$. (6 Decimalstellen.)

24) $\frac{2}{3}$. Aufl.: $\sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{6} : 3 = 0,816\,496\,6$.

25) α) $\frac{3}{5}$; β) $\frac{5}{6}$; γ) $\frac{355}{113}$; δ) $\frac{1}{1719}$; ε) $97\frac{87}{99}$; ζ) $\frac{103}{120}$; η) $\frac{703}{8000}$. (5 Decimalstellen.)

Zu berechnen:

26) α) $\sqrt{\sqrt{38\,950\,081}}$; β) $\sqrt{\sqrt{47\,458\,321}}$; γ) $\sqrt{\sqrt{92\,236\,816}}$.

27) α) $\sqrt[4]{1\,160\,008\,396\,738\,816}$; β) $\sqrt[4]{4\,366\,651\,114\,970\,881}$.

28) α) $\sqrt[4]{32\frac{9569}{28561}}$; β) $\sqrt[4]{3088\frac{768}{14641}}$. Reste: 0.

29) α) $\sqrt[8]{28\,179\,280\,429\,056}$; β) $\sqrt[8]{62\,259\,690\,411\,361}$.

30) $\sqrt[8]{10}$ bis auf fünf Decimalstellen zu berechnen.

31) Ebenso: α) $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$; β) $16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; γ) $32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; δ) $63\sqrt{\left\{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right\}}$; ε) $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$; ζ) $24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; η) $48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ *).
Aufl.: α) 6,122 934 9; β) 6,242 890 3; γ) 6,273 097 0; δ) 6,280 662 3; ε) 6,211 656; ζ) 6,265 257; η) 6,278 697.

32) α) $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; β) $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; γ) $\frac{1}{4}\left[\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right]$; δ) $\frac{1}{4}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right]$ **).

33) $\frac{1}{8}\left[\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{9-3\sqrt{5}}\right]+\frac{1}{8}\left[\sqrt{15+3\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right]$ **).

*) α), β), γ) und δ) sind die Umfänge des regulären Acht-, Sechzehn-, Zweiunddreißig- und Vierundsechzigeckes, ε), ζ) und η) die Umfänge des regulären Zwölf-, Vierundzwanzig- und Achtundvierzigeckes, wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises gleich 1 ist. (Heis, ebene und sphärische Trigonometrie, VIII. 130, Zus.)

**) Man vergleiche Heis, ebene und sphärische Trigonometrie, VIII. 129.

34) α) $\sqrt{100{,}0002}$; β) $\sqrt{169{,}00052}$; γ) $\sqrt{15129{,}01722}$. (Bis auf 5 Decimalstellen nach Formel II. zu berechnen.)

35) $\sqrt{64\frac{1}{15}}$; $\sqrt{144\frac{4}{18}}$; $\sqrt{99\frac{9}{10}}$; $\sqrt{24\frac{23}{24}}$; $\sqrt{1023\frac{19}{35}}$.

36) Wenn $\sqrt{2954961} = 1719$, wie groß ist $\sqrt{2954900}$?

37) Wenn bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus 123456789101112 die Zahl 11111111 herauskommt und der Rest 1446791 übrig bleibt, wie findet man aus dem Reste und der gefundenen Wurzel die zu letzterer gehörigen fünf ersten Decimalstellen?

38) $\sqrt{9{,}8696044011} = 3{,}14159$, der Rest ist $= 0{,}0000166730$. Wie heißen die fünf folgenden Decimalstellen der Wurzel?

39) Wenn $10^{\frac{1}{2048}} = 1{,}0011249$, wie groß ist α) $10^{\frac{1}{4096}}$, β) $10^{\frac{1}{8192}}$, γ) $10^{\frac{1}{16384}}$, δ) $10^{\frac{1}{32768}}$?

40) Eine quadratische Hausflur sei mit 784 quadratischen Platten belegt; wieviel Platten befinden sich an jeder Seite?

41) Ein rechtwinkliger Acker von gleicher Länge und Breite enthält 1522756 *qm*. Wie lang und breit ist derselbe?

42) Ist der Inhalt eines Kreises *k*, so ist der Radius desselben $\sqrt{k : 3{,}14159}$. Wie groß ist der Radius eines Kreises, dessen Inhalt 1 *qm* beträgt? Aufl.: 0,56419 *m*.

43) Die Mittelglieder der Proportion $5132 : x = x : 27195$ zu suchen.

44) Nach einem merkwürdigen, von dem Astronomen Keppler entdeckten, Gesetze verhalten sich die Umlaufszeiten der Planeten wie die Quadratwurzeln aus den dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Wenn nun die mittleren Entfernungen der Erde und des Jupiter von der Sonne sich wie 1 : 5,2028 verhalten und die siderische Umlaufszeit der Erde 365,25637 Tage beträgt, wie läßt sich hieraus die siderische Umlaufszeit des Planeten Jupiter berechnen? Antw.: Die Umlaufszeit beträgt 4334,64 Tage.

45) Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks betrage 57,921 *m*, die andere 98,756 *m*. Wie groß ist die Hypotenuse?

46) Ein rechtwinkliges Feld habe 712,3 *m* Länge und 518,7 *m* Breite. Wie weit ist es von der einen bis zur anderen gegenüberstehenden Ecke? Antw.: 881,14 *m*.

47) Ein rechtwinklig behauener Stein habe 1,64 *m* Länge, 1,28 *m* Breite und 0,65 *m* Höhe. Wie weit ist es von einer Ecke zur anderen, gegenüberstehenden?

Antw.: 2,18 *m*.

48) Wenn man untersuchen will, ob irgend eine Zahl n eine **Primzahl** ist oder nicht, mit welchen Divisoren braucht man alsdann die Zahl nur zu dividieren? **Antw.**: Mit allen Zahlen, welche Primzahlen und kleiner als $\sqrt{n}$ sind.

49) Welche von den Zahlen α) 8543, β) 83731, γ) 997009, δ) 145157, ε) 394969, ζ) 11111, η) 111111 sind Primzahlen?

50) $\frac{7}{10^7}+\frac{13\sqrt{146}}{50}$ weicht erst in der **zehnten** Decimalstelle von der bekannten Zahl π, d. h. dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser, ab. Es soll dieser Zahlen-Ausdruck bis auf 10 Decimalstellen ausgerechnet werden.

51) Ist der Radius eines Kreises $= 1$, so ist α) der Umfang des eingeschriebenen regulären Zehneckes $5(\sqrt{5}-1)$, β) der Inhalt desselben $\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, γ) der Umfang des eingeschriebenen regulären Fünfeckes $\frac{5}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, δ) der Inhalt desselben $\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, ε) der Umfang des dem Kreise umgeschriebenen regulären Zehneckes $4\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$, ζ) der Umfang des dem Kreise umgeschriebenen regulären Fünfecks $10\sqrt{5-2\sqrt{5}}$*). Es sollen bis auf 6 Decimalstellen die obigen Zahlen-Ausdrücke berechnet werden.

52) Wenn x eine sehr kleine Zahl bedeutet, so ist näherungsweise $\frac{1}{\sqrt{1\pm x}}=1\mp\frac{1}{2}x$. Warum?

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{0,9994}}=1,0003$.

§ 51.

Quadratwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

Aus den Ausdrücken 1) bis 27) die Quadratwurzel zu ziehen:

1) α) $9p^2-30pq+25q^2$; β) $9g^2-6g+1$; γ) $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$.
2) α) $289x^2-646xy+361y^2$; γ) $17,64m^2+54,6mn+42,25n^2$?
3) α) $0,015625p^2+pq+16q^2$; β) $\frac{1}{4}a^2x^2-abxy+\frac{9}{16}b^2y^2$.
4) $\frac{25}{64}\frac{a^2b^2}{c^2d^2}-\frac{3}{5}\frac{a^2}{d^2}+\frac{144}{625}\frac{a^2c^2}{b^2d^2}$. **Aufl.**: $\frac{5}{8}\frac{ab}{cd}-\frac{12}{25}\frac{ac}{bd}$.
5) $\frac{1}{4}\frac{m^6n^8}{p^{10}q^{12}}-\frac{6}{5}\frac{mn^3}{pq^3}+\frac{36}{25}\frac{p^8q^6}{m^4n^2}$.

*) S. Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie, I. Teil, VI 11, Zus. 2.

6) $\frac{4}{25}\frac{a^2+2ab+b^2}{m^2-2mn+n^2}-1+\frac{25}{16}\frac{m^2-2mn+n^2}{a^2+2ab+b^2}$.

7) $0{,}09a^{-4}b^{-6}-0{,}3+0{,}25a^4b^6$. Aufl.: $0{,}3a^{-2}b^{-3}-0{,}5a^2b^3$.

8) $\frac{16}{169}\frac{a^{-6}b^{10}c^{-14}}{d^{18}e^{-22}f^{26}}-\frac{56}{143}\frac{a^{-1}bc^{-1}}{de^{-1}f}+\frac{49}{121}\frac{a^4b^{-8}c^{12}}{d^{-16}e^{20}f^{-24}}$.

9) α) $a^{6m}-2a^{3m}b^{5m}+b^{10m}$; β) $9a^{2m}+24a^{m+p}+16a^{2p}$.

10) $25a^{-4m}b^{-6p}-70a^mb^{-p}+49a^{6m}b^{4p}$.

11) $\frac{9}{49}\frac{x^{-4n}y^{6m+8}}{z^{-10n-4}}-\frac{x^{-1}y^{-1}}{z^{-1}}+\frac{49}{36}\frac{x^{4n-2}y^{-10-6m}}{z^{10n+2}}$.

12) α) $x^2+4xy+6xz+4y^2+12yz+9z^2$. Aufl.: $x+2y+3z$;
β) $x^4+6x^3+25x^2+48x+64$;
γ) $(6y^2)^2+60y^3+(13y)^2+120y+144$;
δ) $(13x^2)^2+(4x^3)^2+(7x)^2+210x^3-120x^5$.

13) $4x^2y^2-20xy^2z+28x^2yz+25y^2z^2-70xyz^2+49x^2z^2$.

14) $\frac{4}{9}\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{z}-\frac{16}{15}\frac{x^2}{yz}+\frac{9}{16}\frac{y^2}{z^2}+\frac{6}{5}\frac{xy}{z^2}+\frac{16}{25}\frac{x^2}{z^2}$.

15) $4a^4-12a+25a^{-2}-24a^{-5}+16a^{-8}$.

16) $\frac{9}{25}\frac{m^6n^4}{p^6q^8}-\frac{12}{35}\frac{m^5n^5}{p^7q^9}-\frac{332}{735}\frac{m^4n^6}{p^8q^{10}}+\frac{16}{63}\frac{m^3n^7}{p^9q^{11}}+\frac{16}{81}\frac{m^2n^8}{p^{10}q^{12}}$.

17) $a^2-6ab+10ac-14ad+9b^2-30bc+42bd+25c^2$
$-70cd+49d^2$. Aufl.: $a-3b+5c-7d$.

18) $\frac{1}{4}\frac{m^2n^2}{o^2p^2}-\frac{2}{3}\frac{m^2}{o^2}-\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\frac{n^2}{p^2}+\frac{4}{9}\frac{m^2p^2}{o^2n^2}+\frac{p^2}{n^2}+\frac{16}{15}$
$+\frac{9}{16}\frac{o^2p^2}{m^2n^2}+\frac{6}{5}\frac{o^2}{m^2}+\frac{16}{25}\frac{o^2n^2}{m^2p^2}$.

19) $9a^{2m+2}+42a^{4m-2}+103a^{6m-6}+126a^{8m-10}+81a^{10m-14}$.

20) α) $a+2\sqrt{ab}+b$; β) $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

21) α) $\sqrt{a}\pm2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$; β) $\sqrt[3]{a}\pm2\sqrt[12]{a^2b^3}+\sqrt{b}$.

22) $\sqrt[x]{a^2}\pm2\sqrt[xy]{a^yb^x}+\sqrt[y]{b^2}$.

23) α) $a^{\frac{4}{7}}+2a^{\frac{24}{35}}+a^{\frac{4}{5}}$; β) $m^{\frac{8}{9}}-2m^{\frac{1}{63}}+m^{-\frac{6}{7}}$.

24) $a-2\sqrt[6]{a^3b^2}+\sqrt[4]{a^2c}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[12]{b^4c^3}+\frac{1}{4}\sqrt{c}$.

25) $\sqrt[m]{a^2}-2a\sqrt[mn]{a^nb^m}-2b\sqrt[mx]{a^xc^m}+a^2\sqrt[n]{b^2}+2ab\sqrt[nx]{b^xc^n}+b^2\sqrt[x]{c^2}$.

26) α) $-a\pm2\sqrt{ab}-b$; β) $m^2-2mn\sqrt{-x}-n^2x$.

27) $a^2 - 2ab\sqrt{-1} - 2ac\sqrt{-1} - b^2 - 2bc - c^2$

28) $\alpha)$ $\sqrt{x^2 \pm y}$; $\beta)$ $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm y}}$. Antw.: $\alpha)$ $x \pm \frac{y}{2x} - \frac{1}{8}\frac{y^2}{x^3} \ldots$;

$\beta)$ *) $\frac{1}{x} \mp \frac{1}{2}\frac{y}{x^3} + \frac{3}{8}\frac{y^2}{x^5} \mp \frac{5}{16}\frac{y^3}{x^7} + \frac{35}{128}\frac{y^4}{x^9} \ldots$.

29) Was wird aus dem Resultate von Nr. 28, α) wenn $x = 1$, β) wenn $x = 4$, $y = 0{,}1$ gesetzt wird?

30) $\alpha)$ $\sqrt{82}$, $\beta)$ $\sqrt{101}$, $\gamma)$ $\sqrt{48}$ nach Nr. 28 α) zu berechnen.

31) $\alpha)$ $\sqrt{x^2 + x + 1}$; $\beta)$ $\sqrt{x^2 - x - 1}$. (5 Glieder.)

32) Die Quadratwurzel aus $x^4(a^2 - 2ab + b^2) + x^3(2a^3 - 2b^3) + x^2(3a^4 + 3a^2b^2 + 3b^4) + x(2a^5 + 2a^4b + 2a^3b^2 - 2a^2b^3 - 2ab^4 - 2b^5) + a^6 - 2a^3b^3 + b^6$ zu ziehen.

§ 52.

Kubikwurzel aus gemeinen Zahlen.

I. $\sqrt[3]{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} = a \pm b$.

II. $\sqrt[3]{a^3 \pm k} = a \pm \frac{k}{3a^2}$, wenn k gegen a sehr klein ist.

1) Zwischen welchen Einern liegen die Kubikwurzeln aus 39, 813, 314, 578, 124, 7, 215 und 98?

2) Zwischen welchen Zehnern liegen die Kubikwurzeln aus 5000, 317000, 21600, 871356, 612375 und 511999?

3) Zwischen welchen Hunderten liegen die Kubikwurzeln aus 6000000, 718000000, 335321986, 72900000, 31373512, 9798766?

4) Wie wird eine Zahl, aus der die Kubikwurzel ausgezogen werden soll, in Klassen abgeteilt?

5) Wie wird aus einer Zahl die Kubikwurzel gezogen?

Aus folgenden Zahlen (Nr. 6 bis Nr. 18) soll die Kubikwurzel ausgezogen werden:

6) $\alpha)$ 74088; $\beta)$ 389017; $\gamma)$ 493039; $\delta)$ 681472; $\varepsilon)$ 912673. Reste: 0.

7) $\alpha)$ 18400234; $\beta)$ 13998034; $\gamma)$ 10360768; $\delta)$ 8121154; $\varepsilon)$ 3308554; $\zeta)$ 3112744. (Jede Wurzel macht mit ihrem Reste 754 aus.)

8) $\alpha)$ 27027010235; $\beta)$ 29704594907; $\gamma)$ 125676216963; $\delta)$ 131096513234; $\varepsilon)$ 313323546322. Reste: 1234.

*) Anleitung: Man dividiere α) in 1.

9) α) 1 371 700 969 396; β) 216 086 087 434 268 270 338. Reste: 8 765.

10) α) 204 409 331 068 643; β) 527 672 382 059 550 874 112. R.: 0.

11) α) 1 881 640 295 202 816; β) 371 992 652 887 607 604 559. R.: 0.

12) α) 125 068 187 394 966 089 429; β) 999 970 000 299 999. R.: 0.

13) α) 371,694 959; β) 934,007 359 375; γ) 0,588 480 472; δ) 0,001 771 561; ε) 0,000 007 880 599. Reste: 0.

14) α) 2; β) 3; γ) 5. Aufl.: α) 1,259 921; β) 1,442 249; γ) 1,709 975.

15) α) 2 515 123; β) 38 272 712; γ) 342 853 020 998. (3 Decimalstellen.)

16) α) 7 988,005 998; β) 3,2; γ) 5,12; δ) 0,27; ε) 0,012 5. (4 Decimalstellen.)

17) α) $\frac{426\,957\,777}{107\,850\,176}$; β) $\frac{343 \cdot 389\,017}{729 \cdot 912\,673}$; γ) $381\frac{5}{64}$; δ) $7558\frac{127}{512}$.

18) α) $\frac{5}{27}$; β) $\frac{7}{1728}$; γ) $\frac{7}{11}$; δ) $7\frac{8}{9}$; ε) $1\frac{9}{25}$.
Aufl.: α) 0,569 992; β) 0,159 411; γ) 0,860 138 4; δ) 1,990 697; ε) 1,107 931.

19) α) $10^{\frac{2}{3}}$; β) $(\frac{1}{11})^{-\frac{2}{3}}$; γ) $(\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}$; δ) $0{,}007^{-\frac{1}{3}}$.
Aufl.: α) 4,641 589; β) 4,946 087; γ) 1,310 37; δ) 5,227 58.

20) α) $\sqrt[3]{(\sqrt{24\,137\,569})}$; β) $\sqrt[6]{1\,544\,804\,416}$. Reste: 0.

21) $\sqrt[6]{3\,462\,825\,991\,689 \times 8\,990\,607\,867\,641\,856}$. Aufl.: 56 088.

22) $\sqrt[9]{322\,687\,697\,779 \times 794\,280\,046\,581}$. Aufl.: 399.

23) $\sqrt[27]{1\,192\,533\,292\,512\,492\,016\,559\,195\,008\,117}$. Aufl.: 13.

24) $\sqrt[12]{491\,258\,904\,256\,726\,154\,641^5}$. Aufl.: 418 195 493.

25) α) $\sqrt[3]{512{,}0384}$; β) $\sqrt[3]{1\,728{,}093\,024}$. (Nach Formel II.)

26) Wenn $\sqrt[3]{2\,498\,846\,293} = 1357$, wie groß ist $\sqrt[3]{2\,501\,780\,000}$?

27) $3 + \sqrt[3]{\left\{3 + \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{4{,}6717}}\right)}\right\}}$. (4 Decimalstellen.)

28) Wie groß ist $100 + \sqrt[3]{a}$, wenn $a = 100 + \sqrt[3]{b}$, $b = 100 + \sqrt[3]{c}$, $c = 100 + \sqrt[3]{d}$, $d = 100 + \sqrt[3]{e}$ und $e = 100$ gesetzt wird? (4 St.)

29) Ein rechtwinkliger Stein von 102 *cm* Höhe, 40 *cm* Breite, 31 *cm* Dicke hat mit einem kubischen Steine von derselben Materie gleiches Gewicht. Wie groß ist jede Seite des kubischen Steines?
Aufl.: 50,1966 *cm*.

30) α) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der doppelt so groß ist als ein anderer Würfel von 120 *cm* Höhe*)? β) Nach einer Sage ließ der König Minos seinem Sohne Glaukos ein Grabmal in Form eines Würfels errichten. Da die Bauleute dasselbe 100 Fuß lang, breit und hoch gemacht hatten, fand er es zu klein und verlangte, daß es noch einmal so groß sollte gemacht werden. Wie groß war also jede Seite des Würfels zu nehmen?
Antw.: α) 151,19 *cm*; β) 125 Fuß 11,905 Zoll.

31) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der so groß ist, als drei Würfel zusammen, von denen der erste zur Höhe 27 *cm*, der zweite 66 *cm* und der dritte 103 *cm* hat?
Antw.: 111,866 *cm*.

32) Die unbekannten Glieder folgender Proportion zu berechnen: $37\,245\,453 : x^2 = x : 164\,923\,857$.
Aufl.: $x^2 = 33\,540\,625\,881$; $x = 183\,141$.

33) Der Radius einer Kugel, deren Inhalt p ist, ist gleich $\sqrt[3]{0{,}23873p}$. Wie groß ist der Radius einer Kugel, welche 48 *ccm* Inhalt hat? Aufl.: 2,254 *cm*.

34) Die spanischen Kolonieen in Amerika haben seit ihrer Entdeckung bis 1803, in 311 Jahren, gemäß Bestimmung von Alexander von Humboldt 503978168 Mark Silber (à $\frac{1}{4}$ *kg*) geliefert. Wenn nun ein preußischer Kubikfuß Silber 1423 Mark wiegt, wie groß würde die Höhe eines Würfels von diesem seit 311 Jahren gewonnenen Silber sein?
Antw.: 70 Fuß 9,018 Zoll.

35) Alexander von Humboldt schätzt die Gold-Produktion im spanischen Amerika und in Brasilien, von 1492 bis 1803, zu 9756160 preußischen Mark. Welchen Durchmesser würde eine Kugel von diesem Golde haben, vorausgesetzt, daß ein Kubikfuß Gold 2542 preußische Mark schwer ist? (S. Beispiel 33.)
Antw.: 19 Fuß 5,102 Zoll.

---

*) Delische Aufgabe. Eine Pest in Griechenland soll nämlich veranlaßt haben, das Orakel in Delos zu befragen, was zu thun sei. Das Orakel soll die Antwort erteilt haben, den Altar des Apollo, welcher ein Würfel war, zu verdoppeln. Da man dieses nicht zu bewerkstelligen wußte, habe man bei Plato dazu die Anweisung gesucht. — Dieses Problem von der Verdoppelung des Würfels beschäftigte wegen seiner Schwierigkeit lange Zeit hindurch die griechischen Mathematiker. Plato gab eine mechanische Lösung; Menächmus löste die Aufgabe mittelst Kegelschnitte. (Eutocius ad Archim. lib. II, prop. 2.)

§ 53.

Kubikwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

Aus den folgenden Ausdrücken Nr. 1 bis 19 die Kubikwurzel zu ziehen:

1) α) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$; β) $27x^3 - 189x^2 + 441x - 343$.

2) $1728x^6 + 1728x^4y^3 + 576x^2y^6 + 64y^9$.

3) $\frac{8}{27}a^3 - 1\frac{1}{15}a^2b + 1\frac{7}{25}ab^2 - \frac{64}{125}b^3$. Aufl.: $\frac{2}{3}a - \frac{4}{5}b$.

4) $\frac{27a^6b^6}{125m^3} - \frac{24}{25}a^3b^2m + 1\frac{19}{45}\frac{m^5}{b^2} - \frac{512}{729}\frac{m^9}{a^3b^6}$.

5) $31{,}255875x^6y^{-12} - 81{,}860625y^{-6} + 71{,}465625x^{-6} - 20{,}796875x^{-12}y^6$. Aufl.: $3{,}15x^2y^{-4} - 2{,}75x^{-4}y^2$.

6) $0{,}000015625a^{-6}b^{-9} - 0{,}00075a^{-8}b^{-11} + 0{,}012a^{-10}b^{-13} - 0{,}064a^{-12}b^{-15}$.
Aufl.: $0{,}025a^{-2}b^{-3} - 0{,}4a^{-4}b^{-5}$.

7) $\frac{a^3b^6}{8c^9}x^6 - \frac{b}{2c^5}x^5 + \frac{2}{3a^3b^4c}x^4 - \frac{8c^3}{27a^6b^9}x^3$.

8) α) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 3x^2z - 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 - 3yz^2 + z^3$. Aufl.: $x - y + z$;
β) $8x^6 - 36x^5 + 114x^4 - 207x^3 + 285x^2 - 225x + 125$;
γ) $1 - 9y^2 + 39y^4 - 99y^6 + 156y^8 - 144y^{10} + 64y^{12}$.

9) $125x^6 - 525x^5y + 60x^4y^2 + 1547x^3y^3 - 108x^2y^4 - 1701xy^5 - 729y^6$. Aufl.: $5x^2 - 7xy - 9y^2$.

10) $$\frac{a^3b^3}{c^3}x^9 + \frac{3a^3b}{c}x^8 + 3\left(\frac{a^3c}{b} - \frac{ab^3}{c}\right)x^7 + \left(\frac{a^3c^3}{b^3} - 6abc\right)x_9 - 3\left(\frac{ac^3}{b} - \frac{b^3c}{a}\right)x^5 + 3\frac{bc^3}{a}x^4 - \frac{b^3c^3}{a^3}x^3.$$

11) α) $\frac{1}{125}x^3 - \frac{1}{50}x^2y + \frac{1}{60}xy^2 - \frac{1}{216}y^3 + \frac{3}{175}x^2z - \frac{1}{35}xyz + \frac{1}{84}y^2z + \frac{3}{245}xz^2 - \frac{1}{98}yz^2 + \frac{1}{343}z^3$. Aufl.: $\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{7}z$.
β) $64y^{12} - 576y^{10} + 2160y^8 - 4320y^6 + 4860y^4 - 2916y^2 + 729$.

12) $a^{-6m+12} - 6a^{-7m+3} + 12a^{-8m-6} - 8a^{-9m-15}$.

13) $x^{2\frac{1}{4}} - 3x^{2\frac{1}{6}} + 3x^{2\frac{1}{12}} - x^2$. Aufl.: $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{2}{3}}$.

14) $12\frac{19}{27}x^7 - 27\frac{2}{9}x^3 + 19\frac{4}{9}x^{-1} - 4\frac{17}{27}x^{-5}$.

15) $a + \sqrt[3]{27a^2b} + \sqrt[3]{27ab^2} + b$.

16) $-a\sqrt{-a}+3a\sqrt{-b}-3b\sqrt{-a}+b\sqrt{-b}$.

17) $m^3\sqrt{-x}-3m^2n\sqrt[3]{-x}\sqrt[6]{-y}+3mn^2\sqrt[6]{-x}\sqrt[3]{-y}-n^3\sqrt{-y}$.

18) $a^3-3a^2\sqrt{-2}-6a+2\sqrt{-2}$.

19) $m^3-3m^2n\sqrt{-1}-3mn^2+n^3\sqrt{-1}+3m^2p\sqrt{-1}+6mnp-3n^2p\sqrt{-1}-3mp^2+3np^2\sqrt{-1}-p^3\sqrt{-1}$.

20) Die unvollständige Kubikwurzel $\sqrt[3]{x^3\pm y}$ zu entwickeln.

Aufl.: $x\pm\frac{1}{3}\frac{y}{x^2}-\frac{1}{9}\frac{y^2}{x^5}\pm\frac{5}{81}\frac{y^3}{x^8}-\frac{10}{243}\frac{y^4}{x^{11}}\pm\frac{22}{729}\frac{y^5}{x^{14}}\ldots$

21) Ebenso: α) $\sqrt[3]{x^3+1}$; β) $\sqrt[3]{x^3-1}$; γ) $\sqrt[3]{1-y}$.

22) Nach Nr. 20 zu berechnen: α) $\sqrt[3]{27\frac{1}{5}}$; β) $\sqrt[3]{729\frac{2}{8}}$; γ) $\sqrt[3]{63{,}1}$; δ) $\sqrt[3]{342\frac{1}{8}}$. Aufl.: α) 3,007 389 19; β) 9,003 428 049 4; γ) 3,981 161 42; δ) 6,994 043.

23) $\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1}$ zu entwickeln. (4 Glieder.)

§ 54.

Ausziehen höherer Wurzeln aus gemeinen Zahlen und aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

1) Wieviel Ziffern kann die vierte, fünfte, sechste, $n$te Potenz einer ein-, zwei-, drei-, vier- und x-zifferigen Zahl enthalten?

2) Zwischen welchen Einern liegen die vierten Wurzeln aus 80, 82, 200, 1297, 600, 9998, 1295 und 6560?

3) Zwischen welchen Einern liegen die fünften Wurzeln aus 1023, 3000, 40 000, 32 100, 80 000 und 242?

4) Zwischen welchen Einern liegen die sechsten Wurzeln aus 46 656, 4097, 888 888, 111 111 und 555 555?

5) Zwischen welchen Einern liegen die siebenten Wurzeln aus 16 300, 2 097 152, 4 782 970 und 279 999?

6) Zwischen welchen Zehnern liegen die vierten Wurzeln aus 30 000, 7 650 000, 190 000, 33 333 333 und 78 787 878?

7) Zwischen welchen Zehnern liegen die fünften Wurzeln aus 24 500 000, 1 983 598 764, 100 000 000 und 6 807 309 876?

8) Zwischen welchen Hunderten liegen die fünften Wurzeln aus 2 410 000 000 000, 227 890 000 000 000, 10 008 756 439 761, 590 488 888 878 979 und 987 654 321 987 654?

9) Wieviel Ziffern hat die **vierte**, wieviel die **fünfte** Wurzel einer ein-, zwei-, drei- u. s. w. n-zifferigen Zahl?

10) Wieviel Ziffern hat die $x$te Wurzel einer n-zifferigen Zahl?

11) Wie wird eine Zahl, aus der die vierte, fünfte, sechste u. s. w. $x$te Wurzel gezogen werden soll, in Klassen abgeteilt?

12) Wie wird aus einer Zahl die vierte, fünfte, sechste u. s. w. $x$te Wurzel gezogen?

13) Aus α) 16807; β) 312500000; γ) 5904900000; δ) 418195493; ε) 4984209207; ζ) 95099,00499 die **fünfte** Wurzel zu ziehen. (Reste: 0.)

14) Ebenso aus: α) 5798839393557; β) 900897818976; γ) 44840334375; δ) 0,002817036000549; ε) 3057630600,02949.

Aufl.: α) 357; β) 246; γ) 135; δ) 0,309; ε) 78,9.

15) Ebenso aus:
α) 30344492771591158368; β) 285369179871447968; γ) 19372819598708049; δ) 4601498007398557.

Aufl.: α) 7878; β) 3098; γ) 1809; δ) 1357.

16) Ebenso aus: $4\frac{57298697}{90224199}$. Aufl.: $1\frac{14}{39}$.

17) Ebenso aus: α) 85796,4328759; β) 1,32.

Aufl.: α) 9,6982...; β) 1,05709....

18) Ebenso aus $\frac{2}{3}$ und aus $\frac{17}{19}$. Aufl.: 0,9221...; 0,978....

19) Aus α) 94931877133; β) 739056281869446093; γ) 234765253342390798917; δ) 4357186184021382204544 die **siebente** Wurzel zu ziehen.

Aufl.: α) 37; β) 357; γ) 813; δ) 1234.

20) Ebenso aus: α) 123456789; β) 99,9; γ) $\frac{4}{7}$.

Aufl.: α) 14,319....; β) 1,9304....; γ) 0,92316.....

21) $10^{0,1}$. Aufl.: $\sqrt{\sqrt[5]{10}} = \sqrt{1,5848932} = 1,2589254$.

22) $10^{0,01}$. Aufl.: 1,0232930. 23) $10^{0,001}$. A.: 1,0023052.

24) $10^{0,0001}$. Aufl.: 1,00023029.

25) $10^{0,00001}$. Aufl.: 1,00002303.

26) $10^{0,000001}$. Aufl.: 1,00000230.

27) α) $10^{0,357}$; β) $10^{0,30103}$; γ) $10^{0,143}$; δ) $10^{0,0028}$.

28) Was kann man für $\sqrt[5]{a^5+k}$, $\sqrt[6]{a^6+k}$ und $\sqrt[10]{a^{10}+k}$ näherungsweise setzen, wenn k im Vergleiche zu a sehr klein ist?

29) α) $10^{0{,}000\,004}$, β) $10^{0{,}000\,002}$ zu berechnen, wenn $10^{0{,}00002} = 1{,}000\,046\,05$.

30) $(81a^4 + 216a^3b + 216a^2b^2 + 96ab^3 + 16b^4)$ zur Potenz $\frac{1}{4}$.

31) Ebenso: $625x^4 + 9600x^2y^2 + 4096y^4 - 10\,240xy^3 - 4000x^3y$.

32) $(228\,886\,641\,m^8n^4 - 3\,394\,221\,408m^7n^5 + 18\,875\,182\,464m^6n^6 - 46\,650\,857\,472m^5n^7 + 43\,237\,380\,096m^4n^8)$ zur Potenz $\frac{1}{4}$.

33) Die fünfte Wurzel aus $16\,807\frac{a^{10}}{b^5} - 108\,045\frac{a^6}{b^3} + 277\,830\frac{a^2}{b} - 357\,210\frac{b}{a^2} + 229\,635\frac{b^3}{a^6} - 59\,049\frac{b^5}{a^{10}}$ zu ziehen.

34) Ebenso aus: $\frac{32}{243}m^{-5}n^{10} + \frac{20}{27}m^{-1}n^4 + 1\frac{2}{3}m^3n^{-2} + 1\frac{7}{8}m^7n^{-8} + 1\frac{7}{128}m^{11}n^{-14} + \frac{243}{1024}m^{15}n^{-20}$.

35) Aus $32a^3 - 240a^3\sqrt[5]{a} + 720a^3\sqrt[5]{a^2} - 1080a^3\sqrt[5]{a^3} - 810a^3\sqrt[5]{a^4} - 243a^4$ die fünfte Wurzel zu ziehen.

36) Vier Glieder der unvollständigen vierten Wurzel aus $x^4 + y$ zu berechnen. Aufl.: $x + \frac{1}{4}x^{-3}y - \frac{3}{32}x^{-7}y^2 + \frac{7}{128}x^{-11}y^3 \ldots$.

37) Ebenso: vier Glieder der unvollständigen fünften Wurzel aus $x^5 + u$. Aufl.: $x + \frac{1}{5}x^{-4}u - \frac{2}{25}x^{-9}u^2 + \frac{6}{125}x^{-14}u^3 \ldots$.

38) $\sqrt[4]{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$ zu entwickeln. (4 Glieder.)

39) Ebenso: $\sqrt[5]{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$. (3 Glieder.)

40) Zu berechnen: $\sqrt[5]{243{,}1}$. Aufl.: 3,000 24.

41) Ebenso: α) $\sqrt[5]{1023{,}68}$; β) $\sqrt[5]{16\,805{,}81}$.

§ 55.

Verwandlung der Summe zweier Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel, und umgekehrt.

I. $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$.

II. $\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n}}$.

In eine Wurzel zu verwandeln:

1) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ Aufl.: $\sqrt{10}$.

2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$. 3) $\sqrt{6+\sqrt{11}}+\sqrt{6-\sqrt{11}}$.

4) $\sqrt{37+\sqrt{280}}\pm\sqrt{37-\sqrt{280}}$. Aufl.: $2\sqrt{35}$ und $2\sqrt{2}$.

5) $\sqrt{3\sqrt{10}+9}\pm\sqrt{3\sqrt{10}-9}$. Aufl.: $\sqrt{6(\sqrt{10}\pm 1)}$.

6) $\sqrt{11+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. Aufl.: $2\sqrt{10}$ und 2.

7) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\pm\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$. Aufl.: $2\sqrt{a}$ u. $2\sqrt{b}$.

8) $\sqrt{8x^2+2x+8x\sqrt{x}}\pm\sqrt{8x^2+2x-8x\sqrt{x}}$.

9) $\sqrt{m+\sqrt{-n}}\pm\sqrt{m-\sqrt{-n}}$.
Was wird aus der Formel für $m=1$, $n=1$?

10) $\sqrt{7+\sqrt{-15}}\pm\sqrt{7-\sqrt{-15}}$. Aufl.: $\sqrt{30}$ und $\sqrt{-2}$.

11) $\sqrt{11+5\sqrt{-3}}\pm\sqrt{11-5\sqrt{-3}}$. Aufl.: $5\sqrt{2}$ und $\sqrt{-6}$.

12) $\sqrt{2\sqrt{-14}+13}\pm\sqrt{2\sqrt{-14}-13}$.

13) $\sqrt{a-b+2\sqrt{-ab}}\pm\sqrt{a-b-2\sqrt{-ab}}$.

14) $\sqrt{m+n+\sqrt{5m^2+10mn+5n^2}}$
$+\sqrt{m+n-\sqrt{5m^2+10mn+5n^2}}$.

Folgende Wurzeln in die Summe zweier Wurzeln umzuändern:

15) $\sqrt{31+\sqrt{600}}$. Aufl.: $\pm(5+\sqrt{6})$.

16) $\sqrt{\frac{9}{8}-\sqrt{\frac{9}{8}}}$. Aufl.: $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{6})$.

17) $\sqrt{11-3\sqrt{8}}$. Aufl.: $\pm(3-\sqrt{2})$.

18) $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}$. Aufl.: $\pm(\sqrt{51}-7)$.

19) $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$. 20) $\sqrt{9m+25n-30\sqrt{mn}}$.

21) α) $\sqrt{2p\pm 2\sqrt{p^2-q^2}}$; β) $\sqrt{2p^2+q^2+2p\sqrt{p^2+q^2}}$.

22) $\sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{24}}$. 23) $\sqrt{\sqrt{63}-\sqrt{35}}$. 24) $\sqrt{\sqrt{27}-2\sqrt{6}}$.

25) α) $\sqrt{\sqrt{1573}+4\sqrt{78}}$; β) $\sqrt{\sqrt{18}-4}$.

26) α) $\sqrt{m-\sqrt{-n}}$; β) $\sqrt{7+\sqrt{-15}}$

27) α) $\sqrt{4\sqrt{-6}-2}$; β) $\sqrt{12+5\sqrt{-1}}$; γ) $\sqrt{-3-\sqrt{-16}}$.

28) $\sqrt[4]{-1}$. Anleit.: $\sqrt{0+\sqrt{-1}}$ u. s. w. 29) $\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

30) $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}$. 31) $\sqrt{a^2+5ax-2a\sqrt{ax}+4x^2}$.

32) $\sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}}$. Aufl.: $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

33) $\sqrt{\sqrt[3]{4000}+\sqrt[6]{221\,184}+\sqrt[6]{1\,024\,000}+\sqrt[6]{3\,456\,000}}$.

Aufl.: $\sqrt{\sqrt[3]{4}(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}$

$= \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt[3]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

D. Logarithmen.

§ 56.

Begriff eines Logarithmus.

Ist $m^x = p$, so heißt der Exponent x in Bezug auf p und m: der „Logarithmus von p zur Basis m". Die Bezeichnung ist:

$$x = {}^m\log p,$$

was kurz „m-Logarithmus von p" ausgesprochen wird. m heißt die Basis, p der Numerus oder Logarithmand. ${}^{10}\log a$ wird durch $\log$ *vulg.* a oder schlechtweg durch $\log a$ ausgedrückt. Ist die Basis eine Zahl e, welche man aus der § 30, Nr. 27 angegebenen, aber ins Unendliche fortgehenden Reihe erhält, wenn in derselben $x = 1$ gesetzt wird, und welche $= 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ ist, so heißt der Logarithmus natürlicher. Wie in der höheren Analysis gezeigt wird, bietet sich diese Basis am natürlichsten zur Berechnung der Logarithmen dar. Statt ${}^e\log a$ schreibt man $\log$ *nat.* a oder kurz la.

$$\text{I. } b^{{}^b\log n} = n. \quad \text{II. } {}^b\log(b^x) = x. \quad \text{III. } {}^b\log b = 1.$$

(Vgl. §§ 8, 17 und 41.)

1) Was versteht man unter Logarithmus einer gegebenen Zahl zu einer gegebenen Basis?

2) Zu den Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 die Logarithmen zur Basis 2, oder die Zwei-Logarithmen zu suchen.

*) Erfinder der natürlichen Logarithmen ist John Neper (Mirifici logarithmorum canonis descriptio. 1614), Erfinder der künstlichen Logarithmen Henry Briggs (Logarithmorum Chilias prima. 1618).

3) Wie heißen die Logarithmen der Zahlen 9, 81, 729, 6561, 59049 *α*) zur Basis 3, *β*) zur Basis 9?

4) Wie heißen die Logarithmen von 4096 zur Basis *α*) 2, *β*) 4, *γ*) 8, *δ*) 16, *ε*) 64, *ζ*) 4096?

5) Zu berechnen: *α*) ${}^{123}log$ 228886641;
β) ${}^{111}log$ 207616015289871.

6) Ebenso: *α*) ${}^{5}log$ 15625; *β*) ${}^{25}log$ 15625; *γ*) ${}^{125}log$ 15625.

7) Ebenso: ${}^{10}log$ 10, ${}^{10}log$ 100, ${}^{10}log$ 1000, ${}^{10}log$ 10000.

8) Wie groß ist der Logarithmus einer Zahl, welche mit 1 und 17 Nullen geschrieben wird, wenn die Basis 10 ist?

9) *α*) Zu welcher Potenz muß die Basis *a* erhoben werden, damit 1 herauskommt? *β*) Wie groß ist ${}^{n}log$ 1, oder der *n*-Logarithmus von 1?

10) Wie groß ist *log* 1 für die Basis 1 oder 2, 3, 4, 5, 6?

11) Wie groß ist $log\,\frac{16}{81}$ zur Basis $\frac{2}{3}$? wie groß ist $log\,4\frac{52}{243}$ zur Basis $\frac{4}{3}$? wie groß *log* 0,0000157609 zur Basis 0,00397?

12) Wie groß ist *α*) $log\,\frac{1}{2}$, *β*) $log\,\frac{1}{4}$, *γ*) $log\,\frac{1}{8}$, *δ*) $log\,\frac{1}{16}$, *ε*) $log\,\frac{1}{32}$ zur Basis 2?

13) Wie groß sind *α*) $log\,\frac{9}{25}$, *β*) $log\,\frac{27}{125}$, *γ*) $log\,\frac{81}{625}$ zur Basis $\frac{3}{5}$?

14) Wie groß ist *log* 0,015625 zur Basis 4?

15) Wie groß ist *log* 243 zur Basis $\frac{1}{3}$?

16) Zu berechnen: ${}^{36}log$ 6, ${}^{512}log$ 8, ${}^{8}log$ 32, ${}^{8}log$ 4, ${}^{16}log$ 8.

17) Ebenso: *α*) $log\,\frac{1}{5}$ zur Basis 125; *β*) $log\,\frac{2}{3}$ zur Basis $3\frac{3}{8}$; *γ*) $log\,1\frac{7}{9}$ zur Basis $\frac{27}{64}$; *δ*) $log\,\frac{9}{16}$ zur Basis $4\frac{52}{243}$.

18) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 5, 10, 32, 82, 215, 713, 1295, 6562, wenn die Basis 6; zwischen welchen, wenn die Basis 9 ist?

19) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 6, 48, 342, 1700, 11906, 83348 zur Basis 5 oder 7?

20) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 18, 271, 563, 1827, 13749 zur Basis 10?

21) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt der Logarithmus einer 2-, 3-, 7-, 11- u. s. w. *n*-zifferigen Zahl, wenn die Basis 10 ist?

22) Zwischen welchen negativen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen von 0,02, 0,00197 und 0,00002876 zur Basis 10? Zwischen welchen, wenn den Ziffern der Decimalstellen *m* Nullen vorangehen?

23) Zwischen welchen negativen ganzen Zahlen liegt der Logarithmus von $\frac{13}{579}$ zur Basis 3?

24) Wie groß ist für die Basis — 6 der Logarithmus von 36?

25) Wie groß ist *log* (— 343) zur Basis — 7?

26) Welcher Zahl ist $2^{{}^{2}log\,512}$, welcher ${}^{3}log\,(3^7)$ gleich?

27) Welcher Zahl ist $log\,(a^x)$, welcher $log\,(a^x \cdot a^y)$, welcher $log\,(a^n : a^m)$ zur Basis a gleich?

28) Welcher Zahl ist $log\,(a^m)^n$ α) zur Basis a^n, β) zur Basis a^m und γ) zur Basis a^{mn} gleich?

29) α) $2^{{}^{10}log\,3} \cdot 5^{{}^{10}log\,3}$, β) ${}^{n}log\,(n^x \cdot n^y)$ zu berechnen.

30) Wenn log 7 zur Basis 2,718 28 gleich 1,945 91, und 2,718 28 gleich $10^{0,434\,29}$ ist, wie groß ist log 7 zur Basis 10?

31) Wie groß ist ${}^{n}log\,n$?

32) Läßt sich $log\,a$ bestimmen, wenn die Basis 1 ist?

33) α) ${}^{1}log$ 1, β) ${}^{a}log$ 1 zu bestimmen.

34) Was versteht man unter Logarithmen-System?

35) Wie wird ${}^{m}log\,b$ im Vergleich zu 0, je nachdem $m \gtrless 1$ und $b \gtrless 1$ ist?

36) Haben negative Zahlen einen Logarithmus, wenn die Basis positiv ist?

37) Wie groß ist α) log 64, β) log 512 zur Basis — 8?

38) Wenn die Basis eines Logarithmen-Systems negativ ist, haben alsdann alle Zahlen ihre zugehörigen Logarithmen?

39) Eignet sich eine negative Zahl als Basis eines Logarithmen-Systems?

40) Eignet sich 1 als Basis eines Logarithmen-Systems?

41) Welche Logarithmen werden gemeine oder Brigg'sche, welche natürliche oder hyperbolische genannt?

42) Welchen Vorzug haben die gemeinen Logarithmen?

43) Welche Logarithmen versteht man, wenn die Basis nicht genannt wird?

44) Wie groß ist log 10, log 100, log 1000, log 10 000?

45) Was versteht man unter Kennziffer und was unter Mantisse eines Logarithmus?

46) Wenn 2 der Logarithmus der Zahl 568 516 ist, wie groß ist die Basis?

47) Wenn 3 der Logarithmus der Zahl 1879 080 904 ist, wie groß ist die Basis?

48) Wie groß ist die Basis, wenn der Logarithmus der Zahl 20,085 52 gleich 3 ist?

49) α) Von welcher Zahl ist 2 der Logarithmus, wenn die Basis 16, von welcher, wenn die Basis 2,718 281 8 ist? β) Wie groß ist $num\ log$ 3, $num\ log$ 4, $num\ log$ 5, $num\ log$ 6 und $num\ log\ n$?

50) Von welcher Zahl ist 5 der Logarithmus, wenn die Basis $\frac{2}{5}$ ist?

51) Von welcher Zahl ist — 6 der Logarithmus, wenn die Basis $\frac{1}{7}$ ist?

52) Von welcher Zahl ist n der Logarithmus, wenn die Basis $\sqrt[n]{a}$ ist?

53) Welche gleiche Ausdrücke erhält man aus $\left(n^{{}^{n}log\, x}\right)^{{}^{n}log\, y}$, wenn man den obigen Satz I. sowohl als den Potenzsatz $(a^p)^q = (a^q)^p$ anwendet?

§ 57.

Logarithmische Sätze.

I. $log\,(a \cdot b) = log\,a + log\,b$,
II. $log\,(a : b) = log\,a - log\,b$,
III. $log\,(a^n) \quad = n\,log\,a$,
IIII. $log\sqrt[n]{a} \quad = \frac{1}{n}\,log\,a$,
} für jede beliebige Basis.

V. ${}^{n}log\,x \cdot {}^{x}log\,a = {}^{n}log.\,a$. VI. ${}^{x}log\,y \cdot {}^{y}log\,x = 1$.

1) ${}^{2}log\,64 = 6$, ${}^{2}log\,128 = 7$; wie groß ist ${}^{2}log\,(64 \cdot 128)$?

2) Wenn für die Basis 2,718 2818 $log\,3 = 1{,}098\,6123$ und $log\,7 = 1{,}945\,9101$, wie groß ist $log\,21$ für dieselbe Basis?

3) Wenn für die Basis 3,141 5926 der Logarithmus von 9 gleich 1,919 4258 und der Logarithmus von 11 gleich 2,094 7253, wie groß ist für dieselbe Basis $log\,99$?

4) $log\,2 = 0{,}301\,03$, $log\,3 = 0{,}477\,12$. Wie groß ist $log\,6$?

5) $log\,13 = 1{,}113\,94$, $log\,17 = 1{,}230\,45$. Wie groß ist $log\,221$?

6) Wenn $log\,7 = 0{,}845\,10$, $log\,9 = 0{,}954\,24$ und $log\,11 = 1{,}041\,39$, wie groß sind die Logarithmen von 63, 77, 99, 693?

7) Wie groß ist $log\,(2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11)$?

8) Von 20, 200, 2000, 20 000 die Logarithmen anzugeben.

9) Ebenso von: 13, 130, 1300, 13 000, 1 300 000, 13 000 000 000.

10) $log\,(a \cdot 10^n)$.

11) α) $log\,nat.\,(z\,e)$; β) $log\,nat.\,(z\,e^n)$.

12) $log\,(100\,abcd)$.

13) α) $log\,[(p+q)(r+s)]$; β) $log\,(m^2 - n^2)$.

14) $log\,(1409 : 654)$ anzugeben, wenn $log\,1409 = 3{,}148\,91$ und $log\,654 = 2{,}815\,58$ ist.

15) Zu berechnen: α) $log\,\frac{11}{3}$; β) $log\,\frac{17}{13}$; γ) $log\,1\frac{3}{5}$; δ) $log\,1\frac{2}{11}$.

16) $log\,5$ und $log\,25$. (Siehe Nr. 4.)

17) $log\,[(abc) : (de)]$. 18) $log\,[(a+b) : (c-d)]$.

19) α) $log\,\frac{1}{7}$; β) $log\,\frac{1}{11}$; γ) $log\,\frac{1}{a}$ auszuführen.

20) Wie groß ist der Logarithmus eines Quotienten, dessen Dividend 1 ist?

21) $log\ 0{,}1$, $log\ 0{,}01$, $log\ 0{,}001$, $log\ 0{,}0001$, $log\ 0{,}000\,000\,01$.

22) $log\ 0{,}7$, $log\ 0{,}07$, $log\ 0{,}007$, $log\ 0{,}0007$ u. $log\ 0{,}000\,0007$.

23) $log\ (a : 10^n)$. 24) $log\ \frac{11}{17}$. Aufl.: $\overline{1}{,}81094$.

25) Wie läßt sich der Logarithmus einer Zahl, wenn er negativ ist, so umändern, daß die Kennziffer allein negativ, die Mantisse dagegen positiv wird? Die Logarithmen in Nr. 22 sollen in andere, mit negativen Kennziffern und positiven Mantissen, umgeändert werden.

26) Was bedeutet das Zeichen Minus über der Kennziffer eines Logarithmus?

27) Von $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{130}$, $\frac{9}{1100}$, $\frac{11}{1300000}$, $\frac{13}{17 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}$ die Logarithmen so anzugeben, daß die Mantissen positiv und die Kennziffern negativ werden.

28) Zu berechnen: $log\ \frac{11}{3} + log\ \frac{3}{13}$. Aufl.: $\overline{1}{,}92745$.

29) $log\ \frac{7}{170} + log\ \frac{17}{90}$. Aufl.: $\overline{3}{,}89086$.

30) $log\ \frac{2}{17} + log\ \frac{11}{7} + log\ \frac{7}{1300} + log\ \frac{17000}{11 \cdot 13}$.

31) $log\ \frac{2}{13} + log\ \frac{9}{2000} + log\ \frac{11}{3000} + log\ \frac{17}{700}$.

32) $log\ \frac{7000}{17} - log\ \frac{13}{900}$. Aufl.: $4{,}45495$.

33) $log\ \frac{11}{2000} - log\ \frac{300}{11}$. Aufl.: $\overline{4}{,}30463$.

34) α) $log\ \frac{6}{7} - log\ \frac{2}{7}$; β) $log\ \frac{2}{3} - log\ \frac{3}{4}$.

35) $log\ \frac{1}{2} - log\ \frac{2}{3} - log\ \frac{3}{7} - log\ \frac{7}{9} - log\ \frac{9}{11} + log\ \frac{11}{4}$.
Aufl.: $0{,}87866$.

36) α) $log\ (7^5)$; β) $log\ (11^9)$; γ) $log\ (17^3)$.

37) Wie groß sind die Logarithmen von 9, 27, 81, 243, 729 und 2187, wenn $log\ 3 = 0{,}47712$ ist?

38) Wie groß ist α) $log\ [(a + b)^{x+y}]$; β) $log\ [a^x b^y]$?

39) Wie groß ist $log\ (3^{10})$ zur Basis 2,7182818? (S. Nr. 2.)

40) $log\ [(17^5 13^{14}) : (11^3 \cdot 9^2 \cdot 7)]$. Aufl.: $15{,}86966$.

41) α) $log\ 11^{-7}$; β) $log (\frac{13}{7})^{-3}$. Aufl.: α) $\overline{8}{,}71027$; β) $\overline{1}{,}19348$.

42) α) $log\ 13^{\frac{5}{11}}$; β) $log\ \left(17^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{4}{11}}\right)$.

43) α) $log\ \left(11^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{-\frac{3}{11}}\right)$; β) $log\ \left(9^{-\frac{3}{4}} \cdot 10^{-\frac{5}{9}}\right)$.
Aufl.: α) $\overline{1}{,}323197$; β) $\overline{1}{,}83988$.

44) $log\ \{1 : (13^{-5} \cdot 17^{-10})\}$. Aufl.: $17{,}87420$.

45) $log\ (\frac{3}{7})^5$. Aufl.: $\overline{2}{,}16010$.

46) $log \left(\frac{13}{9 \cdot 17}\right)^7$. Aufl.: $\overline{8}{,}50475$.

47) $log \left(\frac{9}{11 \cdot 13 \cdot 17}\right)^{17}$. Aufl.: $\overline{42}{,}66382$.

48) $log\left[\left(\frac{2}{7 \cdot 13}\right)^{11} : \frac{9^{13}}{7^{25}}\right]$. Aufl.: $\overline{10},48417$.

49) α) $log\,[(p + q)^x : (r + s)^{y-z}]$;
β) $log\,(1 : [(a - b)^{x-y} : (c - d)^{m-n}])$.

50) α) $log\,\frac{a^{-x+y}b^z}{c^{-n}d^{-m-n}}$; β) $log\,\frac{1}{m^{-x}n^{-y-z}}$;

γ) $log\,\frac{(a + b)^{m:n}(a \cdot b)^{m-n}}{(a - b)^{m \cdot n}(a : b)^{m+n}}$.

51) $log\,[(a^x b)^z \cdot m^{np} \cdot r]^n$.

52) α) $log\sqrt[10]{10}$; β) $log\sqrt[7]{7}$; γ) $log\sqrt[9]{9}$; δ) $log\sqrt[11]{2}$; ε) $log\sqrt[25]{100}$.

53) Wie groß ist $log\sqrt[10]{2{,}7182818}$ zur Basis 2,7182818?

54) Wie groß ist $log\sqrt[7]{\frac{9}{13}}$? Aufl.: $\overline{1},97719$.

55) α) $log\sqrt[9]{\frac{11}{17}}$; β) $log\sqrt[5]{\frac{13}{11000}}$; γ) $log\sqrt[-3]{\frac{3}{7000000}}$.

56) α) $log\,\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[y]{ab}}$; β) $log\sqrt{(c^2 - d^2)^{-3} \cdot (c - d)^{-\frac{2}{5}} : (c^3 : d^5)^{cd}}$.

57) α) $log\,\frac{\sqrt[x]{a + b} \cdot \sqrt[x]{ab}}{\sqrt[x+n]{a - b} \cdot \sqrt[xn]{a : b}}$; β) $log\sqrt[x]{\frac{(a + b - c)(a + c - b)}{(a + b + c)(b + c - a)}}$.

58) α) $log\sqrt[x]{a\sqrt[x]{b\sqrt[x]{c}}}$; β) $log\,2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

59) α) $log\,(log\,10^{xy})$; β) $log\,(log\sqrt[m]{10^n})$; γ) $log\,(log\,a^x)$.

60) $log\,log\,log\,[10^{(10^{mn})}]$.

61) Von welchem Ausdrucke ist $log\,x - log\,y - log\,z$ der Logarithmus?

62) α) $num\,log\,[7\,log\,a - 9\,log\,b]$;
β) $num\,log\,[\frac{2}{5}\,log\,a + 1]$.

63) $num\,log\left[\frac{m}{n}\,log\,(a + b) \pm \frac{n}{m}\,log\,(a - b)\right]$.

64) $num\,log\left[\frac{a}{b}\,log\,c - \left(\frac{a}{c}\,log\,b + \frac{b}{c}\,log\,a\right)\right]$.

65) $num\ log\ [(a+b)(a-b)[log\,(a+b)+log\,(a-b)]]$.

66) $num\ log\left[\frac{a+b}{a-b}[log\,(a+b)-log\,(a-b)]\right]$.

67) Es soll der Ausdruck angegeben werden, dessen Logarithmus $log\ a+\frac{1}{a}\left\{log\ a+\frac{1}{a}\left(log\,a+\frac{1}{a}\left[log\ a+\frac{1}{a}\,log\ a\right]\right)\right\}$ ist.

68) Von welcher Zahl ist der Logarithmus des Logarithmus gleich z?

69) Von welchem Ausdrucke ist der Logarithmus des Logarithmus gleich $n\ log\ n+log\,(log\ n)$?

70) a) Womit muß man die Drei-Logarithmen der aufeinander folgenden Zahlen multiplizieren, um α) die 9-Logarithmen, β) die 27-Logarithmen derselben Zahlen zu erhalten? b) Wenn $a^x=p$, $b^y=p$, $b=a^m$, in welcher Beziehung steht alsdann x zu y? wie läßt sich der b-Logarithmus von p aus dem a-Logarithmus von p, wie allgemein der b-Logarithmus irgend einer Zahl aus dem a-Logarithmus derselben Zahl ableiten?

71) Wem ist α) ${}^3log\ 100\cdot{}^{10}log\ 3$, β) ${}^xlog\ a\cdot{}^alog\ x$, γ) ${}^ylog\ m\cdot{}^olog\ n\cdot{}^nlog\ y$ gleich?

72) Womit muß man ${}^9log\ 7$ multiplizieren, um α) ${}^5log\ 7$, β) ${}^9log\ 4$ zu erhalten?

73) Womit muß man den natürlichen Logarithmus einer Zahl a zur Basis e α) multiplizieren, β) dividieren, um den Brigg'schen Logarithmus derselben Zahl zu erhalten? Antw.: α) mit $log\ e$ zur Basis 10; β) mit log 10 zur Basis e.

74) Die natürlichen Logarithmen der Zahlen 2, 3, 7, 10 sind: 0,69314718, 1,09861229, 1,94591015, 2,30258509; wie groß sind die Brigg'schen Logarithmen dieser Zahlen? Wie groß ist der Brigg'sche Logarithmus der Basis e?

§ 58.

Gebrauch der logarithmischen Tafeln*).

Die Logarithmen nachstehender Zahlen (von Nr. 1 bis 5 und von Nr. 8 bis 11) sollen angegeben werden:

1) α) 1; β) 3; γ) 23; δ) 513; ε) 699; ζ) 1837; η) 9870; ϑ) 9999.

*) Im folgenden sind fünfstellige Logarithmen, für Geübtere mehrfach auch siebenstellige Logarithmen in Anwendung gebracht. Die mathematische Sektion

2) α) 700000; β) 27000; γ) 437900000; δ) 88880000000.

3) α) 191900; β) 19190; γ) 1919; δ) 191,9; ε) 19,19; ζ) 1,919; η) 0,1919; ϑ) 0,01919; ι) 0,001919.

4) 10851; 10852; 10857; 21584; 21587; 21764; 43116.

5) α) 43450; β) 43451; γ) 43452; δ) 71538; ε) 87654; ζ) 314150000; η) 798990000000.

6) Wie groß sind die Unterschiede der Logarithmen je zweier aufeinander folgenden Zahlen von 83555 bis 83572?

7) Warum sind die Unterschiede der Logarithmen der aufeinander folgenden ganzen Zahlen, wenn dieselben sehr groß sind, fast konstant?

Antw.: Es seien $log\, n$, $log\,(n+1)$ und $log\,(n+2)$ die Logarithmen dreier aufeinander folgenden Zahlen; alsdann ist: $log\,(n+1) - log\, n = log\,\frac{n+1}{n}$ und $log\,(n+2) - log\,(n+1) = log\,\frac{n+2}{n+1}$. Vergleicht man die beiden Quotienten $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$ miteinander, so erhält man $\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$; der Unterschied zwischen den beiden Quotienten $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$ wird also sehr klein, wenn n eine große Zahl ist, so daß man innerhalb gewisser Grenzen $\frac{n+1}{n} = \frac{n+2}{n+1}$ und also auch $log\,(n+1) - log\, n = log\,(n+2) - log\,(n+1)$ setzen kann.

8) 434340; 434341; 434342; 434343; 434344; 434347; 434349. Aufl.: 5,6378298; 5,6378308; 5,6378318 u. s. w.

9) 123456; 208518; 26,8337; 0,341032; 0,000400006.

10) 458156; 49,4399; 5,66247; 68559,3.

11) α) 1365147; β) 713035; γ) 807357; δ) 3,14159; ε) 2,7182818; ζ) 1,1111987; Aufl.: α) 6,13518; β) 6,85311; γ) 6,90706; δ) 0,49715; ε) 0,4342945; ζ) 0,0457917.

12) α) $log\,(log\, 123456)$; β) $log\,[log\,(log\, 24680000000)]$; γ) $log\,[5 + log\,(5 + log\,[5 + log\, 5{,}760457])]$ zu berechnen.

---

der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner hat sich bei ihrer 23. Versammlung im Jahre 1864 in Hannover fast einstimmig für den Gebrauch fünfstelliger Logarithmen, statt siebenstelliger, ausgesprochen. In Österreich ist nach der Ministerial-Verordnung vom 25. Juni 1865 (Z. 2065. c. u.) § 10 in Preußen seit 1880 in den Schulen der Gebrauch fünfstelliger Logarithmentafeln vorgeschrieben.

Zu folgenden Logarithmen die zugehörigen Zahlen aufzusuchen.

13) α) 0,903 09; β) 2,397 94; γ) 0,724 03; δ) 3,908 19; ε) 3,548 5; ζ) 6,894 869 7; η) 2,133 187 5; ϑ) 0,990 019; ι) 6,477 106 8.

14) α) 0,389 91 — 2 (oder $\bar{2}$,389 91); β) 0,090 28 — 1; γ) 9,845 098 0; δ) — 0,301 03.

15) 4,132 86; 0,890 85; 0,919 004 8 — 2; 3,937 001 0.

16) α) — 2,522 88; β) 3,815 79; γ) 0,626 009 6 — 1.

17) 6,963 41; 5,090 34; 3,054 44; 7,602 059 8; 1,234.

18) $\bar{1}$,234 56; 0,020 20 — 2; $\bar{4}$,321 43; — 5,879 436 2.

Zu berechnen:

19) $\log(2{,}3578 \times 4{,}321 \times 87\,654 \times 1{,}119\,79)$. Aufl.: 6.

20) $\log(0{,}007\,532 \cdot 2798{,}54 \cdot 0{,}000\,026\,598)$.

21) $\log(88\,576 \times 29\,735 : 42\,764)$.

22) α) $\log \frac{13}{7}$; β) $\log 19\frac{4}{11}$; γ) $\log 1\frac{98}{253}$; δ) $\log 3\frac{883}{1487}$.

23) $\log[58\,749 : 0{,}000\,792\,54]$.

24) $\log[0{,}007\,396\,4 : 0{,}000\,058\,46]$. Aufl.: 2,102 16.

25) $\log[0{,}000\,089\,346 : 0{,}007\,935\,6]$.

26) $\log[0{,}009\,753 : 8642]$. 27) $\log.[21{,}739\,5 : 0{,}004\,723]$.

28) $\log[2{,}758\,76 \times 9{,}987\,5 : 0{,}000\,987\,65]$.
Aufl.: 4,445 57.

29) $\log[0{,}075\,432 \times 0{,}000\,921\,37 : (0{,}007\,534 \times 0{,}265\,83)]$.

30) α) $\log 7^{11}$; β) $\log 2^{64}$; γ) $\log\left(\frac{1}{1719}\right)^{36}$; δ) $\log\left(\frac{217}{58764}\right)^{17}$.

31) α) $\log\sqrt{7}$; β) $\log\sqrt[3]{19}$; γ) $\log\sqrt[10]{10}$; δ) $\log\sqrt[9]{0{,}003\,719}$.
Aufl.: δ) $\bar{1}$,730 05.

32) α) $\log\sqrt[11]{\frac{12}{3798}}$; β) $\log\sqrt[43]{0{,}000\,864}$; γ) $\log(3{,}715\,6^{-\frac{2}{3}})$.

§ 59a.

A. Berechnung gegebener Zahlen-Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmen.

1) $\frac{49\,876 \times 0{,}037\,542 \times 68{,}707\,5}{7{,}816\,49 \times 578{,}93 \times 28{,}429\,9}$. Aufl.: 1.

2) 8,759 2 : 0,057 643 8. Aufl.: 151,954.

3) 0,000 798 543 : 0,000 000 965 438. Aufl.: 827,14.

4) $1{,}357\,245^{10}$. A.: 21,21. 5) $1{,}266\,77^{25}$. A.: 369,4.

6) α) $0{,}877\,058^{9}$; β) $8095{,}37^{-3}$; γ) $0{,}085\,463^{-7}$
Aufl.: α) 0,307 09; β) 0, 000 000 000 001 884 9; γ) 30 031 000.

7) α) $4\pi r^2$; β) $\frac{4}{3}\pi r^3$ für $\pi = 3{,}141\,59$ und $r = 2{,}066\,68$.
Aufl.: α) 53,673; β) 36,974.

8) $\frac{1}{3}\pi h r^2$ für $h = 18{,}7965$ und $r = 0{,}079\,137$.
Aufl.: 0,123 27.

9) $\frac{4}{3}a^2 b\pi$ für $a = 19{,}63$, $b = 19{,}565\,78$. A.: 31 582.

10) $214\,204^{\frac{7}{11}}$. A.: 2468. 11) $39{,}679^{3\frac{3}{4}}$. A.: 987 640.

12) α) $0{,}234^7$; β) $0{,}997\,5^{24}$.

13) $(3390 \cdot 4{,}340\,1 : 13\,814{,}4)^{11}$. Aufl.: 2,000 18.

14) $0{,}098\,756^{\frac{3}{7}}$. Aufl.: 0,370 766.

15) $\left(\frac{37}{2939}\right)^{1\frac{2}{3}}$. Aufl.: 0,000 681 29.

16) $\left(\frac{1402}{3999}\right)^{-3\frac{4}{5}}$. Aufl.: 53,674.

17) $2{,}718\,28^{4{,}605\,17}$. Aufl.: 99,995.

18) $(12{,}34^{5{,}67} \cdot 8{,}9^{-2{,}345}) : (67{,}89^{1{,}23} \cdot 45{,}67^{-8{,}9})$.
Aufl.: 30 133 000 000 000 000.

19) α) $(-3{,}587\,9)^7$; β) $(-0{,}083\,514)^{11}$. Antw.: α) $-7653{,}84$.

20) α) $\left(-\frac{1}{18{,}926\,5}\right)^6$; β) $(-0{,}396\,548)^{-7}$.

21) $\left(-\frac{1}{0{,}548\,64}\right)^{-11}$. Aufl.: $-0{,}001\,355\,8$.

22) α) $\sqrt{2}$; β) $\sqrt{0{,}5}$; γ) $\sqrt[3]{7}$; δ) $\sqrt[7]{9{,}387\,65}$.

23) α) $\sqrt[6]{117\,649\,000\,000}$; β) $\sqrt[11]{3{,}1866}$. A.: α) 70; β) 1,111 1.

24) $\sqrt[22]{102\frac{124}{125}}$. A.: 1,2345. 25) $\sqrt[7]{0{,}066\,472}$. A.: 0,678 9.

26) Das vierte Glied der folgenden Proportion zu berechnen: $2{,}7195 : 0{,}487\,36 = 87{,}932 : x$. Aufl.: $x = 15{,}758\,2$.

27) Die mittlere Proportionale zu den beiden Zahlen 3,857 3 und 0,489 26 zu berechnen. Aufl.: 1,373 75.

28) $11{,}11^{2{,}2} \cdot 3{,}33^{-4{,}4} : \sqrt[55]{6666}$. Aufl.: 0,855 66.

29) $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ für $a = 5{,}686\,1$, $b = 4{,}924\,3$, $c = 2{,}843\,0$ zu berechnen. Aufl.: 7.

30) $$\frac{a^2 b^2 c^2}{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}}$$
für $a = 4{,}26$, $b = 3{,}58$, $c = 2{,}13$ zu berechnen. Aufl.: 10,2174.

31) α) $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$; β) $\sqrt{\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{ab}}$
für $a = 51{,}693$, $b = 61{,}693$, $c = 68{,}686\,8$ zu berechnen.
Aufl.: α) 1,5975; β) 1,203 33.

32) $\sqrt[9]{\frac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$. A.: 1,24203. 33) $7^7 : \sqrt[7]{7\sqrt[7]{7}}$. A.: 599243.

34) $\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2} : \sqrt{10}}$. Aufl.: 0,96186.

35) $\sqrt[17]{17^{1,226875}}$. Aufl.: 1,226875.

36) $(\sqrt[3]{3})^{2,47806}$. Aufl.: 2,47806.

37) $\sqrt[13]{2,459^{6,5} + 8,74^{2,3}}$. Aufl.: 1,61117.

38) $\sqrt[10]{2,1663 - \sqrt[11]{4920,1}}$. Aufl.: 0,46.

39) $\sqrt{1,75488 + \sqrt{1,75488 + \sqrt{1,75488 + \sqrt{1,75488}}}}$.
Aufl.: 1,90481.

40) $\sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{m}}$ für $m = 10 + \sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{n}}$ und $n = 10 + \sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{10}}$ zu berechnen. Antw.: 1,27414.

41) Die Erhebung eines Ortes über einen anderen in Metern wird, wenn die an ersterem Orte beobachtete Barometerhöhe mit b und die an letzterem Orte gleichzeitig beobachtete mit B bezeichnet wird, durch die Formel: $[\log B - \log b]\ 18377\ m$ angegeben*). Zu Köln, auf dem Drachenfels und auf dem Ölberge (beide letztere im Siebengebirge) wurden einst gleichzeitige Barometer-Beobachtungen angestellt, und zwar stand das Barometer in Köln auf 765,18 *mm*, auf dem Drachenfels auf 741,50 *mm* und auf dem Ölberge auf 728,86 *mm*. Wenn nun die Höhe des Beobachtungsortes zu Köln 44,0 *m* über der Nordsee liegt, wie läßt sich hieraus die Höhe des Drachenfelsen und des Ölberges über der Nordsee berechnen?

Aufl.: Die Höhe des Drachenfelsen beträgt 294,89 *m* und die des Ölberges 432,11 *m* über der Nordsee.

---

*) Bei genauen Höhenbestimmungen müssen noch mehrere Umstände, namentlich die Temperatur und die Feuchtigkeit der Luft, berücksichtigt werden.

42) Nach Hutton verhalten sich die Tiefen des Eindringens der Kanonenkugeln in dieselbe Materie, wie die Logarithmen der Ladungen. Wenn nun ein 24pfündiges Geschoß bei einer Ladung von 5 *kg* Pulver auf 400 Schritte in festen Boden 2,77 *m* eindringt, wie tief dringt die Kugel bei derselben Entfernung in denselben Boden ein, wenn die Ladung nur 4 *kg* beträgt?
Aufl.: 2,386 *m*.

43) Laplace giebt zur Berechnung der Spannung des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen folgende Formel: $log\, e = log\, 0{,}76 + 0{,}0154547\,(t - 100) - 0{,}0000625826\,(t - 100)^2$, wo e den Quecksilberdruck des Dampfes in Metern und t die Temperatur in hundertteiligen Graden bedeutet. Wie groß ist hiernach die Spannung des Dampfes bei 110, 120, 130, 140 Grad?
Aufl.: 1,0693, 1,4618, 1,9415, 2,5054 *m*.

44) Nach Egen erhält man die Spannung der Wasserdämpfe in Atmosphären nach der Formel $t = 100 + 64{,}29512\, log\, e + 13{,}89479\, (log\, e)^2 + 2{,}909769\, (log\, e)^3 + 0{,}1742634\, (log\, e)^4$, wobei t hundertteilige Grade und e die Spannung des Wasserdampfes in Atmosphären bedeutet. Bei wieviel Grad ist nach dieser Formel die Spannung gleich α) $1\frac{1}{2}$, β) 2, γ) 3 Atmosphären?

B. Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen der Zahlen nach den Gaussischen Tabellen*).

$$\text{I. } log\,(a + b) = log\, a + log\,\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

$$\text{II. } log\,(a - b) = log\, a - log\, \frac{1}{1 - \frac{b}{a}}.$$

Bemerkung: Die Tabellen enthalten zu dem Argumente $log\, \frac{a}{b}$, wo $a > b$, die Werte von $log\,\left(1 + \frac{b}{a}\right) = B$ und $log\, \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = C$.

$log\,(a + b)$ zu berechnen:

45) α) $log\, a = 3{,}27654$, $log\, b = 3{,}13854$.
Aufl.: $log\, a - log\, b = A = 0{,}13800$; $B = 0{,}23749$; $log\,(a + b) = log\, a + B = 3{,}51403$.
β) $log\, a = 4{,}63369$, $log\, b = 2{,}75869$. Aufl.: 4,63944.

*) Diese Tabellen finden sich in den neueren von Hülsse besorgten Auflagen der Vega'schen Logarithmen-Tabellen, sowie auch in den Tafeln der fünfstelligen Logarithmen von Wittstein und der vierstelligen von Müller u. a. Über die Theorie sehe man Heis, ebene und sphärische Trigonometrie, II. Kap. 30—32.

46) *log a* = 4,103 73, *log b* = 3,478 73. Aufl.: 4,196 15.
47) *log a* = 0,732 76, *log b* = 0,723 76. Aufl.: 1,029 31.
48) *log a* = 3,785 64, *log b* = 2,785 64. Aufl.: 3,827 03.
49) *log a* = 4,842 37, *log b* = 4,659 27. Aufl.: 5,061 43.
50) *log a* = 5,032 27, *log b* = 4,628 77. Aufl.: 5,176 82.
51) *log a* = 1,641 32, *log b* = 1,561 45. Aufl.: 1,904 25.
52) *log a* = 3,264 51, *log b* = 2,798 74. Aufl.: 3,392 31.
53) *log a* = $\bar{1}$,317 69, *log b* = $\bar{1}$,173 25. Aufl.: $\bar{1}$,552 48.
54) *log a* = $\bar{1}$,201 99, *log b* = $\bar{2}$,983 23. Aufl.: $\bar{1}$,407 27.
55) *log a* = 0,436 88, *log b* = 0,166 93. Aufl.: 0,623 58.
56) *log a* = 4,265 26, *log b* = 3,785 67. Aufl.: 4,389 58.
57) *log a* = 1,389 40, *log b* = 0,735 64. Aufl.: 1,476 45.
58) *log a* = 1,930 91, *log b* = 1,421 39. Aufl.: 2,047 98.
59) *log a* = 1,984 25, *log b* = 1,688 08. Aufl.: 2,161 96.
60) *log a* = 4,551 38, *log b* = 3,897 64. Aufl.: 4,638 44.
61) *log a* = 1,865 02, *log b* = 0,819 47. Aufl.: 1,902 46.
62) *log a* = 1,984 46, *log b* = 0,776 93. Aufl.: 2,010 59.

log (*a* — *b*) zu berechnen:

63) *log a* = 3,064 75, *log b* = 2,785 64; *log a* — *log b* = 0,279 11 = *B*; *C* = 0,324 11; *log* (*a*—*b*) = *log a*—*C* = 2,740 64.
64) *log a* = 4,975 45, *log b* = 4,875 69. Aufl.: 4,287 69.
65) *log a* = 0,649 68, *log b* = 0,594 72. Aufl.: $\bar{1}$,724 72.
66) *log a* = 3,440 04, *log b* = 2,758 63.
Aufl.: *log a* — *log b* = 0,681 41 = *C*; *B* = 0,101 41; *log* (*a* — *b*) = *log a* — *B* = 3,338 63.
67) *log a* = 3,641 39, *log b* = 2,755 83. Aufl.: 3,580 83.
68) *log a* = 2,158 96, *log b* = 0,627 98. Aufl.: 2,145 98.
69) *log a* = 3,944 84, *log b* = 3,724 65. Aufl.: 3,544 40.
70) *log a* = 2,132 71, *log b* = 1,873 75. Aufl.: 1,785 08.
71) *log a* = 0,212 51, *log b* = 0,087 65. Aufl.: $\bar{1}$,610 21.
72) *log a* = 1,427 69, *log b* = 0,873 21. Aufl.: 1,285 65.
73) *log a* = 1,195 54, *log b* = 0,087 63. Aufl.: 1,160 27.
74) *log a* = 1,895 05, *log b* = 1,873 54. Aufl.: 0,579 14.

Zu berechnen:

75) *log* (*a* + *b* — *c*), wenn *log a* = 1,855 05, *log b* = 1,552 10, *log c* = 1,790 03. Aufl.: 2,227 73.

76) $\log(ab+ac+bc)$, wenn $\log a = 0{,}756\,43$, $\log b = 0{,}872\,54$, $\log c = 0{,}498\,32$. Aufl.: 1,924 40.

77) $\log \sqrt{a^2+b^2}$, wenn $\log a = 0{,}782\,41$, $\log b = 0{,}635\,75$. Aufl.: 0,871 74.

78) $\log \sqrt{a^2-b^2}$, wenn $\log a = 2{,}876\,55$, $\log b = 2{,}792\,87$. Aufl.: 2,628 98.

79) $\log (a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{4}{3}})$, wenn $\log a = 1{,}286\,43$, $\log b = 0{,}857\,94$. Aufl.: 1,817 46.

80) $\log \frac{1}{3}h(a+b+\sqrt{ab})$, wenn $\log h = 0{,}874\,32$, $\log a = 0{,}476\,55$, $\log b = 0{,}369\,54$. Aufl.: 1,299 56.

81) $\log \frac{1}{3}h\pi(r^2+\varrho^2+r\varrho)$, wenn $\log h = 0{,}874\,56$, $\log \pi = 0{,}497\,15$, $\log r = 1{,}758\,46$, $\log \varrho = 1{,}487\,63$. Aufl.: 4,672 37.

82) $\log \sqrt{1-s^2}$, wenn $\log s = \overline{1}{,}758\,23$. Aufl.: $\overline{1}{,}913\,54$.

83) $\log \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, wenn $\log t = \overline{1}{,}574\,66$. Aufl.: $\overline{1}{,}546\,01$.

84) $\log \sqrt{a^2+b^2-2abc}$, wenn $\log a = 3{,}278\,59$, $\log b = 2{,}986\,54$, $\log c = \overline{1}{,}387\,65$. Aufl.: 3,281 03.

85) $\log (x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2})$, wenn $\log x = \overline{1}{,}773\,19$, $\log y = \overline{1}{,}577\,00$. Aufl.: $\overline{1}{,}931\,08$ und $\overline{1}{,}389\,70$.

86) $\log 2x\sqrt{1-x^2}$, wenn $\log x = \overline{1}{,}445\,59$. Aufl.: $\overline{1}{,}729\,02$.

87) $\log (\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b})$, wenn $\log a = 0{,}960\,26$, $\log b = 0{,}988\,64$. Aufl.: 0,091 50.

88) Es soll zu den beiden Zahlen 3 und 5 sowohl das arithmetische, wie das geometrische Mittel gesucht werden; aus den beiden gefundenen Zahlen bestimme man ebenfalls das arithmetische und geometrische Mittel u. s. w. fort, bis beide Mittel zusammenfallen*). (Arithmetisch-geometrisches Mittel.) A.: 3,936 2.

89) Ebenso verfahre man mit den Zahlen 23 und 7. Aufl.: 13,820.

90) Ebenso mit 1357 und mit 2468. Aufl.: 1871,04.

91) Ebenso mit 474,405 9 und 1,099 5. Aufl.: 100.

92) Wenn $\log [\tan \alpha^2] = 0{,}678\,35$, wie groß ist $\log [\sec \alpha^2]$, und $\log [\operatorname{cosec} \alpha^2]$? Aufl.: Ist $\log [\tan \alpha^2] = A$, so ist $\log [\sec \alpha^2] = B = 0{,}761\,04$, $\log [\operatorname{cosec} \alpha^2] = C = 0{,}082\,69$.

*) Gauss, Determinatio attractionis etc. Göttingen 1820.

§ 59b.

Wiederholungs-Beispiele.

1) α) $\dfrac{adfk + adgh + bcgh + bcfk}{bdgk}$ soll in ein Produkt aus der Summe zweier Quotienten, multipliziert mit der Summe zweier anderen Quotienten, verwandelt werden.

β) $\left(1 + \dfrac{b}{2a+b}\right) : \left(1 - \dfrac{b}{2a+b}\right)$ soll in einen einfachen Quotienten verwandelt werden.

γ) Es soll gezeigt werden, daß das Verhältnis $(a - x) : (x - b)$ dem Verhältnisse $a : b$ gleich ist, wenn $x = (2ab) : (a + b)$ ist.

δ) $[1 \mp x + (1 - 2a)x^2 \pm a(1 - a + a^2)x^3] : [1 \pm ax]$.

ε) $(1 - a)(1 + a)^2 + (1 - 2a - 3a^2)x - (1 + 3a)x^2 - x^3$ durch $1 - (a + x)$ zu dividieren.

ζ) $\dfrac{bc}{(a+b)(a+b+c)} + \dfrac{ac}{(a+b)(a+b+c)} + \dfrac{bc}{(a+c)(a+b+c)}$
$+ \dfrac{ab}{(a+c)(a+b+c)} + \dfrac{ac}{(b+c)(a+b+c)} + \dfrac{ab}{(b+c)(a+b+c)}$
zu vereinigen.

η) $x^5 \pm ax^4 + bx^3 \pm bx^2 + ax \pm 1$ soll durch $x \pm 1$ dividiert werden. Wie läßt sich im voraus erkennen, daß die Division ohne Rest aufgeht?

ϑ) Wenn $x = \frac{1}{2}(\sqrt{b + 2a} + \sqrt{b - 2a})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{b + 2a} - \sqrt{b - 2a})$ ist, wie groß ist alsdann a) xy, wie groß b) $x^2 + y^2$?

ι) Es soll sowohl xy als auch $x^2 + y^2 + xy$ berechnet werden, für $x = \frac{1}{2}[\sqrt{b + a} + \sqrt{b - 3a}]$, $y = \frac{1}{2}[\sqrt{b + a} - \sqrt{b - 3a}]$.

$\varkappa$) $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)(1 - 2x + x^2)$.

λ) $(8x^9 - 9x^8 + 1) : (x^2 - 2x + 1)$.

μ) $mx^{m+1} - (m + 1)x^m + 1$ läßt sich, wenn m eine positive ganze Zahl ist, durch $x^2 - 2x + 1$ ohne Rest teilen. Wie heißt der Quotient?

ν) Ebenso: $[a - (a - d)x - (a + [m + 1]d)x^{m+1}$
$+ (a + md)x^{m+2}] : [1 - 2x + x^2]$.

2) α) $\left(y - \dfrac{m - yx}{y - x}\right)\left(x + \dfrac{m - yx}{y - x}\right) + \left(\dfrac{m - yx}{y - x}\right)^2 = m$. Warum?

β) Wenn A, B, C und D vier aufeinander folgende Punkte auf einer geraden Linie AD sind und $AB = m$, $BC = n$, $CD = p$ gesetzt wird, so soll algebraisch bewiesen werden, daß:

$$AB \cdot CD - AC \cdot BD + BC \cdot AD = 0.$$

3) α) $\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2 = 1$. Warum?

β) $\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5}$ soll in den Quotienten zweier Binome verwandelt werden.

γ) Zu beweisen, daß $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2[(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b)]$.

4) Warum ist $\frac{a^{m+x} + a^m b^y - a^x b^m - b^{m+y}}{a^x b^m + a^{m+x} + b^{m+y} + a^m b^y} = \frac{a^m - b^m}{a^m + b^m}$?

5) Wenn $\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc} = A$, $\frac{e^2+f^2-d^2}{2ef} = B$, $\frac{c^2+e^2-a^2}{2ce} = C$, $\frac{d^2 + e^2 - f^2}{2de} = D$, $\frac{c^2 + d^2 - b^2}{2cd} = E$ ist, zu zeigen, daß:

$$1 - [AB + \frac{d^2}{bf}(C - DE)]^2 =$$
$$\frac{(ad + be + cf)(ad + be - cf)(ad - be + cf)(be + cf - ad)}{4b^2c^2e^2f^2}.$$

6) Auszuführen: α) $(a^x + b^y + \sqrt[x]{a})(a^y + a^{-x} + \sqrt[x]{b^{-1}})$;

β) $(x^2 - xy\sqrt{2} + y^2)(x^2 + xy\sqrt{2} + y^2)$;

γ) $\sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{2b\sqrt{ac}})(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} - \sqrt{2b\sqrt{ac}})}$.

7) Ebenso: $[a^{xxxx} \cdot a^{xxx} \cdot a^{xx} \cdot a^x \cdot a]^{x-1}$.

8) $[a^{4x} + a^{3x-y} + a^{2x-2y} + a^{x-3y} + a^{-4y}][a^x - a^{-y}]$.

9) $[a^{2x} + (ab)^x + b^{2x}][a^x - b^x]$.

10) $[a^{3x} - (a^2b)^x + (ab^2)^x - b^{3x}][a^x + b^x]$.

11) $[a^{7x} - a^{-7y}] : [a^x - a^{-y}]$.

12) α) $[64a^{6x} - 729b^{-6x}] : [2a^x - 3b^{-x}]$;

β) $(x^4 + 4y^4) : (x^2 - 2xy + 2y^2)$.

13) α) $(a + \sqrt{ac} + c)(\sqrt{a} - \sqrt{c})$; β) $\sqrt[3]{a^2 - 2ab + b^2}\sqrt[3]{a - b}$.

Die Produkte α) und β) auszuführen.

14) α) $\left(x - \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$; β) $(2 - \sqrt{x})^2(1 + \sqrt{x})$;

γ) $(x + y + 2\sqrt{xy})^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{\frac{1}{3}}$.

15) $[x + \sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) + y][\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}]$.

16) Den Ausdruck $a - b$ α) in zwei, β) in drei ungleiche Faktoren zu zerlegen.

17) $[x^2 + xy + y^2 + (x + y)\sqrt{xy}]\,[\sqrt{x} - \sqrt{y}]$.

18) $[9z^2 + 36uz + 144u^2 - (18z + 72u)\sqrt{uz}]\,[\sqrt{3z} + \sqrt{12u}]$.

19) $[x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + y\sqrt{y}]\,[\sqrt{x} - \sqrt{y}]$.

20) $[x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2y^2} + y\sqrt[3]{y}]\,[\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}]$.

21) $[x\sqrt{y} - \sqrt{xy}\sqrt[4]{xy} + y\sqrt{x}]\,[\sqrt{x}\sqrt[4]{y} + \sqrt{y}\sqrt[4]{x}]$.

22) $[p\sqrt{q} + \sqrt{pq}\sqrt[4]{pq} + q\sqrt{q}]\,[\sqrt[4]{q^{-1}} - \sqrt[4]{p^{-1}}]$.

23) $[x^2 + x\sqrt{xy} + xy + y\sqrt{xy} + y^2]\,[\sqrt{x} - \sqrt{y}]$.

24) $[x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}]\,[\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}]$.

25) $[y - y^2] : [\sqrt[3]{y^2} + y + y\sqrt[3]{y}]$. 26) $[x + 1] : [\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^2}]$.

27) $[\sqrt{\tfrac{1}{2}(x + y)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(x - y)}]\,[\sqrt{\tfrac{1}{2}(x + y)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(x - y)}]$.

28) $[\sqrt{y} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(y - z)}]\,[\sqrt{x} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(y - z)}]$.

29) $\tfrac{1}{2}\sqrt{(a \pm 1)(b + 1)(c + 1)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - 1)(b \mp 1)(c \mp 1)}$ soll zum Quadrat erhoben werden.

30) In folgenden Quotienten die Wurzeln aus den Divisoren fortzuschaffen: $\alpha)\ \dfrac{a}{x - \sqrt[3]{y}}$; $\beta)\ \dfrac{c}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$; $\gamma)\ \dfrac{d}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}}$; $\delta)\ \dfrac{e}{x - \sqrt[4]{y}}$;

$\varepsilon)\ \dfrac{a}{\sqrt[2n]{x} \pm \sqrt[2n]{y}}$; $\zeta)\ \dfrac{a}{\sqrt[2n+1]{x} \pm \sqrt[2n+1]{y}}$; $\eta)\ \dfrac{\sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1}$;

$\vartheta)\ \dfrac{42 - 2\sqrt{2} - 40\sqrt{6} + 29\sqrt{10} + 6\sqrt{15} - 10\sqrt{30}}{7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + \sqrt{30}}$ *).

31) Zwei oder mehrere Ausdrücke von der Form $a + b\sqrt{-1}$ geben, miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert, einen Ausdruck von derselben Form $a' + b'\sqrt{-1}$. Warum?

32) $\alpha)$ $x + y\sqrt{-1}$ soll zur 2., 3., 4., 5. Potenz erhoben und das Resultat auf die Form $x' + y'\sqrt{-1}$ gebracht werden; $\beta)$ $-\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$ soll zur 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8. und 9. Potenz erhoben werden.

33) Aus $a^3 \pm a^2\sqrt{3b} + ab \pm \sqrt{\tfrac{1}{27}b^3}$ die 3. Wurzel zu ziehen.

34) $\alpha)$ $[a^2 + ab\sqrt{-1} - b^2]\,[a - b\sqrt{-1}]$;

---

*) Man multipliziere zuerst im Dividenden und Divisor mit $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) + (3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{6})\sqrt{5}$. S. Grebe „Über das Rationalmachen von Nennern mit unbestimmt vielen irrationalen Gliedern" in Grunerts Archiv XIII. S. 68.

β) $[a^3 + a^2\sqrt{-1} - a - \sqrt{-1}]\,[a - \sqrt{-1}]$;

γ) es soll gezeigt werden, daß:

$(a + b\sqrt{-1})\,(c - d\sqrt{-1})\,(a - b\sqrt{-1})\,(c + d\sqrt{-1}) =$
$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$;

δ) $(x + y + y\sqrt{2})(x + y - y\sqrt{2})(x - y + y\sqrt{2})(-x + y + y\sqrt{2})$ zu entwickeln.

35) $[p^2 + q^2] : [p + q\sqrt{-1}]$.

36 $[m + \sqrt{n - m^2}\,\sqrt{-1}] \cdot [m - \sqrt{n - m^2}\,\sqrt{-1}]$.

37) α) $[y^4 - 1] : [y + \sqrt{-1}]$; β) $[1 - x^5\sqrt{-1}] : [1 - x\sqrt{-1}]$;

γ) nachzuweisen, daß

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2} \text{ ist.}$$

38) Es soll bewiesen werden, daß, wenn a, b und c ungleiche positive Zahlen sind, stets $abc > (a + b - c)\,(a + c - b)\,(b + c - a)$ sei.

39) Es soll bewiesen werden, daß $2ab \overline{\gtrless} a^2 + b^2$ ist, d. h. daß das doppelte Produkt zweier Zahlen immer entweder ebenso groß, oder kleiner als die Summe ihrer Quadrate ist.

40) Die Summe eines Bruches und seines reciproken Wertes ist immer größer, als 2. Warum?

41) Wenn die Zahlen a, b und c nicht alle einander gleich sind, so ist immer: $9(a^3 + b^3 + c^3) > (a + b + c)^3 > 27abc$.

Anleitung: Es sei $a > b > c$, $a - b = d$, $b - c = e$ u. s. w.

42) α) Das um 1 verminderte Quadrat einer Primzahl, die größer als 3 ist, ist stets durch 24 teilbar. Warum?

β) Die Summe zweier unmittelbar aufeinander folgenden Potenzen von 2 ist stets durch 6 teilbar. Warum?

γ) Von der Summe, der Differenz oder dem Produkte zweier Zahlen ist wenigstens eines dieser Resultate durch 3 teilbar. Warum?

43) Wenn a und b zwei relative Primzahlen sind, so können $a^2 - ab + b^2$ und $a + b$ keinen anderen gemeinschaftlichen Primfaktor als 3 haben. Warum?

44) Sind m und n zwei absolute Primzahlen, so giebt es $(m - 1)\,(n - 1) - 1$ Zahlen, welche kleiner als das Produkt mn und zu demselben relative Primzahlen sind. Warum?

45) Dividiert man das Polynom $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ durch ein Binom von der Form $x - n$, so erhält man zum Quotienten ein Polynom von der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d$ und einen Rest e. Welche Beziehungen finden statt zwischen n, den Koeffizienten A, B, C, D, E und a, b, c, d und dem Reste e?

Antw.: Es sei $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E =$
$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\,(x - n) + e$.

Nach ausgeführter Multiplikation und beiderseitiger Vergleichung erhält man $a = A$; $b = a \cdot n + B$; $c = b \cdot n + C$; $d = c \cdot n + D$; $e = d \cdot n + E$.

Beispiel: $2x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 13x + 9$ soll durch $x - 3$ dividiert werden. $a = 2$, $b = 2 \cdot 3 + 7 = 13$, $c = 13 \cdot 3 + 15 = 54$, $d = 54 \cdot 3 + 13 = 175$, $e = 175 \cdot 3 + 9 = 534$.

Nach folgendem, leicht einzusehenden Schema erhält man aus den Koeffizienten des gegebenen Polynoms die des gesuchten und den Rest e:

$+ 2$	$+ 7$ $+ 6$	$+ 15$ $+ 39$	$+ 13$ $+ 162$	$+ 9$ $+ 525$
$+ 2$ a	$+ 13$ b	$+ 54$ c	$+ 175$ d	$+ 534$ e

wo $6 = 2 \cdot 3$, $39 = 13 \cdot 3$, $162 = 54 \cdot 3$, $525 = 175 \cdot 3$.

46) Die oben aufgestellte Regel soll erweitert werden für ein Polynom von der Form:

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F,$$

welches 1) durch $x - n$, 2) durch $x + n$ dividiert werden soll.

47) Das nachfolgende Schema zu erklären, welches man bei der Division von $2x^5 - 17x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 29x - 6$ durch $x - 7$ erhält:

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & -17 & +23 & -18 & +29 & -6 \\ & +14 & -21 & +14 & -28 & +7 \\ \hline 2 & -3 & +2 & -4 & +1 & +1. \end{array}$$

48) Es soll $3x^7 - 5x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ durch $x - 8$ dividiert und Quotient und Rest bestimmt werden; der Quotient soll durch $x + 6$ dividiert, der sich hier ergebende Quotient ohne Rücksicht auf den Rest durch $x - 5$, dann durch $x + 4$, ferner durch $x - 3$ und $x + 6$ dividiert werden. Wie heißen sämtliche Quotienten und die bei denselben sich ergebenden Reste?

49) Wird eine gegebene positive Zahl in zwei Summanden zerlegt, so ist die Summe der Kuben ein Minimum, wenn die Summanden einander gleich sind. Warum?

Anleitung. Man bezeichne die gegebene Zahl mit $2a$, den einen Summanden mit $a + x$, den andern mit $a - x$ u. s. w.

50) Zerlegt man eine Zahl $2a$ in zwei Summanden, so ist das Produkt der Zahlen ein Maximum, wenn die Summanden einander gleich sind. Wie heißt der Satz, wenn die Zahl in drei Summanden zerlegt wird, und wie wird derselbe bewiesen?

51) Es soll die Richtigkeit folgender Gleichungen nachgewiesen werden: α) $32a^2b^2(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^4 +$

$8ab(a^2 + b^2)\sqrt{16a^2b^2(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^4} = (a + b)^8$;

β) $(a^6 + 7a^3b^3 + b^6)^2 = (a^4 + 2ab^3)^3 + (b^4 + 2a^3b)^3 + (3a^2b^2)^3$.

52) Ist $a = \frac{1}{2}(m + n + p + q)$, $b = \frac{1}{2}(m + n - p - q)$, $c = \frac{1}{2}(m - n + p - q)$, $d = \frac{1}{2}(m - n - p + q)$, so ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$. Warum?

53) Das geometrische Mittel zwischen zwei Zahlen ist kleiner, als das arithmetische Mittel; die Differenz beträgt weniger, als das Quadrat der Differenz der Zahlen, dividiert durch die achtfache kleinere Zahl. Warum?

54) Das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen ist kleiner, als das geometrische Mittel. (S. § 32, Nr. 21.)

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

---

§ 60.

Begriff und Einteilung der Gleichungen.

1) Was versteht man unter Gleichung?

2) Was versteht man unter Seiten einer Gleichung?

3) Was ist eine identische Gleichung? Was eine analytische und was eine synthetische Gleichung (Bestimmungsgleichung)? Wie werden algebraische und transcendente Gleichungen unterschieden?

4) Folgende Gleichungen zu benennen:

α) $a + b = a + b$; β) $a + b - x = a - x + b$;

γ) $(a^3 - x^3) = (a^2 + ax + x^2)(a - x)$;

δ) $\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$; ε) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$;

ζ) $x^y = y^x$; η) $m \sin x + n \cos x = p$.

5) Welche Veränderungen kann man mit einer Gleichung durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Potenzierung u. s. w. vornehmen?

6) Was heißt eine Gleichung auflösen? Was heißt eine Gleichung in Bezug auf eine in ihr enthaltene Größe auflösen?

7) Wie viele Aufgaben sind in der Gleichung $5x + (y - 8)z = \frac{t - 1}{u}$ enthalten?

8) Was versteht man unter einer unentwickelten, was unter einer entwickelten Gleichung? Was heißt eine Gleichung ordnen? Wie geschieht das Ordnen?

9) Wie werden die Gleichungen in Hinsicht der Anzahl der unbekannten Größen eingeteilt?

10) Wie werden die Gleichungen in Hinsicht des Potenz-Exponenten, mit dem die unbekannte Größe behaftet ist, eingeteilt? Was hat man zuvor zu thun, um über den Grad einer Gleichung urteilen zu können?

11) Von welchem Grade werden nachstehende Gleichungen?

I. $ax + b = c$. II. $\frac{1}{x} - x = 2$. III. $(x + a)^2 = x^2 + b$.

IIII. $\frac{1}{ax + c} = \frac{1}{dx - e}$. V. $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} = 1$.

VI. $(3x + 4)^2 + (4x - 5)^2 = (5x - 6)^2$. VII. $x^2 - ax + b = 0$.

VIII. $(x + m)x = n$. VIIII. $x^3 - mx^2 + nx - c = 0$.

X. $[(x + 3)^3 - (x + 2)^3] - [(x + 2)^3 - (x + 1)^3] = 100$.

XI. $1 : \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 : \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

XII. $1 : \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 : \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x$.

XIII. $\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$. XIIII. $\sqrt{x + a} = x + b$.

A. Gleichungen vom ersten Grade.

§ 61.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

Die einfachen Gleichungen (1—41) werden am besten durch Anwendung der in § 2 Nr. 5 und 7, ferner in § 4 Nr. 6 und 13 angedeuteten, unten zusammengestellten, Sätze gelöst. Bei den übrigen Gleichungen geschieht die Auflösung durch Anwendung der in Nr. 5 des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Veränderungen.

I. $\begin{cases} x + a = b \\ x = b - a \end{cases}$ II. $\begin{cases} x - a = b \\ x = b + a \end{cases}$ III. $\begin{cases} a - x = b \\ x = a - b. \end{cases}$

IIII. $\begin{cases} x \cdot a = b \\ x = b : a \end{cases}$ V. $\begin{cases} x : a = b \\ x = b \cdot a \end{cases}$ VI. $\begin{cases} a : x = b \\ x = a : b. \end{cases}$

1) α) $x + 19 = 37$; β) $3\frac{1}{3} + x = 5\frac{1}{4}$; γ) $7a = x + 3a$.

2) α) $x + p = q$; β) $x + \frac{1}{2}(a - b) = a$; γ) $x + b = \frac{1}{2}(a + b)$; δ) $\frac{1}{2}(a + b) + x = a$; ε) $\frac{1}{2}(a - b) + x = \frac{1}{2}(a + b)$.

3) α) $x - 45 = 72$; β) $x - 1\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; γ) $2a = x - 3a$.

4) α) $x - m = n$; β) $x - \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a - b)$;
γ) $x - \frac{1}{2}(a - b) = b$; δ) $x - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)$;
ε) $x - b = \frac{1}{2}(a - b)$; ζ) $x - 3a + 2b = 2(b - a)$.

5) α) $78 - x = 43$; β) $1\frac{3}{5} - x = 1\frac{1}{2}$; γ) $7m - x = 2m$.
6) α) $q - x = p$; β) $b = \frac{1}{2}(a + b) - x$;
γ) $a - x = \frac{1}{2}(a - b)$; δ) $\frac{1}{2}(a + b) - x = b$;
ε) $\frac{1}{2}(a + b) = a - x$; ζ) $5m - x = 4m + n$.
7) α) $5{,}432\,1 - x = 4{,}321$; β) $5a - x + 3a = 7a$.
8) α) $x + (3a + 5b - 7c) = 4a + 3b - 4c$;
β) $(a - b)^2 + x = (a + b)^2$; γ) $(p + q)^2 - x = (p - q)^2$.
9) $28 - (7 + x) = 12$. 10) $3 = 8 - (18 - x)$.
11) α) $7a - (5a + x) = a + b$; β) $6m - 2n = 5m - (3n - x)$.
12) $x - [2a - 5b + 6c] = a + 2b - 3c$.
13) $p + 2s - (2q + 4r) = x - (7r - 6s)$.
14) α) $c + 3a - x + 2b = 2a - (b - c) + 4b$;
β) $x - (a - x) = b$; γ) $a - (b + x) = x$.
15) α) $9 - [8 - (7 - x)] = 2$; β) $7 - [7 + (7 - [7 + x])] = 7$.
16) $7x = 56$. 17) $g \cdot x = h$. 18) α) $x \cdot 63 = 7$; β) $5x = 1\frac{1}{4}$.
19) α) $\frac{x}{9} = 8$; β) $\frac{x}{11} = 17$; γ) $7 = \frac{1}{7}x$.
20) α) $\frac{x}{i} = k$; β) $\frac{x}{m + n} = m - n$; γ) $3a - 2b = \frac{x}{2a - 3b}$.
21) α) $\frac{56}{x} = 8$; β) $\frac{437}{x} = 23$; γ) $13 = \frac{1}{x} \cdot 91$.
22) α) $e : x = d$; β) $5a : x = 2\frac{1}{2}a$. 23) $x : 1{,}357 = 0{,}024\,68$.
24) $x : (-8\frac{2}{3}) = -9\frac{3}{4}$. 25) $63 = 9 : x$.
26) $-1\frac{2}{3}x = -8\frac{1}{18}$. 27) $(a^2 - b^2) : x = a + b$.
28) $43 = 12x - 9$. 29) $2b - 3a = 6x - 9a + 8b$.
30) α) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = (a^4 - b^4) : x$;
β) $[a^2 - 7a + 10] : x = a - 5$; γ) $(9a^2 - 1) : x = 3a - 1$.
31) $a^3 - b^3 = (a - b)x$. 32) $354 = 7x - 17$.
33) α) $mx - n = p$; β) $ax + b = a + b$.
34) α) $\frac{x}{9} + 17 = 80$; β) $\frac{x}{5} - 15 = 5$.
35) α) $\frac{x}{a} - b = c$; β) $\frac{a + b}{x} - a = b$.
36) $-5 = \frac{21}{x} - 8$. 37) $10 - \frac{3}{x} = 25$. 38) $\frac{n}{x} \pm p = q$.
39) α) $1{,}111 - 0{,}111\,1x = 0{,}333\,3$; β) $100 - \frac{1}{3}x = 63$.
40) α) $7{,}77 = 2{,}48x - 11{,}499\,6$; β) $1{,}1 = 1{,}1x - 0{,}11$.
41) α) $12\frac{3}{4} - \frac{1}{5}x = 67\frac{8}{9}$; β) $1\frac{2}{3}x + 4\frac{5}{6} = 7\frac{8}{9}$.
42) α) $9x + 8 = 3x + 50$; β) $5x - 12 = 132 - 7x$;
γ) $13x - 5a + 2b = 6x + 2a - 5b$;
δ) $6x + 5(m + n) = 15x - 2(29m - 34n)$.

43) $ax + bx - cx = d.$ 44) $ax + b = cx + d.$

45) $m^2 - mx = n^2 - nx.$ 46) $ab - ax = bx - ab.$

47) $1\frac{3}{8}x - 99\frac{13}{27} = 4\frac{5}{6} - 7\frac{8}{9}x.$ 48) $\frac{3}{7}x + 15 - \frac{3}{5}x + 29 = 0.$

49) $mx + n - px - 1 = nx - x - m + p.$

50) $7 - \frac{x}{9} = \frac{x}{13} - 11.$ 51) $m + \frac{x}{a} = n - p - \frac{x}{b}.$

52) α) $\frac{mx}{n} + p = q;$ β) $a - \frac{bx}{c} = d - \frac{ex}{g}.$

53) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{5}{6}x - \frac{7}{8} = \frac{9}{10} + \frac{11}{12}x - \frac{13}{14} - \frac{15}{16}x.$

54) $x : (a \pm x) = p : q.$ (Prop.) 55) $f : x = g : (g + x).$

56) $\frac{a}{bx} - c + \frac{d}{ex} - f = \frac{g}{hx} - k + \frac{m}{nx} - o.$

57) α) $1 - \frac{2}{3x} + 4 - \frac{5}{6x} = 7 - \frac{8}{9x} + 10 - \frac{11}{12x};$

β) $\frac{2}{3}[a - (b - x)] - \frac{3}{4}[x - (b - a)] - \frac{4}{5}[b - (a + x)] = \frac{5}{6}[x + a - b].$

58) α) $(m + n)x + a = px;$ β) $a(x - a^2) = b(x - b^2).$

59) α) $2b - (b + c)x = (b - c)x;$

β) $a(2x + 19b - 10a) = b(x + 7b);$

γ) $ax = bx + cx;$ δ) $a(x - b) = c(x - b);$

ε) $c(b + x) - ac = d(b + x) - ad.$

60) α) $p - (r + s)x = q - sx;$

β) $2a^2b - (a - b)x = 2b(b^2 + 2a^2) - (a + b)x;$

γ) $(a + b - c)x - (a - b - c)x - (a^2 + b^2 + c^2) =$
$2(ab + bc + ca) - (a - b + c)x;$

δ) $1 = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{x}\right);$ ε) $\frac{m - x}{x - n} = \frac{m}{n};$

ζ) $m^2(m - x) - n^2(n + x) = mnx;$

η) $1 - \frac{x}{2}\left(1 - \frac{3}{4x}\right) = \frac{5x}{6}\left(7 - \frac{6}{7x}\right) - 35\frac{5}{56}.$

61) α) $\frac{x}{p + q} - m = n + x;$ β) $\frac{1 + x}{1 - x} = a;$ γ) $\frac{1 - x}{1 + x} = a.$

62) α) $a - \frac{m + n}{x} = b - \frac{m - n}{x};$ β) $\frac{x}{ab} - (c + x)d = e - \frac{x + m}{an}.$

63) $9{,}87 - (6{,}54 - 3{,}21x) = 2{,}46x + 3{,}57.$

64) $2\frac{7}{8} - [3\frac{7}{8} - (4\frac{1}{4} - 4\frac{3}{8}x)] = 6\frac{7}{8} - (7\frac{5}{8} - 3\frac{5}{8}x).$

65) $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}[\frac{1}{3}(\frac{1}{3}[\frac{1}{3}x - 1] - 1) - 1] - 1) - 1 = 0$ *).

66) α) $\frac{1}{9}(\frac{1}{7}[\frac{1}{5}(\frac{1}{3}[x + 2] + 4) + 6] + 8) = 1$ *);

β) $4x + \frac{1}{2}(x - 2) - 2[2x - (\frac{1}{4}x - \frac{1}{18}[16 - \frac{1}{2}(x + 4)])] = \frac{2}{3}(x + 2).$

---

*) Die Klammern sind von innen aus nicht aufzulösen. Man versuche, die Beispiele 65 und 66 im Kopfe zu behandeln.

67) α) $a - (x - m)n = (n - x)m$;
β) $ap(x - an - mb) = b(naq - q[x - mb])$;
γ) $a - x\left(a - \frac{a}{x}\right) = (a + x)\left(a + \frac{a}{x}\right) + a\left(a - \frac{a}{x}\right) - a$.

68) $7{,}1 - (13{,}4 - 2{,}5x)\, 4\tfrac{3}{4} = 39{,}762\,5 - (0{,}45 + 8x)\, 9$.

69) $9{,}45x - (0{,}945 + 9{,}45x)\, 0{,}945 = 0{,}945x -$
$(9{,}45 - 0{,}945x)\, 9{,}45$.

70) $\frac{5b - 6c}{4a^2}x + 2a - \frac{5b - 4a}{3b - 4c}x - \frac{3b - 5n}{2a} =$
$\frac{5n - 4c}{2a} - \frac{6c - 4a}{3b - 4c}x$.

71) α) $2 - \frac{5 + x}{7} = 1 - \frac{9 - x}{14}$; β) $3 = 12 - \tfrac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right)$;
γ) $4 = 12 - \tfrac{1}{4}\left(47 - \frac{60}{x}\right)$; δ) $5 = 12 - \tfrac{1}{5}\left(47 - \frac{60}{x}\right)$.

72) α) $a^2b - \frac{a + x}{b} = ab^2 - \frac{b + x}{a}$;
β) $\frac{1}{a - b} + \frac{a - b}{x} = \frac{1}{a + b} + \frac{a + b}{x}$;
γ) $\frac{1}{3\frac{(m + n)^2}{p^2x} - \frac{m + n}{p}} = \frac{p}{2(m + n)}$;
δ) $\frac{(a + b)^2(x + 1) - (a + b)(x + 1) + (x + 1)}{a + b + 1} =$
$(a + b)^2 - (a + b) + 1$.

73) $\frac{2x - 3}{15} - \frac{4x - 9}{20} = \frac{8x - 27}{30} - \frac{16x - 81}{24} - \frac{9}{40}$.

74) α) $\frac{a^4 - b^4}{a^2(a - b)} - \frac{a^2x + b^3}{a^2} = 2b + \frac{b^2}{a}$;
β) $\frac{a + b}{2b} - \tfrac{1}{2}c\frac{a - b}{bx} = \frac{bc}{(a + b)x} + \frac{a}{a + b}$;
γ) $a^3(x + 1) - a^2(x + 1) + a(x + 1) = a^4 + x$*).

75) α) $3 - [\tfrac{1}{5}(4 + x) - \tfrac{1}{7}(6 - x)] = \tfrac{1}{9}(8 + x) - 10$;
β) $111(x - 111) = \tfrac{1}{111}(x - 111) - x + 111$.

76) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + x} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + x}$.

---

*) Anleitung zur Auflösung: Man setze $(a + 1)(a^3 - a^2 + a - 1) = a^4 - 1$, suche zuerst $x + 1$, dann x.

77) $\alpha)\ \dfrac{1}{1{,}4142 - \dfrac{1}{x}} = 1{,}4142;$

$\beta)\ \frac{1}{14}(14x - 1) - 14(14x - 1) + 14x = 1.$

78) $\alpha)\ \dfrac{a}{m + x} - b = c;$ $\beta)\ b = \dfrac{x - a}{1 - ax}.$

79) $\alpha)\ n - \dfrac{p + x}{q + x} = \dfrac{nx}{q + x} - m;$ $\beta)\ \dfrac{ax}{b(x + c)} + \dfrac{bx}{a(x + c)} = 1;$

$\gamma)\ \dfrac{1}{ab - ax} + \dfrac{1}{bc - bx} = \dfrac{1}{ac - ax}.$

80) $\alpha)\ (m + n)^2 = 3m^2 + n^2 - \dfrac{(m^2 - n^2)m}{x};$

$\beta)\ (m - n)^2 = 3m^2 + n^2 - \dfrac{(m^2 - n^2)m}{x}.$

81) $\alpha)\ b^2 = \dfrac{b^3 - c^3}{b - c} - \dfrac{bc(b + c)}{x};$

$\beta)\ c^2 = \dfrac{b^3 - c^3}{b - c} - \dfrac{bc(b + c)}{x};$

$\gamma)\ (b + c)^2 = \dfrac{b^3 - c^3}{b - c} + \dfrac{bc(b + c)}{x}.$

82) $\alpha)\ (m - x)(n - x) = (p + x)(x - q);$

$\beta)\ (x + 2) : (20 - x) = (x + 20) : (46 - x).$

83) $8x - 28 = (4x + 21)\dfrac{6x - 22}{3x + 14}.$

84) $(5x - 7) : (4x - 2) = (15x - 125) : (12x - 97).$

85) $[(a^2 - b^2)x - ab]\,[a - (a + b)x] =$
$[(a + b)^2 x + ab]\,[b - (a - b)x].$

86) $\dfrac{a + bx}{c + dx} - \dfrac{e - fx}{c} = \dfrac{dfx^2}{c(c + dx)}.$

87) $(8 - 3x)^2 + (4 - 4x)^2 = (9 - 5x)^2.$

88) $[(a^2 - b^2)x - 1]^2 + [2abx - 1]^2 = [(a^2 + b^2)x + 1]^2.$

89) $\dfrac{1 + 3x}{5 + 7x} - \dfrac{9 - 11x}{5 - 7x} = 14\,\dfrac{(2x - 3)^2}{25 - 49x^2}.$

90) $\dfrac{7x - 6}{35} - \dfrac{x - 5}{6x - 101} = \dfrac{x}{5}.$

91) $\dfrac{16x + 7}{24} + \dfrac{x - 16}{177 - 9x} = \dfrac{2x + 1}{3}.$

92) $\alpha)\ \dfrac{9x + 10}{11x - 12} - \dfrac{8 + 5x}{40} = \frac{12}{13} - \frac{1}{8}x;$

$\beta)\ \dfrac{25 - \frac{1}{3}x}{x + 1} + \dfrac{16x + 4\frac{1}{5}}{3x + 2} = 5 + \dfrac{23}{x + 1}.$

93) $(63x - 2) : \frac{374 - 77x}{676 - 143x} = 117x - 28.$

94) $\frac{1 - 2x}{3 - 4x} - \frac{5 - 6x}{7 - 8x} = \frac{8}{3} \frac{1 - 3x^2}{21 - 52x + 32x^2}.$

95) $\frac{9x + 4}{5x - 48} + \frac{4x - 19}{51} = \frac{5x + 32}{17} - \frac{11x + 13}{51}.$

96) $\alpha)$ $\frac{x + 2a}{2b - x} + \frac{x - 2a}{2b + x} = \frac{4ab}{4b^2 - x^2};$

$\beta)$ $\frac{(a + b)x + c}{(a - b)x + d} - \frac{(a - b)x + e}{(a + b)x + m} = \frac{4ab}{(a + b)(a - b)}.$

97) $\frac{x^{n+1} - x^n - x^{n-1}}{2} - 2\frac{2x^n + x^{n-1}}{2x - 7} =$
$\frac{1}{6}[3x(x^n - x^{n-1}) - 47x^{n-1}].$

98) $\frac{4x^{n+1} + 3x^{n+2}}{24} + \frac{2x^{n+1} + x^n}{2x - 1} = \frac{1}{6}x^{n+1} + \frac{x^{n+2} + 24x^n}{8}.$

99) $\frac{4x^{-16} + 7x^{-17}}{6x - 37} = \frac{6x^{-15} - 30x^{-16} + 21x^{-17}}{3x - 16} - 2x^{-16}.$

100) $\frac{(x^{6\frac{4}{5}} - x^{5\frac{4}{5}})(x^2 - x)}{8} + \frac{x^{4\frac{4}{5}} - x^{3\frac{4}{5}}}{x - 2} - \frac{5x^{6\frac{4}{5}}(x^2 + 1) - 8x^{3\frac{4}{5}}}{40}$
$= \frac{1}{4}(5x^{3\frac{4}{5}} - x^{7\frac{4}{5}}).$

Wurzelgleichungen.

VII. $\sqrt[m]{x} = a, \ x = a^m.$

101) $(9 + 7x) : \sqrt{x} = 7\frac{1}{4}\sqrt{x}.$

102) $\sqrt{x + 4} = 7.$

103) $10 = 2\sqrt{\frac{1}{3}x\sqrt{3}}.$

104) $5 = 3\sqrt{x} - 5.$

105) $\sqrt{36 + x} = 18 + \sqrt{x}.$

106) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}.$

107) $\sqrt{x + 4ab} = 2b + \sqrt{x}.$

108) $\sqrt{x + 4ab} = 2a + \sqrt{x}.$

109) $\frac{1}{11}(17 - 5\sqrt{x}) = -3.$

110) $\sqrt{4x^2 - 7x - 6} = 9 - 2x.$

111) $\sqrt{2x - 3n} = 3\sqrt{n} - \sqrt{2x}.$

112) $\sqrt{4p + x} = 2\sqrt{q + x} - \sqrt{x}.$

113) $(\sqrt{9x} - 6)(\sqrt{x} + 25) = (5 + 3\sqrt{x})(\sqrt{x} + 3).$

114) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{m}}{\sqrt{x} - \sqrt{m}} = \frac{p}{m}.$

115) $\frac{\sqrt{x} + 4m}{\sqrt{x} + 3n} = \frac{\sqrt{x} + 2m}{\sqrt{x} + n}.$

116) $(3x - 1) : (\sqrt{3x} + 1) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3x} - 1)$*).

*) Man setze $3x - 1 = (\sqrt{3x} + 1)(\sqrt{3x} - 1).$

117) α) $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=\frac{4}{\sqrt{2+x}}$; β) $\sqrt{a+x}=a\sqrt{x}$;

γ) $\sqrt{x}+\sqrt{a+x}=m:\sqrt{a+x}$; δ) $m\sqrt[5]{x-p}=n\sqrt[6]{x-p}$.

118) $x=\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2}-a^2}+a$.

119) $\frac{1}{n}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{7}{x^2}}}$.

120) $\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$. 121) $5\sqrt[3]{\frac{4}{25}x^2-\frac{8}{125}x^3}+2x=1\frac{2}{3}$.

122) $\sqrt[2n]{m^2x^2-mnx}=\sqrt[n]{mx-n}$.

123) $\sqrt[3]{\frac{n^2+mx}{m^2-nx}}=\sqrt{\frac{n^2+mx}{m^2-nx}}$. 124) $\frac{50\sqrt[10]{x+24}-9}{3+5\sqrt[10]{x+24}}=7$.

125) $[12(13\,580-x)-9]^2+[5(13\,580-x)-1]^2=$
$[13(13\,580-x)-8]^2$ *).

Exponential-Gleichungen.

VIII. $x^m=a$. Aufl.: $x=\sqrt[m]{a}$.

VIIII. $m^x=a$. Aufl.: $x={}^b\!\log a:{}^b\!\log m$, wo b die Basis eines beliebigen Logarithmensystems bedeutet, oder $x={}^m\!\log a$.

126) α) $m^x=n$; β) $x^x=x$; γ) $a^x=1$; δ) $a^x=m^x$.

127)**) $(a^{5x+1})^5=(a^{7x-1})^7\cdot(a^{x-6})^9$. 128) $\sqrt[3+x]{a^{20}}:a^2=a^3$.

129) $(m^{15x-3})^{7-4x}=(m^{20x-7})^{9-3x}$.

130) $c^3\sqrt[x]{c^{7+5x}}=\sqrt[x]{c^{23}}$. 131) $\sqrt{a^{3-4x}}:\sqrt[5]{a^{6-7x}}=\sqrt[8]{a^{9-10x}}$.

132) $\frac{\sqrt[a-x]{m^{b+x}}}{\sqrt[a+x]{m^{b-x}}}=\sqrt[aa-xx]{m^2}$ 133) $a^{-\frac{1}{2}-x}a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{a^{-\frac{5}{6}}}$.

134) α) $\sqrt{a^{3-4x}}:\sqrt[5]{a^{6-7x}}\cdot a^{4,5}=1$;

β) $\sqrt{a^{3-4x}}:(\sqrt[5]{a^{6-7x}}\cdot a^{4,5})=1$.

135) $m^x=p\cdot q$. 136) $n^{2x-3}\cdot p^{-4x+5}=q^{-6x+7}$.

137) $a^{mx+n}\cdot b^{px+q}=a^{(m-1)x-n}b^{(p+1)x-q}$.

---

*) Man setze $13\,580-x=y$, bestimme zuerst y und hierauf x.

**) Die Beispiele 127 — 134 lassen sich einfach ohne Logarithmierung nach dem Satze behandeln, daß, wenn Potenzen gleich sind und gleiche Basen haben, auch ihre Exponenten einander gleich sind.

138) $10^x = 2{,}718\,28.$ 139) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2{,}718\,28}} = 0{,}692\,20.$

140) α) $3^{2{,}478\,06} = 2{,}478\,06^x$; β) $(2\tfrac{1}{4})^{3\frac{3}{8}} = (3\tfrac{3}{8})^x$;
γ) $(2\tfrac{10}{27})^{3\frac{13}{81}} = (3\tfrac{13}{81})^x.$

141) $(1{,}226\,875^x)^{3{,}57} = (17^{3{,}57})^{1{,}226\,875}.$

142) $(-1{,}23)^x = -2{,}815\,46.$ 143) $1{,}23^x = -4{,}2596.$

144) $(-4{,}56)^x = 432{,}35.$ 145) $(-7{,}89)^x = -3875{,}45.$

146) $(1\tfrac{2}{3})^{4+\frac{5}{6}x} = 151{,}884.$ 147) $0{,}123\,45^{\frac{6}{7}x} = 1\,697\,365.$

148) $0{,}000\,2^{-\frac{3}{5}x} = 0{,}000\,02^{-\frac{7}{9}x+13}.$

149) $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{1{,}371\,29}.$ 150) $\sqrt[x]{3^{5x+7}} = \sqrt[7x]{5^{3x+1}}.$

151) $\sqrt[x]{14{,}678} = 1{,}4678.$ 152) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{9}{x}+11}.$

153) $\left(\frac{234}{567}\right)^{8-\frac{9}{10}x} = \left(\frac{987}{654}\right)^{3-2x} \cdot 1{,}572\,145^{2x-1}.$

154) $3125^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot 15\,625^{-\frac{x+2}{x+3}} = 0{,}2.$

155) $3^{(5^x)} = 7.$ 156) $a^{(b^x)} = c.$

Wiederholungsbeispiele.

157) α) $\frac{x-5}{4} = \frac{7x-3}{6} - 7\tfrac{1}{6}$; β) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{p+q}{p-q}.$

158) $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = \frac{x+2}{6} - \frac{7x-8}{9}.$

159) $a^3 - x - a^2x = 1 + ax.$ 160) $\frac{7a - 5(2+x)}{a-x} = a.$

161) $q^3(x-q) = p^3(x-p) - pqx(p-q).$

162) $\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{4}(3x-2) + \frac{1}{8}(5x-4) = 1 - \frac{1}{8}(7x-6).$

163) α) $a\frac{2x-a}{a+2b} + b\frac{2x-b}{b+2a} = x$; β) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a+b+1}{a+b-1}.$

164) $\frac{a(x-a)}{b+c} + \frac{b(x-b)}{c+a} + \frac{c(x-c)}{a+b} = x.$

165) α) $a\frac{a-x}{b} - b\frac{b+x}{a} = x.$ β) $\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}.$

166) $\frac{x}{a+b} + abx = a + b + \frac{1}{ab}.$

167) $11 - \frac{1}{4}(3x-1) - \frac{1}{3}(2x+1) = 10 - \frac{1}{3}(2x-5) - \frac{1}{8}(7x-1).$

168) $21 - \frac{2}{5}(3x+4) - \frac{5}{6}(7x-1) = 8 + \frac{9}{10}(3x-1) - \frac{5}{8}(5x-2).$

169) $c(a-b-x) = d(a-b-x).$

170) $a - \frac{x}{a+b} - \frac{x-4ab}{a-b} - \frac{2b(a+b)}{a-b} = b - \frac{x}{a-b}$.

171) $p - \frac{x-np}{m} = \frac{x-mp}{n} - \frac{x-mn}{p} - p$.

172) $\frac{x-b^2+2ac}{a+c} - \frac{x-a^2+2bc}{b+c} = \frac{x-c^2-2ab}{a-b}$.

173) $\frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ca} - 1 = abc - x(a+b+c)$.

174) $mx - \frac{mn^2}{2} - nx - \frac{6nx-5m^2}{2m} = \frac{m^2-3nx}{m} - \frac{nx+4m}{4}$.

175) $a - \frac{b(c-x)}{d} - \frac{e(f+x)}{g} = h - \frac{k(m+x)}{n} - \frac{p(r-x)}{s}$.

176) $\frac{1-x}{1-a} - \frac{1-x}{1-a^2} + \frac{1-x}{1-a+a^2-a^3} - 2 =$

$2 - \frac{1-x}{1+a} - \frac{1-x}{1+a^2} - \frac{1-x}{1+a+a^2+a^3}$.

177) $\frac{1}{x-6} - \frac{2}{11-x} = \frac{3}{x-1}$. 178) $\frac{6}{x-3} - \frac{2}{7-x} = \frac{8}{x-1}$.

179) $\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} = \frac{p+q}{x-c}$.

180) $\frac{a}{x-m} + \frac{b}{x-n} + \frac{c}{x-p} = \frac{a}{x-n} + \frac{b}{x-p} + \frac{c}{x-m}$.

181) $\frac{x-9}{x-5} - \frac{x-7}{x-2} - \frac{x-9}{x-4} = \frac{x-8}{x-5} - \frac{x-7}{x-4} - \frac{x-8}{x-2}$.

182) $\frac{4}{x-4} - \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-5}$.

183) $\frac{4}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

184) $\frac{4}{1+x} - \frac{3}{3+x} = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{2-x}$.

185) $\frac{m-q}{x-n} + \frac{n-p}{x-q} = \frac{m-q}{x-p} + \frac{n-p}{x-m}$.

186) $\frac{4}{x-1} - \frac{9}{x-3} + \frac{6}{x-5} = \frac{1}{x-7}$.

187) $\frac{6}{x-3} - \frac{9}{x-2} + \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x-4}$.

188) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{4}{7(x-3)} - \frac{11}{7(x+4)}$.

189) $\frac{a(m-q)}{x-n}+\frac{b(m-q)}{x-p}+\frac{a(n-m)+b(p-m)}{x-q}$
$=\frac{a(n-q)+b(p-q)}{x-m}$.

190) $\frac{m(a-b)+c(m+n)}{x-a}-\frac{n(a-b)+c(m+n)}{x-b}$
$=\frac{m(a-b)}{x-(a+c)}-\frac{n(a-b)}{x-(b-c)}$.

191) $\frac{c(a+b)+a^2}{x-a}-\frac{c(a+b)-b^2}{x-b}=\frac{a^2}{x-(a+c)}+\frac{b^2}{x-(b-c)}$.

192) $[x-(a+b)](c+d)=0$*). 193) $(5x-20)(m+n)=0$.

194) $(7x-42)13=(7x-42)15$.

195) $(a-r)\left[\frac{x}{n-o}-\frac{1}{p-q}\right]=(b-r)\left[\frac{x}{n-o}-\frac{1}{p-q}\right]$.

196) $\frac{7}{8}[(x-m)+(n-o)]-\frac{4}{5}[(n-o)-(m-x)]-\frac{3}{7}[(x+n)$
$-(o+m)]=\frac{5}{8}[x-(m-n+o)]-\frac{3}{4}[(x-o)-(m-n)]$.

197) Auf wievielfache Weise wird der folgenden Gleichung Genüge geleistet: $(3x-12)(5x-25)(7x-42)=0$?

198) Auf wievielfache Weise der Gleichung:
$(x-a-b)(x-a+b)(x+a+b)=0$?

§ 62.

Auflösungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

$x=$

1) α) 18; β) $1\frac{1}{12}$; γ) $4a$.
2) α) $q-p$; β) $\frac{1}{2}(a+b)$;
γ) $\frac{1}{2}(a-b)$; δ) $\frac{1}{2}(a-b)$;
ε) b.
3) α) 117; β) $1\frac{1}{12}$; γ) $5a$.
4) α) $n+m$; β) a; γ) $\frac{1}{2}(a+b)$;
δ) a; ε) $\frac{1}{2}(a+b)$; ζ) a.
5) α) 35; β) $\frac{1}{10}$; γ) $5m$.
6) α) $q-p$; β) $\frac{1}{2}(a-b)$;
γ) $\frac{1}{2}(a+b)$; δ) $\frac{1}{2}(a-b)$;
ε) $\frac{1}{2}(a-b)$; ζ) $m-n$.
7) α) $=1{,}1111$; β) a.

$x=$

8) α) $a-2b+3c$; β) $4ab$;
γ) $4pq$.
9) 9. 10) 13.
11) α) $a-b$; β) $m+n$.
12) $3a-3b+3c$.
13) $p-2q+3r-4s$.
14) α) $a-b$; β) $\frac{1}{2}(a+b)$;
γ) $\frac{1}{2}(a-b)$.
15) α) 6; β) 7.
16) 8. 17) $\frac{h}{g}$.
18) α) $\frac{1}{5}$; β) $\frac{1}{4}$.

*) Man benutze bei 192—198 den Satz, daß ein Produkt zu Null wird, wenn einer der Faktoren zu Null wird. Die Beispiele 194—196 müssen erst auf die Form $a=0$ gebracht d. h. auf Null reduciert werden.

19) α) 72; β) 187; γ) 49.
20) α) ik; β) $m^2 - n^2$;
γ) $6a^2 - 13ab + 6b^2$.
21) α) 7; β) 19; γ) 7.
22) α) $e : d$; β) 2.
23) 0,033 490 76.
24) $84\frac{1}{2}$. 25) $\frac{1}{7}$. 26) $4\frac{5}{6}$.
27) $a - b$. 28) $4\frac{1}{3}$. 29) $a - b$.
30) α) $a - b$; β) $a - 2$;
γ) $3a + 1$.
31) $a^2 + ab + b^2$. 32) 53.
33) α) $(p + n) : m$; β) 1.
34) 567. 35) α) $(c + b)a$; β) 1.
36) 7. 37) $-\frac{1}{5}$. 38) $n : (q \mp p)$.
39) α) 7; β) 111.
40) α) 7,77; β) 1,1.
41) α) $-275\frac{25}{36}$; β) $1\frac{5}{6}$.
42) α) 7; β) 12; γ) $a - b$;
δ) $7(m - n)$.
43) $d : (a + b - c)$.
44) $\frac{b - d}{c - a}$ oder $\frac{d - b}{a - c}$.
45) $m + n$. 46) $2ab : (a + b)$.
47) $10\frac{11}{12}$. 48) 140.
49) $\frac{-m + p - n + 1}{m - p - n + 1}$. 50) $95\frac{8}{11}$.
51) $(n - p - m)ab : (a + b)$.
52) α) $\frac{(q - p)n}{m}$; β) $\frac{(a - d)cg}{bg - ec}$.
53) $1\frac{407}{2275}$. 54) $\frac{pa}{q \mp p}$. 55) $\frac{fg}{g - f}$.
56) $\frac{aehn + bdhn - begn - behm}{behn(c + f - k - o)}$.
57) α) $\frac{11}{432}$; β) $b - a$.
58) α) $\frac{a}{p - m - n}$; β) $a^2 + ab + b^2$.
59) α) 1; β) $5a - 7b$; γ) 0;
δ) b; ε) $a - b$.
60) α) $(p - q) : r$; β) $a^2 + b^2$;
γ) $a + b + c$; δ) $a + b$;
ε) $2mn : (m + n)$;
ζ) $m - n$; η) 6.

61) α) $(m + n)(p + q) : (1 - p - q)$;
β) $\frac{a - 1}{a + 1}$; γ) $\frac{1 - a}{1 + a}$.
62) α) $2n : (a - b)$;
β) $\frac{b(an[e + cd] - m)}{n + b - abdn}$.
63) $\frac{8}{25}$. 64) $\frac{1}{2}$. 65) 363.
66) α) 1; β) 10.
67) α) $a : (n - m)$; β) $na + mb$;
γ) $1 - a$. 68) 1,1.
69) 9,45. 70) $\frac{2a(3b - 4c)}{5b - 6c}$.
71) α) $4\frac{1}{3}$; β) 3; γ) 4; δ) 5.
72) α) $a^2b^2 - a - b$; β) $a^2 - b^2$;
γ) $\frac{m + n}{p}$; δ) $a + b$.
73) 6. 74) α) $a - b$; β) c; γ) a.
75) α) $26\frac{115}{143}$; β) 111.
76) $\frac{2}{3}$. 77) α) 1,4142....; β) $\frac{1}{14}$.
78) α) $\frac{a - (b + c)m}{b + c}$; β) $\frac{a + b}{1 + ab}$.
79) α) $\frac{p - mq - nq}{m - 1} = \frac{p - (m + n)q}{m - 1}$;
β) $abc : (a^2 - ab + b^2)$;
γ) $b(a - b + c) : a$.
80) α) $\frac{1}{2}(m + n)$; β) $\frac{1}{2}(m - n)$.
81) α) b; β) c; γ) $b + c$.
82) α) $\frac{mn + pq}{m + n + p - q}$; β) 7.
83) 7. 84) 11.
85) $\frac{ab(a + b)}{a^3 + a^2b - 3ab^2 - b^3}$.
86) $\frac{c(a - e)}{de - cf - bc} = \frac{c(e - a)}{cf + bc - de}$.
87) $\frac{1}{10}$. 88) $\frac{1}{4a(a + b)}$.
89) $\frac{33}{64}$. 90) 11. 91) 17.
92) α) 7; β) $3\frac{3}{8}$.
93) 3. 94) $\frac{2}{3}$. 95) 100.
96) α) $ab : (a + b)$;

96) $\beta)\ \dfrac{(a^2-b^2)(de-cm)+4abdm}{(a+b)^2[(a-b)c-(a+b)d]+(a-b)^2[(a-b)m-(a+b)e]}$.

97) 5*). 98) 1*). 99) 7*).
100) 22*), 101) 36.
102) $(+7)^2-4=45$**).
103) $(+5)^2\sqrt{3}=43{,}301\,27$.
104) $(+3\tfrac{1}{3})^2=11\tfrac{1}{9}$.
105) $(-8)^2=64$.
106) $(+8)^2=64$.
107) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
108) $(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$.
109) $(+10)^2=100$.
110) 3. 111) $2n$.
112) $(p-q)^2:(2p-q)$.
113) $(+3)^2=9$.
114) $m\left(\dfrac{p+m}{p-m}\right)^2$ 115) $\left(\dfrac{mn}{m-n}\right)^2$.
116) $\tfrac{1}{3}(+3)^2=3$. 117) $\alpha)\ \tfrac{2}{3}$;
$\beta)\ \dfrac{a}{a^2-1}$***); $\gamma)\ \dfrac{(m-a)^2}{2m-a}$;
$\delta)\ \dfrac{pm^{30}+n^{30}}{m^{30}}$ (auch $x=p$).
118) $\dfrac{5a^2-b^2}{4a}$.
119) $2n$ (auch $x=\infty$).
120 $\left[\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}\right]^n$.
121) $\tfrac{5}{18}$. 122) $n:m$.
123) $m-n$ (auch $x=-n^2:m$).
124) 1000. 125) 13579. ($y=1$.)
126) $\alpha)\ \log n:\log m$; $\beta)$ 1; $\gamma)$ wenn $a \lesseqgtr 1$ ist, ist $x=0$; für $a=1$ ist x jeder beliebigen Zahl gleich; $\delta)$ wenn $a \lesseqgtr m$ ist, ist $x=0$; für $a=m$ ist x jeder beliebigen Zahl gleich.

127) 2. 128) 1. 129) 0,5.
130) 2. 131) $1\tfrac{7}{26}$.
132) $\dfrac{1}{a+b}$. 133) $-2\tfrac{1}{12}$.
134) $\alpha)$ 8; $\beta)$ -7.
135) $\dfrac{\log p+\log q}{\log m}$.
136) $\dfrac{3\log n-5\log p+7\log q}{2\log n-4\log p+6\log q}$.
137) $\dfrac{\log(a^{2n}b^{2q})}{\log b-\log a}$.
138) 0,434 29. 139) 2,718 28.
140) $\alpha)$ 3; $\beta)$ $2\tfrac{1}{4}$; $\gamma)$ $2\tfrac{10}{27}$.
141) 17. 142) 5.
143) Die Auflösung ist in reellen Zahlen unmöglich†); für $1{,}23^x=4{,}2596$ ist $x=7$.
144) 4. 145) Die Auflösung ist in reellen Zahlen unmöglich††); für $(-7{,}89)^x=3875{,}45$ ist $x=4$.
146) 7. 147) -8.
148) 42,558 1. 149) 1,371 29.
150) $-1{,}553\,17$. 151) 7.
152) 0,072 298. 153) 11.
154) 3. 155) 0,355 206.
156) $\dfrac{\log\log c-\log\log a}{\log b}$.
157) $\alpha)$ 7; $\beta)$ $p:q$. 158) 5.
159) $a-1$. 160) $a-2$.
161) $p+q$. 162) 1.
163) $\alpha)$ u. $\beta)$ $a+b$. 164) $a+b+c$.
165) $\alpha)$ u. $\beta)$ $a-b$. 166) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.
167) 7. 168) 7. 169) $a-b$.

*) Für 97), 98) und 100) genügt auch noch $x=0$, und für 99) $x=\infty$.

**) In betreff des Wertes für x in dieser und in den folgenden Gleichungen sehe man die Bemerkung in § 48.

***) Es ist also z. B. $\sqrt{2\tfrac{2}{3}}=2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $\sqrt{3\tfrac{3}{8}}=3\sqrt{\tfrac{3}{8}}$, $\sqrt{4\tfrac{4}{15}}=4\sqrt{\tfrac{4}{15}}$ u. s. w.

†) In der höheren Algebra wird gezeigt, daß $x=7\pm{}^{e}\log 1{,}23\,\pi\sqrt{-1}$.

††) In der höheren Algebra wird gezeigt, daß $x=4\mp\dfrac{3\,\pi\sqrt{-1}}{{}^{e}\log 7{,}89\pm\pi\sqrt{-1}}$.

170) $(a+b)^2$. 171) $mn+np+pm$. 172) $a^2+b^2+c^2$.

173) $\frac{abc}{a+b+c}$. 174) $\frac{2m(n^2-5)}{4m-3n}$.

175) $\frac{(h-a)\,dyns+bcgns+efdns-kmdgs-prdgn}{bgns-edns+kdgs-pdgn}$.

176) a^4. 177) 7. 178) 5. 179) $\frac{bp(a-c)+aq(b-c)}{p(a-c)+q(b-c)}$.

180) $\frac{pa(m-n)+mb(n-p)+nc(p-m)}{a(m-n)+b(n-p)+c(p-m)}$.

181) 8. 182) 7. 183) 1. 184) $\frac{1}{3}$.

185) $\frac{np-mq}{n+p-m-q}$. 186) 9. 187) 5. 188) 7.

189) $\frac{pa(m-n)(n-q)+nb(m-p)(p-q)}{a(m-n)(n-q)+b(m-p)(p-q)}$.

190) $[m(b-c)-n(a+c)]:[m-n]$.

191) $[a^2(b-c)+b^2(a+c)]:[a^2+b^2]$.

192) $a+b$. 193) 4. 194) 6.

195) $(n-o):(p-q)$. 196) $m-n+o$.

197) Sowohl durch $x=4$, als durch $x=5$, und durch $x=6$.

198) Durch $x=a+b$, $x=a-b$ und durch $x=-(a+b)$.

§ 63.

Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe*).

1) Addiere ich 12 zu einer Zahl, die ich im Sinne habe, so erhalte ich 49. Wie heißt die Zahl?

2) Welche Zahl giebt, um 19 vermindert, 17?

3) Ziehe ich von 63 eine gewisse Zahl ab, so ist der Rest 27. Wie groß ist jene Zahl?

4) Welche Zahl giebt, mit 79 multipliziert, zum Produkte 4187?

5) α) Durch welche Zahl muß man 7 [91] dividieren, um 56 [7] zu erhalten? β) In welche Zahl muß man 7 [91] dividieren, um 56 [7] zu erhalten**)?

*) Man löse die folgenden Beispiele sowohl durch Ansatz einer Gleichung, als auch ohne denselben durch bloße Verstandesschlüsse.

**) Die bei mehreren Beispielen vorkommenden eingeklammerten Zahlen gelten für ein zweites Beispiel. In Nr. 5 α) heißt es also: Durch welche Zahl muß man 91 dividieren, um 7 zu erhalten?

6) α) Welche Zahl giebt, durch $2\frac{1}{4}$ dividiert, zum Quotienten $2\frac{2}{3}$? β) Welche Zahl giebt, in $2\frac{1}{4}$ dividiert, zum Quotienten $2\frac{3}{8}$?

7) Von welcher Zahl ist das Neunfache um 2 kleiner, als 74?

8) Das Siebzehnfache einer Zahl beträgt zusammen mit ihrem Sechzehnfachen 2211. Wie heißt die Zahl?

9) Subtrahiere ich das 5fache [$1\frac{3}{7}$fache] einer gedachten Zahl von 42 [68], so erhalte ich 7 [18]. Wie heißt die gedachte Zahl?

10) Addiere ich zum sechsten [elften] Teile einer Zahl 9 [$13\frac{1}{4}$], so erhalte ich 13 [$13\frac{11}{44}$]. Wie heißt die Zahl?

11) Dividiere ich eine gedachte Zahl in 60 [0,357 86] und subtrahiere den Quotienten von 12 [0,246 8], so erhalte ich 7 [0,123 4]. Wie heißt die Zahl?

12) Subtrahiere ich den $m$ten Teil einer gedachten Zahl von a, so erhalte ich b. Wie heißt die gedachte Zahl?

13) Wenn man eine gewisse Zahl mit 12 multipliziert, dann das Produkt um 34 vermehrt und das, was herauskommt, durch 56 dividiert, erhält man zum Quotienten 78. Wie heißt die Zahl?

14) Wenn ich zu 98 [12] das $\frac{5}{7}$fache [$\frac{5}{8}$fache] einer gedachten Zahl addiere, so erhalte ich diese Zahl selbst. Wie heißt die gedachte Zahl?

15) Es soll dasselbe herauskommen, wenn man eine Zahl mit 7 [p] multipliziert, oder wenn man dieselbe um 7 [p] vermehrt. Wie heißt die Zahl?

16) α) Es soll einerlei sein, ob man eine Zahl durch n [3] dividiert, oder ob man n [3] von derselben abzieht. Wie heißt die Zahl? β) Es soll einerlei sein, ob man eine Zahl durch n [3] dividiert, oder ob man diese Zahl von n [3] subtrahiert. Wie heißt diese Zahl?

17) Von welcher Zahl ist das 15fache [12fache] ihrem 8fachen [5fachen] nebst 56 [28] gleich?

18) α) Das $5\frac{3}{4}$fache einer Zahl nebst $7\frac{1}{3}$ ist dem $7\frac{1}{2}$fachen derselben Zahl weniger $1\frac{2}{3}$ gleich. Wie groß ist die Zahl?

β) Wie groß ist die Zahl, deren $m$faches nebst n ihrem $p$fachen nebst q gleich ist?

19) α) Von einer bestimmten Zahl, die ich im Sinne habe, nehme ich die Hälfte, subtrahiere davon 1, subtrahiere vom dritten Teile des Restes wieder 1, vermindere alsdann den vierten Teil des neuen Restes wieder um 1 und erhalte hierdurch 1. Wie heißt die von mir gedachte Zahl?

β) Von einer bestimmten Zahl, die ich im Sinne habe, nehme ich die Hälfte, subtrahiere dieselbe von 1, nehme den dritten

Teil des Restes, subtrahiere denselben von 1, nehme alsdann den vierten Teil des Restes und subtrahiere diesen von 1. Wenn ich nun zuletzt $\frac{11}{16}$ erhalte, wie groß ist die gedachte Zahl?

20) Welche Zahlen geben, voneinander subtrahiert, 12 [30], und zu einander addiert, 30 [124]?

21) α) In beiden Taschen habe ich zusammen 54 Mk; in der linken 6 mehr, als in der rechten. Wieviel habe ich in jeder Tasche? β) In beiden Taschen habe ich zusammen 5 ℳ 18 ₰, in der linken 1 ℳ 24 ₰ mehr, als in der rechten. Wieviel habe ich in jeder Tasche?

22) α) Mitte Winters ist zu St. Petersburg die Nacht 13 Stunden länger, als der Tag. Wieviel Stunden zählt der Tag, wieviel die Nacht? Um wieviel Uhr geht die Sonne auf, um wieviel Uhr unter?

β) Auf Spitzbergen (unter 77° nördlicher Breite) geht eine bestimmte Zeit lang im Winter die Sonne gar nicht auf, ebenso lange geht sie im Laufe des Sommers gar nicht unter. Die Zeit, in welcher Abwechselung von Tag und Nacht innerhalb 24 Stunden stattfindet, beträgt $1\frac{1}{2}$ Monat mehr, als die Zeit der andauernden Nacht. Wieviel Monate beträgt hiernach die anhaltende Nacht?

23) In einer Schule von 4 Klassen und 123 Schülern befinden sich in der zweiten Klasse 4 [5] Schüler mehr, als in der ersten, in der dritten 8 [6] Schüler mehr, als in der zweiten, in der vierten 3 Schüler mehr [4 Schüler weniger], als in der dritten. Wieviel Schüler befinden sich in jeder Klasse?

24) In einem Garten befinden sich Apfelbäume, Birnbäume und Kirschbäume, Johannisbeersträuche und Stachelbeersträuche, im ganzen 51 Stück. Der Bäume sind 5 mehr, als der Sträuche; der Kirschbäume 3 weniger, als der Apfelbäume, und 2 mehr, als der Birnbäume; der Johannisbeersträuche 7 weniger, als der Stachelbeersträuche. Wieviel von jeder Sorte *)?

25) Ein Pfosten steht mit $\frac{1}{4}$ seiner ganzen Länge in der Erde, mit $\frac{1}{3}$ seiner Länge im Wasser und ragt $2\frac{1}{2}$ *m* über das Wasser hervor. Welche Länge hat der Pfosten?

26) α) Jemand zahlt für eine Schuld von 600 ℳ 36 Zwanzigfrancstücke und 16 ℳ 80 ₰. Wie hoch wurde das Zwanzigfrancstück gerechnet?

β) Wenn $3\frac{3}{16}$ alte preußische Fuß und 7 *m* zusammen $25\frac{1}{2}$ preußische Fuß ausmachen, in welchem Verhältnisse steht der preußische Fuß zu dem Meter?

---

*) Man bestimme zuerst durch eine Gleichung die Anzahl der Bäume und Sträuche und aus diesen die Anzahl der Kirschbäume u. s. w.

27) Zwei rechtwinklige Gärten haben gleichen Inhalt. Der eine hat zur Länge 143 *m* bei einer Breite von 323 *m*; der zweite hat zur Länge 247 *m*. Wie breit ist der letztere?

28) Die atmosphärische Luft besteht aus zwei miteinander gemengten Luftarten, aus 21 Raumteilen Sauerstoffluft und 79 Raumteilen Stickstoffluft. Wieviel von jeder Luftart ist in einem Zimmer enthalten, welches 3,77 *m* breit, 4,39 *m* lang und 2,35 *m* hoch ist?

29) Zinnober hat zwei Bestandteile: Schwefel und Quecksilber, und zwar kommen auf 7 Gewichtsteile Schwefel 44 Gewichtsteile Quecksilber. Wieviel Quecksilber erhält man durch chemische Trennung aus $178\frac{1}{2}$ *g* Zinnober?

30) Eine Festung hat eine Garnison von 3520 Mann; darunter sind dreimal soviel Artilleristen, als Kavalleristen, und viermal soviel Infanteristen, als Artilleristen. Wieviel Mann von jeder Truppengattung befinden sich darin?

31) Man teilt die Erdoberfläche in 5 Zonen: eine heiße, zwei gemäßigte und zwei kalte; jede gemäßigte enthält $\frac{15}{23}$ der heißen, jede kalte $\frac{7}{44}$ einer gemäßigten. Wie groß ist der Flächen-Inhalt jeder Zone, wenn jener der ganzen Erde zu 9 261 238 Quadratmeilen gerechnet wird?

32) Ich habe drei Fässer, zwei kleine und ein großes. Von den beiden kleinen hält das erste nur $\frac{3}{16}$, das zweite nur $\frac{5}{24}$ des dritten, großen. Fülle ich von dem Inhalte des vollen zweiten Fasses das leere erste, so bleiben mir in jenem noch 10 *l* übrig. Wieviel Liter enthält jedes der drei Fässer?

33) α) In der rechten Tasche habe ich 6 *M* mehr, als in der linken. Bringe ich aus der rechten soviel in die linke, als in der letzteren ist, hierauf aus der linken in die rechte soviel, als jetzt in dieser ist, und zuletzt wieder aus der rechten in die linke soviel, als nun in der letzteren ist, so habe ich in beiden Taschen gleichviel. Wieviel hatte ich anfangs in jeder der beiden Taschen? β) In meiner rechten Tasche befindet sich eine gewisse Anzahl Kreuzer mehr, als in der linken. Nach fünfmaliger, in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen, abwechselnd vorgenommenen Operation befindet sich in jeder der beiden Taschen gleichviel, nämlich 64 *Nkr*. Wieviel Kreuzer befanden sich zu Anfang in jeder der beiden Taschen?

34) α) Wie groß ist ein Kapital, welches zu $4\frac{3}{4}$ pCt. am Ende eines Jahres mit den Zinsen 1923 *M* 21 *ℌ* beträgt?

β) Wenn der Holzbestand eines Forstes während 17 Jahren jährlich um $1\frac{3}{4}$ pCt. seines anfänglichen Bestandes zugenommen hat

10*

und am Schlusse dieses Zeitraumes 16 608 *cbm* betrug, wieviel Kubikmeter würde der Forst vor 17 Jahren geliefert haben?

35) Ein Kaufmann verkauft Ware für 1472 *Frc* 58 *Cent* mit 19 pCt. Schaden. Wieviel hatte ihm die Ware gekostet?

36) Ein Liter Wein wurde zu 1 *M* 10 *ℌ* mit einem Nutzen von $37\frac{1}{2}$ pCt. verkauft. Wieviel kostete ein Hektoliter?

37) Ein Fabrikant verkauft Waren für eine bestimmte Summe mit 8 pCt. Rabatt in Hundert*) und erhält als bare Zahlung 8050 *M*. Wie hoch standen die Waren?

38) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 8 und 8050 die allgemeinen Zeichen p und k gesetzt werden?

39) Ich hatte für jemanden $5206\frac{1}{4}$ *M* eingenommen, die ich ihm mit der Post senden sollte. Das Postgeld, welches $\frac{1}{8}$ pCt. betrug, bezahlte ich am Orte der Absendung und brachte ihm dasselbe in Abrechnung. Wieviel mußte ich ihm nun schicken?

40) Ein Kaufmann erhält Ware für die bare Zahlung von 880 *Fl* mit $8\frac{3}{4}$ pCt. Rabatt auf Hundert**). Wieviel hätte er ohne bewilligten Rabatt bezahlen müssen?

41) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für $8\frac{3}{4}$ und 880 die allgemeinen Zahlzeichen p und k gesetzt werden?

42) Wie groß ist ein Kapital, welches zu p pCt. nach n Jahren mit den Zinsen k *M* macht?

43) Es verleiht jemand ein Kapital von 5200 *M* auf $5\frac{1}{4}$ Jahre und erhält an Zinsen und Kapital $6415\frac{1}{2}$ *M* zurück. Zu wieviel Prozent hat er das Kapital ausgeliehen?

44) Die rückständigen Zinsen von 6024 *Frc* Kapital zu $3\frac{1}{2}$ pCt. machen mit dem Kapital 7658 *Frc* 1 *Cent*. Wie lange sind keine Zinsen gezahlt worden?

45) Jemand zahlt für eine gewisse Summe, die er nach einem Jahre zu zahlen schuldig ist, sogleich $1538\frac{1}{4}$ *Fl* mit $9\frac{1}{4}$ pCt. Diskonto***). Wieviel war er zu zahlen schuldig?

46) Für einen Wechsel wird 54 Tage vor der Verfallzeit mit 9 pCt. Diskonto die Summe von 1775 *M* 70 *ℌ* bezahlt. Auf welche Summe lautete der Wechsel?

---

*) S. Beispiel 9 in § 33a.

**) S. Beispiel 10 in § 33a.

***) Wenn ein Schuldner eine Schuld vor der Verfallzeit abträgt, so wird bei Geschäftsleuten für diese frühere Zahlung ein Abzug von der Zahlungssumme gestattet, den man Diskonto nennt. Der Diskonto wird in Prozenten angegeben und bezieht sich auf ein Jahr. Der Monat wird hierbei zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen berechnet.

47) Für eine Summe, die man nach n Jahren zu zahlen schuldig ist, zahlt man jetzt mit p pCt. Diskonto s ℳ. Wie hoch beläuft sich die Schuld?

48) Ein Kapital ist zu $6\frac{1}{4}$ pCt. jährlichen Zinsen ausgeliehen. In wieviel Jahren werden die Zinsen zusammen das $1\frac{5}{8}$fache des Kapitals ausmachen?

49) Zu wieviel Prozent ist ein Kapital ausgeliehen, wenn dessen 19jährige Zinsen zusammengenommen so groß sind, als das $1\frac{3}{16}$fache des Kapitals?

50) Ein Kaufmann assekuriert Ware für 14 100 ℳ, die er über See kommen läßt, und zahlt als Prämie 6 pCt. Damit er aber im Falle, daß die Ware verunglückt, nicht allein seine Ware, sondern auch die im voraus bezahlte Prämie zurück erhalte, giebt er, seiner Meinung nach mit Recht, den Wert der Ware höher an. Welche Prämie wird er zahlen müssen?

51) Ein Landwirt hat eine Herde Gänse und eine Herde Schafe, im ganzen 432 Stück. Da er sich mit der Gänsezucht nicht weiter befassen will, so tauscht er sämtliche Gänse gegen Schafe um und erhält für je 32 der ersteren 3 der letzteren. Hierdurch sieht er sich im Besitze von 200 Schafen. Wieviel Gänse hat er umgetauscht*)?

52) Von drei Brüdern hat der zweite im Vermögen ebensoviel Mark, der dritte aber nur ebensoviel Pfennige, wie der älteste Zwanzigmarkstücke. Zusammen haben sie 2332,11 ℳ. Wieviel hat jeder von ihnen?

53) Ich habe zusammen 310,46 ℳ in viererlei Geldsorten bei mir, in Gold, Silber, Nickel und Kupfer, nämlich $1\frac{1}{4}$mal soviel Zwanzigmarkstücke als Einmarkstücke, $2\frac{1}{2}$mal soviel Einmarkstücke als Zehnpfennigstücke, und $1\frac{1}{3}$mal soviel Zehnpfennigstücke als Zweipfennigstücke. Wieviel habe ich von jeder Sorte?

54) Eine Summe von 9728 ℳ soll unter drei Brüder, A, B und C, nach dem Verhältnisse ihres Alters geteilt werden. Nun ist A 36, B 24 und C 16 Jahre alt. Wieviel erhält jeder derselben?

55) Eine Waldfläche von 1911 ha ist mit Eichen, Buchen und Kiefern bepflanzt. Wenn nun die Fläche der Kiefern 104 ha mehr, als $\frac{7}{15}$ jener der Buchen beträgt, und der Eichenwald 90 ha mehr enthält, als $\frac{3}{4}$ der Fläche des Buchenwaldes, wieviel Hektaren kommen auf jede der genannten Baumarten?

---

*) Man versuche dieses Beispiel auch ohne Ansatz zu lösen. Durch die Umtauschung von Gänsen verliert der Landwirt 232 Stück (= 432 — 200). Bei jedesmaligem Umtausche von 32 Gänsen verliert er 29 Stück u. s. w.

56) Wie groß ist das Kapital, dessen achtjährige Zinsen zusammengenommen 1914 ℳ betragen, wenn dasselbe im ersten Jahre $3\frac{1}{4}$ pCt., in jedem folgenden aber $\frac{1}{4}$ pCt. mehr, als in dem vorhergehenden, einbringt?

57) Ein Kapitalist hat $\frac{3}{8}$ seines Geldes auf Eisenbahn-Aktien, $\frac{1}{4}$ desselben auf Ländereien und den Rest auf Bergwerks-Aktien verwendet. Durch die ersten erhält er einen jährlichen Gewinn von 13 pCt., durch die Ländereien einen Gewinn von 9 pCt., dagegen muß er zu den Bergwerken eine jährliche Zubuße von 3 pCt. geben. Wenn ihm nun im ganzen aus seinem Gelde ein jährlicher Gewinn von 2664 ℳ erwächst, wie groß ist sein Kapital?

58) Ein Kapital von 4800 ℳ ist nach einer gewissen Reihe von Jahren auf 6972 ℳ angewachsen. $\frac{1}{3}$ der Zeit stand es zu $3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ der Zeit zu $3\frac{3}{4}$, die übrige Zeit zu 4 pCt. Wie lange stand das Kapital?

59) Zwei Haushaltungen lassen sich zusammen 200 kg Zucker kommen, wovon die erste 113 kg, die andere den Rest nimmt. Wenn nun die erste wöchentlich $3\frac{1}{4}$, die andere $2\frac{1}{6}$ kg gebraucht, nach wieviel Wochen wird der Vorrat in beiden Haushaltungen gleich sein?

60) Jemand kommt in eine ansehnliche Gesellschaft und bittet um einen Beitrag zur Wiederaufbauung seines abgebrannten Hauses. Jedes Mitglied dieser Gesellschaft giebt ihm 15 Fl, worüber der Abgebrannte eine so große Freude hat, daß er ausruft: „Ach, wenn es in unserer Stadt soviel solcher Gesellschaften gäbe, wie hier Personen sind, und ich von jedem Mitgliede ebensoviel erhielte, wie ich jetzt erhalten habe, so könnte ich davon mein ganzes Haus wieder aufbauen, welches 3mal soviel Hunderte gekostet hat, als hier Personen versammelt sind!“ Wieviel hat also das Haus gekostet?

61) „Trefflichster Künd'ger der Zeit, welch' Teil ist des Tages*) verlaufen?“
„„Zweimal soviel, als ist des Verlauf's zwei Drittel, erübrigt.““

62) Einst sprach Kypris zu Eros, der niedergeschlagen daher kam:
Was für ein Kummer beschwert Dich, o Sohn? Er entgegnete also:
Hierher stürzend und dort, wegschleppten die Musen die Äpfel,
Raffend sie mir aus dem Schoß; sie holt' ich vom Helikon eben.
Kleio das Fünftel mir nahm; Euterpe das Zwölftel der Äpfel;

*) Der Tag wurde bei den Alten, er mochte kurz oder lang sein, in 12 Stunden geteilt.

Aber das Achtel Thaleia, die hehre; das Zwanzigstel dann noch
Packte Melpomene auf; Terpsichore stahl mir das Viertel;
Doch ein Siebentel drauf griff Erato sich zu dem Anteil;
Aber Polymnia auch hat Äpfel mir dreißig geraubet;
Hundert und zwanzig erhaschte Urania; mächtig belastet
Schlich sich Kalliope fort mit dreimal hundert der Äpfel.
Heim nun komm ich zu Dir, schau her! mit leichteren Händen:
Ließen die Göttinnen doch bloß fünfzig der Äpfel mir übrig.

63) Ein Müßiggänger hat vom Beginn seines 19. Jahres bis zu seinem Lebensende $\frac{3}{8}$ der Zeit verschlafen, $\frac{1}{16}$ mit Essen und Trinken zugebracht, $\frac{1}{4}$ mit Spazierengehen vertrieben, $\frac{3}{16}$ mit Spielen verdorben, $\frac{1}{16}$ im Lehnstuhle vergähnt und im ganzen nur zwei Jahre sich der Arbeit gewidmet. Wie alt ist dieser Mensch geworden?

64) Edler Pythagoras, du Helikonischer Sprößling der Musen,
Sage mir Fragendem an, wieviel auf der Wissenschaft Ringplatz
Jünger dir weilen im Haus, ganz eifrig erstrebend den Kampfpreis.
Ich will sagen es dir, o Polykrates. Siehe! die Hälfte
Treibet die treffliche Mathematik; dagegen das Viertel
Mühet sich um die Natur, die unsterbliche; aber das Siebtel
Gänzliches Schweigen befolgt, im Herzen die Lehre bewahrend;
Zähl' drei Frauen hinzu, aus denen Theano hervorragt:
Soviel leite zu Priestern ich an der Pierischen Musen.

65) Hier das Grabmal deckt Diophantos — ein Wunder zu schauen —:
Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu bleiben verlieh ein Sechstel des Lebens ein Gott ihm;
Fügend das Zwölftel hinzu, ließ er ihm sprossen die Wang';
Steckte ihm drauf auch an in dem Siebtel die Fackel der Hochzeit.
Und fünf Jahre nachher teil't er ein Söhnlein ihm zu.
Weh! unglückliches Kind, so geliebt! Halb hatt' es des Vaters
Alter erreicht, da nahm's Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen besänft'gend,
Langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an.

66) In einem alten ägyptischen Rechenbuche, geschrieben von Ahmesu um 1700 v. Chr. (Papyrus Rhind des British Museum) kommt folgende Aufgabe vor: „Siehe da kommt der Rinderhirte mit 70 Ochsen. Vom Rechner wird der Hirte gefragt: Wieviel bringst du von deinem zahlreichen Vieh? Der Hirte antwortet: Ich führe $\frac{2}{3}$ vom Drittel von meinem Hornvieh; berechne mir also die ganze Anzahl des Bestandes."

67) *α*) Eine Bäuerin bringt eine gewisse Anzahl Eier zu Markte. Zuerst verkaufte sie die Hälfte [zwei Drittel] aller Eier und noch ein halbes [ein drittel] dazu, ohne eines zu zerbrechen; hierauf die Hälfte [zwei Drittel] des Restes und abermals ein halbes [ein drittel] Ei dazu; ebenso zum dritten, vierten und fünften Male. Zuletzt bleibt ihr ein Ei übrig. Wieviel Eier bot sie zum Verkaufe aus?

β) Ein Knabe legte eine gewisse Menge Nüsse, die er sorgfältig abzählte, in eine Schachtel. Ein anderer nimmt heimlich die Hälfte der Nüsse und noch 10 Stück und bald darauf abermals die Hälfte des Restes und noch 4 Stück dazu. Später aber reut ihn sein Vergehen, und er beschließt, den Fehler wieder gut zu machen. Er legt erst 10 Stück zu und verdoppelt darauf die Anzahl der vorhandenen Nüsse, setzt alsdann 4 Stück hinzu und verdoppelt wieder die Anzahl. Der rechtmäßige Besitzer der Nüsse, der einige Zeit nachher seine Nüsse nachzählt, findet 108 Nüsse und ist erstaunt, einige Nüsse mehr in der Schachtel zu finden, als er hineingelegt hatte. Wieviel hatte er hineingelegt?

68) Ein Spieler verlor zuerst $\frac{1}{6}$ [$\frac{1}{10}$] seines Geldes, alsdann 247 *M* [89 Fl] und sah sich hierauf im Besitze von soviel Pfennigen [Neukreuzern], als er zu Anfange des Spieles Mark [Gulden] bei sich hatte. Wieviel Geld hatte derselbe, als er zu spielen anfing?

69) Der Neubau eines Wohnhauses ist zu einer gewissen Summe veranschlagt. Die Erdarbeit kostet $\frac{1}{128}$, die Maurerarbeit $\frac{1}{8}$ der ganzen Summe. Die Werksteine nebst der Steinmetzarbeit kosten $\frac{2}{3}$ der Maurerarbeit; die Dachdeckerarbeit kostet 39 *M* mehr, als die Erdarbeit. Die Zimmerarbeit beträgt $\frac{1}{30}$ des ganzen Kosten-Anschlags, die Tischlerarbeit $\frac{1}{6}$ der ganzen Summe weniger 96 *M*; die Schlosserarbeit $\frac{3}{8}$ der Tischlerarbeit nebst 150 *M*; die Glaser-, Anstreicher- und Klempnerarbeit zusammen soviel, als die Zimmerarbeit; das Material des Maurers, Dachdeckers und Zimmermanns $\frac{1}{3}$ der Summe; der Transport der verschiedenen Materialien $\frac{1}{8}$ der ganzen Summe nebst 108 *M*. Für unvorhergesehene Fälle endlich sind 150 *M* bestimmt. Wieviel beträgt die ganze Summe, zu der das Haus veranschlagt ist?

70) Das Anlage-Kapital eines Geschäftes, welches jährlich 50 pCt. reinen Gewinn abwirft, hat sich, obgleich zu Ende eines jeden Jahres 2685 Frc herausgenommen werden, nach 5 Jahren verdoppelt. Welche Summe wurde zu dem Geschäfte verwandt?

71) Ich kenne eine sechszifferige Zahl, deren letzte Ziffer linker Hand 1 [4] ist. Bringe ich diese Ziffer an die erste Stelle rechter Hand, so erhalte ich das Dreifache [$\frac{2}{3}$fache] der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?

72) Es giebt eine sechszifferige Zahl von der Eigenschaft, daß, wenn man die erste Ziffer rechter Hand, welche eine 2 ist, links an die letzte Stelle setzt, eine Zahl entsteht, welche nur ein Drittel der ersten Zahl beträgt. Wie heißt die Zahl?

73) Von welcher Zahl ist der zehnte [siebente] Teil um 13 größer [2 kleiner], als der siebzehnte [zehnte] Teil der um 18 verminderten [29 vermehrten] Zahl?

74) Multipliziere ich eine Zahl, welche ich im Sinne habe, mit $7\frac{8}{9}$, subtrahiere das Produkt von $4\frac{5}{6}$ und dividiere, was herauskommt, in $1\frac{2}{3}$, so erhalte ich $1\frac{7}{8}$. Wie heißt die Zahl?

75) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß $\frac{1}{4}$ zum Vorscheine kommt, wenn ich sie zu $\frac{1}{4}$ addiere, das, was herauskommt, in $\frac{1}{4}$ dividiere und von dem Quotienten $\frac{1}{4}$ abziehe?

76) Vermindere ich 3751 um das $38\frac{1}{2}$fache einer gewissen um 55 verminderten Zahl, so erhalte ich das 33fache der um 11 vermehrten Zahl. Wie heißt die Zahl?

77) Man versuche die Jahreszahl der Erbauung einer weltbekannten Stadt aus folgenden Angaben zu bestimmen: subtrahiere ich die Hälfte der Zahl von 468, ziehe hierauf den Rest von 135 ab und dividiere zuletzt das übrigbleibende in 79, so erhalte ich $1\frac{35}{44}$.

78) Multipliziere ich die Zahl meiner Jahre mit $\frac{2}{3}$, addiere hierzu $\frac{1}{3}$, dividiere, was herauskommt, in $\frac{13}{8}$ und subtrahiere den Quotienten von $\frac{7}{24}$, so erhalte ich $\frac{1}{4}$. Welches ist mein Alter?

79) An der Aufführung eines Gebäudes waren 2 Meister, 19 Gesellen und 12 Handlanger beschäftigt und erhielten täglich zusammen $111\frac{1}{4}$ *M*. Jeder Meister erhielt $1\frac{1}{4}$ *M* mehr, als jeder Gesell; jeder der letzteren $1\frac{1}{4}$ *M* mehr, als jeder Handlanger. Wie groß war der Lohn eines Meisters?

80) Ein Landwirt sah sich genötigt, 60 Ochsen wegen Mangels an Futter zu verkaufen; der Vorrat reichte nämlich, statt für 20 Wochen, nur für 14 Wochen hin. Wieviel Stück Ochsen besaß der Landwirt?

81) Eine Magd erhielt jährlich 120 [a] *M* und ein Kleid zum Lohne. Nach $7\frac{1}{2}$ [m] Monaten verließ dieselbe ihren Dienst und empfing, weil sie das Kleid schon zuvor erhalten hatte, nur $70\frac{1}{2}$ [b] *M* Lohn. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?

82) Eine Frau wollte aus einer Quantität Flachs ein Stückchen Leinwand spinnen lassen. Ihre erste Magd erklärte, daß sie in 36 Tagen damit fertig werden wollte; die zweite hingegen gebrauchte 48 dazu. Da sie aber schnell damit fertig sein mußte, so begab sie sich selbst mit den beiden Mägden daran und spann täglich noch $\frac{1}{18}$ *kg* mehr, als die zweite Magd, wodurch sie zusammen in 8 Tagen fertig wurden. Wieviel Flachs war es?

83) Ein Bauer bringt Eier zu Markte und bietet 25 Stück für 1,50 ℳ aus. Ein Vorübergehender zerbricht ihm aus Ungeschicklichkeit 15 Eier. Als der Bauer Ersatz erhalten hatte, beschließt er, von den noch übrigen Eiern je 22 für 1,50 ℳ zu verkaufen, weil er auf diese Weise für die noch übrigen ebensoviel einnehmen würde, als er vorher aus seiner ganzen Anzahl gelöset hätte. Wieviel Eier brachte der Bauer zu Markte?

84) Ein Ökonom hat eine gewisse Anzahl Hektaren Wiesenland und befindet sich nach Vertauschung von $\frac{1}{4}$ derselben gegen Weinberge, von $\frac{1}{5}$ derselben gegen Waldungen, von $\frac{1}{6}$ derselben gegen Ackerland im Besitze von 574 *ha* Land im ganzen. Wenn nun 5 *ha* Wiesen denselben Wert, wie 3 *ha* Weinberge, 6 *ha* Weinberge denselben Wert, wie 25 *ha* Wald, und 5 *ha* Wald denselben Wert, wie 4 *ha* Ackerland haben, wieviel Wiesenland besaß der Ökonom vor der Vertauschung?

85) Eine Griechin ging in den Tempel Jupiters und bat, er möge das Geld, welches sie bei sich trug, verdoppeln. Er that es, und sie opferte zum Danke zwei Drachmen. Mit dem Übrigen ging sie in den Tempel Apollo's, bat um das Nämliche und erhielt es auch, weshalb sie wieder zwei Drachmen opferte. Nun zählte sie ihr Geld und hatte gerade doppelt soviel, als anfangs. Wieviel Geld hatte sie bei sich?

86) Eine Waldfläche von 7406 *ha* soll unter drei Gemeinden, A, B und C, nach Maßgabe ihrer Bevölkerung, verteilt werden, und außerdem soll A durch besondere Begünstigung $\frac{1}{20}$ des Anteils der beiden Gemeinden B und C zusammen erhalten. Wenn nun die Bevölkerung der Gemeinden A und B sich wie 7 : 11, und die der Gemeinden B und C sich wie 5 : 8 verhalten, wieviel bekommt jede der drei Gemeinden an Waldfläche?

87) Von der Spitze eines 412 *m* hohen Berges steigt ein Luftball bis zu einer gewissen Höhe über der Spitze, fällt alsdann um $\frac{1}{4}$ derselben und steigt hierauf wieder um $\frac{1}{10}$ der zuletzt erreichten Höhe. Nachdem derselbe um $\frac{19}{20}$ der zum ersten Male erlangten Höhe sich gesenkt, kommt er am Fuße des Berges an. Bis zu welcher Höhe, von der Spitze des Berges an gerechnet, stieg der Luftball?

88) Ein Spieler verliert bei dem ersten Spiele $\frac{7}{10}$ seiner mitgebrachten Barschaft, gewinnt hierauf $\frac{1}{9}$ dessen, was ihm übrigbleibt, verliert alsdann wieder $\frac{7}{12}$ seiner vergrößerten Summe, gewinnt hierauf $\frac{1}{5}$ seines Restes und hört, nachdem er $\frac{1}{3}$ seiner letzten Summe verloren, endlich auf zu spielen, indem er sich nun im Besitze von nur 9 ℳ sieht. Wieviel besaß er vor dem Spiele?

89) Ein Schiff, welches von einem Orte A nach einem westlich gelegenen Orte B segelte, wurde bei einer Entfernung von nur 4 Meilen von dem Orte seiner Bestimmung durch widrigen Wind um den 19ten Teil des abgemachten Weges zurückgeworfen. Hierauf segelte dasselbe um den 24sten Teil der zuletzt erlangten Entfernung vom Orte A wieder nach Westen und wurde alsdann nochmals um den 20sten Teil des hierauf erreichten Abstandes von A zurückgetrieben. Nachdem dasselbe nun noch den 9ten Teil der zuletzt erlangten Entfernung abgemacht, lief es in den lang ersehnten Hafen ein. Wie weit ist der Ort A von B entfernt, und wieviel Meilen legte das Schiff im ganzen zurück?

90) Wie weit ist A von B entfernt, wenn statt der Zahlen 4, 19, 24, 20 und 9 des vorhergehenden Beispieles die allgemeinen Zeichen n, a, b, c und d gesetzt werden?

91) Aus einem Wasserbehälter, der bis zu einer gewissen Höhe gefüllt ist, werden durch eine Röhre $\frac{5}{12}$ des Inhaltes und 40 *l* ausgelassen, alsdann 20 *l* weniger, als $\frac{4}{13}$ des nunmehrigen Inhalts, hinzugesetzt, und zuletzt 20 *l* weniger, als $\frac{7}{11}$ des Restes, herausgenommen. Wenn nun der Wasserbehälter 700 *l* weniger als zu Anfang enthält, mit wieviel Liter war derselbe angefüllt?

92) Eine Summe von 17 000 *Frc* soll unter fünf Personen, A, B, C, D und E, wie folgt, verteilt werden: B soll $1\frac{1}{4}$mal soviel, als A, weniger 300 *Frc* haben; C $\frac{1}{4}$ von dem, was A und B zusammen bekommen, nebst 113 *Frc*; D das $\frac{4}{5}$fache dessen, was A und C zusammen erhalten, weniger $\frac{3}{8}$ des Anteils von B; E endlich $\frac{1}{8}$ des Anteils der vier ersten nebst 627 *Frc*. Wieviel erhält jede Person?

93) In dem ersten zweier aneinander stoßenden Zimmer befinden sich 4mal soviel Personen, als in dem zweiten; gehen aber aus dem ersten 13 in das zweite, so sind in diesem $1\frac{1}{4}$mal soviel, als in jenem. Wieviel Personen befanden sich anfangs in dem ersten Zimmer?

94) In meiner rechten Tasche sind soviel Mark, als in der linken Pfennige. Bringe ich aber aus der rechten in die linke 6 *M* 93 *Pf*, so kehrt sich das Verhältnis um: ich habe in der linken Tasche soviel Mark, wie in der rechten Pfennige. Wieviel Geld habe ich in der rechten Tasche?

95) A hat so viele Goldstücke à 20 *M* als B Silberstücke à 1 *M* und als C Silberstücke à $\frac{1}{5}$ *M* (20 *Pf*). Geben A sowohl als C an B jeder 48 Stück ab, so hat B an barem Gelde soviel als A und C zusammengenommen. Wieviel Stück besitzt jeder?

96) Sechs kleine Ortschaften: A, B, C, D, E und F, welche hintereinander an einer Landstraße liegen, und zwar A von B

3, B von C $2\frac{1}{2}$, C von D 5, D von E 2 und E von F 1 *km*, lassen gemeinschaftlich ein Schulhaus bauen, und zwar soll dasselbe zwischen C und D so errichtet werden, daß die Summe der Entfernungen desselben von den drei Ortschaften A, B und C so groß werde, als die Summe der Entfernungen von den drei Ortschaften D, E und F. In welchem Abstande von C muß das Schulgebäude aufgeführt werden?

97) Ein Vater ist 30, sein Sohn 2 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater 8mal, nach wieviel Jahren 5mal so alt sein, als der Sohn? Vor wieviel Jahren war der Vater 57mal so alt, als der Sohn?

98) A ist jetzt m, B n Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird A $q$mal so alt sein, als B, oder vor wieviel Jahren war A $q$mal so alt, als B? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

99) Eine Mutter ist jetzt 6mal so alt, als ihre Tochter, und wird über 5 Jahre $3\frac{1}{2}$mal so alt sein, als dieselbe. Wie alt ist jetzt die Mutter?

100) A ist jetzt n mal so alt und wird über m Jahre p mal so alt sein, als B. Wie alt ist A? Welche Beziehung muß zwischen den Größen m, n und p stattfinden, wenn die Auflösung der Aufgabe einen Sinn haben soll?

101) Seit 50 Jahren, sagt ein alter Beamter, habe ich mir jährlich 600 *M* erspart; ebensoviel ersparte jährlich jeder meiner vier Söhne, und zwar der älteste seit 27, der zweite seit 24, der dritte seit 19 und der vierte seit 16 Jahren. Vor wieviel Jahren betrug das Ersparnis des Vaters im ganzen soviel, als das seiner vier Söhne zusammengenommen?

102) Nach wieviel Jahren wird, wenn alles wie in der vorhergehenden Aufgabe bleibt, das Ersparnis des Vaters die Hälfte dessen betragen, was seine Söhne zusammen zurückgelegt haben werden?

103) Aus vier hintereinander auf einer Landstraße liegenden Ortschaften A, B, C und D, reisen vier Personen mit dem Eilwagen nach demselben Orte E. A ist von B 19 *km*, B von C 3 *km* und C von D 5 *km* entfernt. Beim Nachrechnen findet sich, daß die in A eingestiegene Person an Postgeld soviel bezahlt hat, als die übrigen drei zusammengenommen. Wie läßt sich hieraus die Entfernung des Ortes D von E berechnen?

104) Durch fünf hintereinander liegende Städte, A, B, C, D und E, geht eine gerade Straße, und zwar ist A von B 37, B von D 34 und D von E 14 *km* entfernt. Ein Kaufmann in der zwischen B und D liegenden Stadt C läßt sich durch einen

Fuhrmann von A 400 *kg*, von B 300 *kg* kommen. Durch einen zweiten Fuhrmann, der für denselben Preis fährt, wie der erste, läßt er von D 550 *kg* und von E 450 *kg* Ware kommen und bezahlt diesem im ganzen an Fracht ebensoviel, als jenem. Wie läßt sich hieraus die Entfernung der Stadt B von C berechnen?

105) Eine Frau brachte ihr gesponnenes Garn zum Weber, um sich daraus Leinwand machen zu lassen. Der Weber sagte zu ihr: „Wollt ihr 10 Meter mehr haben, als 100, so müßt ihr mir noch 9 Stränge bringen. Wollt ihr aber 10 Meter weniger haben, als 100, so kann ich euch gleich 9 Stränge wieder zurückgeben." Wieviel Stränge waren es demnach?

106) Ein Kaufmann hat eine bestimmte Menge Waren. Verkauft er das Kilogramm zu 1,54 *M* (77 *Nkr*), so hat er im ganzen 18 *M* (9 *Fl*) Nutzen. Verkauft er aber das Kilogramm zu 1,12 *M* (56 *Nkr*), so hat er im ganzen 24 *M* (12 *Fl*) Schaden. Wieviel Ware besitzt der Kaufmann und welches ist der Einkaufspreis?

107) Fließen in einen leeren Behälter alle 3 Minuten 20 *l* Wasser, so werden nach einer gewissen Zeit noch 40 *l* an der vollständigen Füllung fehlen. Fließen aber in denselben alle 5 Minuten 52 *l*, so werden nach derselben Zeit 72 *l* Wasser übergelaufen sein. Wieviel Liter Wasser faßt der Behälter, und wieviel Liter müssen jede Minute demselben zufließen, wenn er nach derselben Zeit bis an den Rand gefüllt sein soll?

108) Ein Maurer würde, wenn er täglich 10 Stunden arbeitete, wöchentlich ebensoviel über 37 *cbm* Mauer aufführen, als er jetzt bei $8\frac{1}{2}$ Stunden täglicher Arbeit unter 37 *cbm* liefert. Wieviel Kubikmeter Mauer führt er wöchentlich auf?

109) Nach einer gewissen Zeit habe ich 670 *Frc* zu bezahlen und $4\frac{1}{2}$ Monat später 980 *Frc*. Ich zahle sogleich für beide Summen mit einem Diskonto von $4\frac{1}{2}$ pCt. in Hundert 1594 *Frc* 41 *Cent*. Nach wieviel Monaten habe ich die erste Summe zu bezahlen?

110) Wieviel Prozent Rabatt auf Hundert sind *n* Prozent Rabatt in Hundert*)?

111) Wieviel Prozent Rabatt in Hundert sind *n* Prozent Rabatt auf Hundert*)?

112) Ein Kaufmann erhielt ein Faß Öl und ein Faß Reis, beide von gleichem Brutto-Gewichte. Das Netto-Gewicht der ersten Ware betrug bei einem gewissen Prozente Tara, vom Brutto-Gewichte berechnet, 268 *kg*; bei $6\frac{2}{3}$ Prozent Tara weniger betrug

*) S. § 33a. Beispiel 9 und 10

das Netto-Gewicht der zweiten Ware 290 *kg*. Zu wieviel Prozent wurde bei dem Fasse Öl die Tara gerechnet?

113) Ich habe zwei gleiche Summen zu bezahlen, die eine nach 9, die andere nach 15 Monaten. Bezahle ich dieselben auf der Stelle, mit einem für beide Summen gleichen Diskonto, so muß ich für die erste Summe 1208, für die zweite 1160 *M* bezahlen. Wie groß ist jede der beiden Summen, und zu wieviel Prozent in Hundert wird der Diskonto berechnet?

114) Wie heißen die Resultate der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 9 und 15 Monate m und n Jahre, für 1208 und 1160 die allgemeinen Zeichen s und s' gesetzt werden?

115) Ein Kaufmann gewinnt 8 pCt., wenn er einen Hektoliter Öl zu 117 *M* verkauft. Wieviel pCt. gewinnt oder verliert er, wenn er den Hektoliter zu 104 *M* verkauft?

116) Wenn der Preis der Ware p ist, gewinnt man n pCt. Wieviel pCt. gewinnt oder verliert man, wenn der Preis der Ware p' ist?

117) α) Ein Kaufmann verliert $2\frac{1}{2}$ pCt., wenn er einen Ballen Kaffee zu 117 *M* verkauft. Wieviel pCt. gewinnt oder verliert er, wenn er den Ballen Kaffee zu $124\frac{1}{2}$ *M* verkauft? β) Jemand verliert n pCt., wenn der Preis der Ware p ist. Wieviel pCt. gewinnt oder verliert er, wenn der Preis der Ware p' ist?

118) Ein Antrag, über welchen 600 Personen abgestimmt hatten, war durchgefallen. Als dieselben Personen über den nämlichen Antrag zum zweiten Male abgestimmt hatten, ging er mit zweimal soviel Stimmen durch, als durch welche er zuvor gefallen war, und die jetzige Majorität verhielt sich zu der früheren, wie 8 : 7. Wie viele hatten ihre Meinung geändert?

119) Das sächsische Haus lieferte zur Zeit fünf deutsche Kaiser hintereinander: Heinrich I., Otto I., Otto II., Otto III. und Heinrich II. Von diesen regierte Heinrich I. 7 Jahre länger, als Otto II., Otto I. regierte doppelt solange, als Otto II., und dazu noch solange, als Heinrich I. Hätte Otto I. noch ein Jahr länger regiert, so hätte er doppelt solange, als Otto III., regiert. Heinrich II. endlich regierte 3 Jahre länger, als sein Vorgänger, und starb im Jahre 2^{10} nach Christus. Die sämtlichen fünf Kaiser aus dem sächsischen Hause regierten eine Anzahl Jahre, welche durch das Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden Zahlen angegeben wird. Es soll aus diesen Angaben bestimmt werden, um welche Zeit jeder der genannten Kaiser regierte.

Bewegungs-Aufgaben.

120) Ein Bote geht von einem Orte A nach einem Orte M und macht täglich $37\frac{1}{2}$ [$35\frac{5}{8}$] Kilometer. Zu derselben Zeit geht ein anderer Bote von einem um 90 [$56\frac{1}{4}$] Kilometer mehr rückwärts gelegenen Orte B nach demselben Orte M und macht täglich $52\frac{1}{2}$ [$46\frac{7}{8}$] Kilometer. Nach wieviel Tagen und in welcher Entfernung vom Orte B werden beide Boten zusammentreffen?

121) Zwei Körper bewegen sich von zwei Punkten, A und B, deren Entfernung d *m* ist, *nach derselben Richtung*. Der eine legt in jeder Zeiteinheit (z. B. Sekunde, Minute) c *m*, der zweite, nachfolgende, in jeder Zeiteinheit c' *m* zurück. Wann und wo werden beide Körper zusammentreffen? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

122) Zwei Freunde, welche 78 [73] Meilen voneinander entfernt sind, verabreden sich, in einer gewissen, zwischen ihren Wohnorten liegenden, Stadt zusammenzutreffen. Beide reisen gleichzeitig ab, und der eine macht täglich $5\frac{1}{4}$ [$8\frac{3}{4}$], der andere täglich $7\frac{3}{4}$ [$9\frac{1}{2}$] Meilen. Wann und in welcher Entfernung von ihrem Wohnorte treffen sie zusammen?

123) Zwei Körper bewegen sich von zwei Orten, deren Entfernung d ist, *gegeneinander*; der eine legt in jeder Zeiteinheit c, der andere in jeder Zeiteinheit c' *m* zurück. Wann werden beide Körper zusammentreffen? Wie läßt sich das Resultat dieser Aufgabe aus dem Resultate der 121. Aufgabe ableiten?

124) Von einem Orte A wird nach einem anderen B ein Kurier abgesandt, der alle Stunden $9\frac{3}{8}$ *km* zurücklegt. $1\frac{1}{2}$ Stunde nach seiner Abreise wird ihm ein anderer von demselben Orte A nachgeschickt, der, um jenen einzuholen, stündlich $12\frac{3}{16}$ *km* machen muß. Wieviel Stunden nach Abgang des ersten und in welcher Entfernung wird der zweite Kurier den ersten einholen?

125) Um 6 Uhr morgens fährt ein Eilwagen aus einem Orte A nach einem Orte B und macht jede Stunde 9 *km*. 20 Minuten nach 2 Uhr verläßt ein Dampfwagen den Ort B, fährt nach A und langt auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn, indem er jede Stunde 45 *km* zurücklegt, zu derselben Zeit in A an, zu welcher der Eilwagen an dem Orte B ankommt. Wie weit ist A von B entfernt?

126) Zwei Körper gehen von demselben Orte S aus und bewegen sich beide nach *derselben Richtung* hin. Der eine legt in jeder Zeiteinheit c Wegeeinheiten; der andere, der den Ort S n Zeiteinheiten später verläßt, legt in jeder Zeiteinheit c' Wegeeinheiten zurück. In welcher Zeit nach dem Abgange des zweiten

Körpers werden beide zusammentreffen? Welche Beziehung muß zwischen den Größen c, c' und n stattfinden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

127) Zwei Fußgänger, von denen der eine alle 3 Minuten 182 *m*, der andere jede Minute 56 *m* zurücklegt, gehen von zwei, um $52\frac{1}{2}$ *km* voneinander entfernten Dörfern einander entgegen, und zwar der erstere $2\frac{1}{2}$ Stunden früher, als der zweite. Nach welcher Zeit*) werden beide Fußgänger einander begegnen?

128) Wie heißt die Auflösung der 126. Aufgabe, wenn die beiden Körper sich von zweien um d Wegeeinheiten voneinander entfernten Orten gegeneinander bewegen?

129) Einem Boten, der täglich gleichviel abmacht, wird 5 Tage nach seiner Abreise ein anderer nachgeschickt, der, um den ersten in 8 Tagen einzuholen, täglich $18\frac{3}{4}$ *km* mehr machen muß. Wieviel Kilometer legte der erste Bote täglich zurück?

130) Ein feindliches Corps ist vor zwei Tagen von einem gewissen Orte aufgebrochen und macht täglich $33\frac{3}{4}$ *km*. Man will ihm von dem nämlichen Orte aus nachsetzen, und zwar so schnell, daß man es in 6 Tagen erreicht habe. Wieviel Kilometer müssen zu dem Ende täglich gemacht werden?

131) Von A aus wird ein Kurier nach einem Orte B geschickt; 3 Stunden später wird ihm ein anderer nachgesandt, der jenen einholen soll. Wenn nun die Geschwindigkeit des ersten zu der des zweiten sich wie 5 : 7 verhält, in welcher Zeit werden beide zusammentreffen?

132) Zwei sich hintereinander bewegende Körper gehen von demselben Orte aus; der zweite aber t Zeiteinheiten später, als der erste. Die Geschwindigkeit des ersten verhält sich zu der des zweiten, wie $m : n$. Nach welcher Zeit werden beide Körper zusammentreffen?

133) Ein Fußgänger, der alle 7 Stunden 30 *km* zurücklegt, geht aus einem Orte B ab; ein Reiter verläßt zu gleicher Zeit einen um 60 *km* mehr rückwärts gelegenen Ort A und macht alle 3 Stunden 30 *km*. Wenn nun jeder derselben auf der Reise im ganzen nur $1\frac{1}{2}$ Stunde zum Ausruhen verwendet, in wieviel Stunden wird der Reiter den Fußgänger einholen?

134) Ein Körper, der alle a Minuten m Meter zurücklegt, verläßt einen Ort A; t Minuten später oder früher geht von

*) Als unbekannte Größe kann man entweder die Zeit nach Abgang des ersten oder die Zeit nach Abgang des zweiten Fußgängers wählen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Nr. 128, 131, 132, 134.

einem um $d\ m$ rückwärts oder vorwärts gelegenen Orte ein zweiter Körper nach derselben Richtung und macht alle b Minuten $n\ m$. In wieviel Minuten wird der zweite Körper den ersten einholen? Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, m, t, d, b und n stattfinden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

135) Vor einer totalen und centralen Sonnenfinsternis*), die an einem Orte vorfiel, standen, der Berechnung zufolge, um 9 Uhr 13 Minuten vormittags die Mittelpunkte der Sonnen- und Mondscheibe noch $5\frac{7}{8}$ Mondbreiten voneinander. Beide Scheiben hatten dieselbe scheinbare Größe und bewegten sich nach derselben Richtung hin von Westen nach Osten. Der Mond legte auf seiner Bahn in einer Stunde $1\frac{1}{18}$, die Sonne dagegen in derselben Zeit nur $\frac{1}{12}$ Mondbreite zurück. Um wieviel Uhr fielen die Mittelpunkte beider Scheiben zusammen (totale Finsternis)? Um wieviel Uhr berührten sich die Scheiben mit ihren Rändern zum ersten und um wieviel Uhr zum zweiten Male (Anfang und Ende der Finsternis)?

136) Zwei Boten gehen zu gleicher Zeit von den beiden Ortschaften A und B einander entgegen. Der eine würde den ganzen Weg in $6\frac{1}{4}$ [12], der andere in $9\frac{3}{8}$ [15] Stunden zurücklegen. Nach wieviel Stunden werden beide einander begegnen?

137) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für $6\frac{1}{4}$ und $9\frac{3}{8}$ die allgemeinen Zeichen m und n gesetzt werden?

138) Um 8 Uhr morgens fahre ich mit dem Eilwagen von A nach B; zu gleicher Zeit bewegt sich ein Dampfwagen auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn von B nach A. Um halb 10 Uhr treffe ich mit dem Dampfwagen zusammen, halte mich gegen Mittag eine halbe Stunde auf und komme abends um 6 Uhr in B an. Um wieviel Uhr langt der Dampfwagen in A an?

139) Ein Bote geht von einem Orte A über einen Ort B nach einem Orte C, ein zweiter zu derselben Zeit von B nach demselben Orte C. Der erste macht in $1\frac{1}{4}$ Stunde den Weg von A nach B, der andere aber in derselben Zeit nur $\frac{1}{4}$ der Länge des Weges. Wann wird der erste Bote den zweiten einholen?

140) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für $1\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ die allgemeinen Zeichen p und q gesetzt werden?

141) Morgens um 6 Uhr fährt von Köln ein Dampfschiff nach Koblenz und mittags um 12 Uhr ein anderes von Koblenz nach

*) Eine Sonnenfinsternis heißt central, wenn die Mittelpunkte der Sonnen- und Mondscheibe im Verlaufe der Finsternis zusammenfallen; dieselbe kann total (mit oder ohne Dauer) oder ringförmig sein.

Köln. Das erste kommt um 6 Uhr abends in Koblenz und das zweite um 5 Uhr abends in Köln an. Um wieviel Uhr und in welcher Entfernung von Köln begegnen die Dampfschiffe einander, wenn die Strecke zwischen Köln und Koblenz zu Wasser $93\frac{3}{4}$ *km* beträgt?

142) Zwei sich gleichförmig bewegende Körper laufen zu gleicher Zeit von zwei um 18 *m* voneinander entfernten Punkten hintereinander. Der vorangehende legt alle 6 Minuten 5 *m*, der nachfolgende alle 8 Minuten 7 *m* zurück. Nach wieviel Minuten wird ihre wechselseitige Entfernung 15 *m* betragen?

143) Zwei sich gleichförmig bewegende Körper gehen von zwei um d *m* voneinander entfernten Orten, A und B, zu gleicher Zeit nach derselben Richtung hin; der vorangehende macht in jeder Sekunde c, der nachfolgende in jeder Sekunde c' *m*. In welcher Zeit wird ihre Entfernung l *m* sein? Was wird aus dem Resultate, wenn $d = l$, wenn $d < l$ und $c' > c$ ist?

144) Zwei Körper bewegen sich zu gleicher Zeit von zwei um 243 *m* voneinander entfernten Punkten gegeneinander; der eine legt jede Minute 5, der andere jede Minute 7 *m* zurück. In welcher Zeit wird ihre Entfernung 39 *m* betragen?

145) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 243, 5, 7 und 39 die allgemeinen Zeichen d, c, c' und l gesetzt werden? Was wird aus dem Resultate, wenn $d = l$, was, wenn $d < l$ ist?

146) Wie heißt das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die beiden Körper nicht gegeneinander, sondern voneinander laufen?

147) Zwei Körper, von denen der nachfolgende jede Minute sich um n *m* schneller bewegt, als der vorangehende, laufen zu gleicher Zeit aus zwei Punkten, A und B, nach derselben Richtung und haben nach t Minuten die Entfernung l. Wie groß ist der Abstand der Punkte A und B? Wann waren die Körper beisammen oder werden sie beisammen sein?

148) Ein Dampfschiff und ein Segelschiff fahren beide von einem Orte M nach einem Orte N; das erste macht alle 3 Stunden 7, das zweite in derselben Zeit nur 2 Meilen. Das Segelschiff hat schon $3\frac{1}{3}$ Meilen zurückgelegt, ehe das Dampfschiff abfährt, und kommt 5 Stunden später an, als das zweite. Wieviel Zeit gebraucht das Dampfschiff von M bis N, nnd wie weit ist der erste Ort von dem zweiten entfernt?

149) Ein Fußgänger und ein Reiter machen beide denselben Weg von C nach D. Der erste, der $5\frac{3}{4}$ Stunden früher abgeht, legt alle 7 Stunden $22\frac{1}{2}$ Kilometer, der zweite aber alle 5 Stunden 45 Kilometer zurück. Nach welcher Zeit wird der Fußgänger doppelt soviel Weg zurückgelegt haben, als der Reiter? nach welcher Zeit der Reiter doppelt soviel Weg, als der Fußgänger?

150) Ein Dampfschiff und ein Segelschiff fuhren beide von einem Orte C nach einem stromabwärts gelegenen Orte D, und letzteres hatte, ehe ersteres abging, bereits eine halbe Meile zurückgelegt. Das Dampfschiff kam in D an, hielt sich daselbst $1\frac{1}{2}$ Stunde auf und langte, obschon es gegen den Strom nur mit halber Geschwindigkeit fahren konnte, zu derselben Zeit am Orte C an, zu der das andere Schiff den Ort D erreichte. Wenn man nun weiß, daß das Dampfschiff stromabwärts stündlich $2\frac{1}{4}$, das Segelschiff aber stündlich nur $\frac{3}{4}$ Meile zurücklegt, wie läßt sich hiernach die Entfernung der Orte C und D bestimmen?

151) Von einer Stadt C fährt ein Dampfschiff stromaufwärts nach einer Stadt M. Eine Stunde später fährt aus M ein Dampfschiff nach C. Das erste Dampfschiff legte alle 4 Stunden 5 Meilen, das zweite alle 3 Stunden $8\frac{1}{2}$ Meilen zurück. Nach einiger Zeit treffen sich beide Dampfschiffe, und es findet sich, daß das stromabwärts fahrende einen doppelt so großen Weg zurückgelegt hat, als das andere. Wie läßt sich hiernach die Entfernung der beiden Städte C und M bestimmen?

152) Ein Dampfwagen geht von einem Orte A nach einem westlich gelegenen Orte B, der mit ihm gleiche geographische Breite hat, und macht jede Stunde 32 englische Meilen. Wegen Verschiedenheit der Ortsuhren gewinnt der Wagen außerdem bei je 10 Meilen, die er zurücklegt, eine Minute an Zeit. Wenn nun der aus A morgens um 9 Uhr, nach der Ortszeit, abgehende Wagen in B nachmittags 4 Uhr 6 Minuten, nach der Uhr des Ortes B, anlangt, wie weit sind beide Orte voneinander entfernt?

153) Ein Eilwagen, der alle 4 Stunden $37\frac{1}{2}$ Kilometer macht, ging von einer Stadt A nach einer Stadt B, hielt sich daselbst eine Stunde auf und kehrte wieder nach A zurück. Ein Fußgänger, der im Durchschnitte alle 3 Stunden 15 *km* zurücklegt, ging zu gleicher Zeit mit dem Eilwagen aus der Stadt A und begegnete demselben auf dessen Rückkehr nach 9 Stunden. Wie weit ist A von B entfernt, und wieviel Kilometer hatte der Fußgänger noch abzumachen?

154) Um 12 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr übereinander. Wann und wie oft werden die Zeiger in den nächsten 12 Stunden übereinander stehen *)?

155) α) Wie oft und wann werden die beiden Zeiger einer Uhr in gerader Linie einander gegenüber stehen? β) Wann und wie oft werden die beiden Zeiger einen rechten Winkel miteinander bilden? γ) Eine Uhr habe drei Zeiger: einen Stunden-, Minuten- und Sekunden-Zeiger. Um wieviel Uhr zum ersten Male nach halb ein Uhr wird 1) der Sekundenzeiger den Stundenzeiger einholen, 2) der Sekundenzeiger gerade in der Mitte zwischen dem Stunden- und Minutenzeiger stehen, 3) der Sekundenzeiger den Minutenzeiger einholen?

156) α) Zwei Körper laufen hintereinander auf der Peripherie eines Kreises, welcher eine Länge von m *m* hat. Ihre Entfernung beträgt d *m*. Der vorangehende bewegt sich t Sekunden früher oder später, als der folgende; jener macht in jeder Sekunde c, dieser c' *m*. Wann werden diese Körper zum ersten, zweiten, dritten u. s. w. n-ten Male zusammentreffen?

β) Wie heißt das Resultat der Aufgabe, wenn die beiden Körper gegeneinander laufen?

157) Zwei Körper, deren Entfernung 9 *m* ist, bewegen sich gleichförmig hintereinander auf der Peripherie eines Kreises. Zum ersten Male treffen sie sich nach 2, zum zweiten Male nach 10 Minuten. Wie groß ist die Peripherie des Kreises?

158) Zwei Körper bewegen sich gleichförmig hintereinander auf der Peripherie eines Kreises. Zum ersten Male treffen sie sich nach t, zum zweiten Male nach t' Sekunden. Wann werden sie sich zum dritten Male treffen?

159) Von drei Pendeluhren giebt die erste ganz genau die mittlere Sonnenzeit an, die zweite geht täglich 5 ihrer Minuten vor, die dritte bleibt täglich 8 ihrer Minuten zurück. Heute Mittag Punkt 12 Uhr zeigte die zweite 11 Uhr 40 Minuten, die dritte 12 Uhr 45 Minuten. Nach welcher Zeit werden die beiden letzteren Uhren, welche übrigens einen gleichmäßigen Gang beibehalten, genau in der Angabe der Zeit übereinstimmen, und wieviel zeigen dieselben alsdann?

160) α) Von der Erde aus gesehen, vollendet der Mond seinen Lauf am Himmel in 27 Tagen 7 Stunden 43 Minuten 4,68 Sekunden; die Sonne dagegen vollendet ihren scheinbaren Lauf in 365

*) Diese Aufgabe läßt sich nach der 143. Aufgabe lösen, wenn man nur $d = 0$ und l entweder 60 oder 120, oder 180 u. . w. Bogenminuten gleich setzt.

Tagen 5 Stunden 48 Minuten 47,8 Sekunden. Beide Himmelskörper schreiten durch die Sternbilder des Thierkreises Widder, Stier, Zwillinge u. s. w. von Westen gegen Osten fort. Wieviel Tage verfließen von einem Neumonde (Zusammenkunft des Mondes mit der Sonne) bis zu einem anderen?

β) Der Planet Venus läuft in derselben Zeit, in welcher die Erde 8 Mal um die Sonne sich bewegt, also in 8 Jahren, nahe 13 Mal um die Sonne. Er kommt von Zeit zu Zeit zwischen Sonne und Erde (untere Konjunktion der Venus mit der Sonne), und zu einer anderen Zeit befindet er sich auf der Verlängerung der Linie von der Erde zur Sonne (obere Konjunktion mit der Sonne). Welche Zwischenzeit verfließt a) zwischen zwei aufeinander folgenden Konjunktionen mit der Sonne; b) zwischen einer unteren und der nächstfolgenden oberen Konjunktion mit der Sonne? Wieviel Monate erscheint demnach c) Venus als Morgenstern, wieviel d) als Abendstern?

161) α) Ein sich gleichförmig bewegender Körper beschreibt die Peripherie eines Kreises in t Sekunden und wird von einem anderen Körper, der sich ebenfalls gleichförmig nach derselben Richtung fortbewegt, alle t' Sekunden eingeholt. In welcher Zeit vollendet der zweite Körper einen Umlauf?

β) Von drei aufeinander folgenden, in gerader Linie liegenden Punkten, A, B und C, bewegen sich drei Körper mit den bezüglichen Geschwindigkeiten c', c'' und c''' nach derselben Richtung über C hinaus; B sei von A m, C von A $n\,m$ entfernt. Nach wieviel Zeiteinheiten wird der Körper von A sich gerade in der Mitte zwischen den Körpern von B und C befinden? Liegt diese Zeit gerade in der Mitte zwischen den beiden Zeiten, in welchen er mit den beiden letzteren Körpern zusammentrifft? Beispiel: $m = 24$, $n = 36$, $c' = 8$, $c'' = 4$, $c''' = 6$.

162) Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund deren 4 macht. Wenn nun 7 Hasensprünge an Größe soviel betragen, als 5 Hundesprünge, wieviel Sprünge muß der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen?

163) An einer Mauer, welche eine Länge von $26\frac{3}{4}$ *m*, eine Breite von 1 *m* und eine Höhe von 4 *m* hat, arbeiten zwei Maurer, von denen der eine, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in einem Tage $5\frac{1}{4}$ *cbm*, der andere, wenn er täglich 11 Stunden arbeitet, in 9 Tagen $53\frac{1}{4}$ *cbm* aufzuführen imstande ist. In welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jeder der Maurer täglich 10 Stunden arbeitet und der erste 5 Tage, der zweite aber nur 2 Tage versäumt?

164) Aus einem Wasserbehälter, der 1054 l Wasser faßt und bis zur Hälfte gefüllt ist, fließen durch eine Röhre in je 7 Minuten 51 l Wasser aus. Durch eine andere Röhre fließen in denselben Behälter in je 4 Minuten 47 l Wasser hinzu. Wenn nun die letzte Röhre 11 Minuten später geöffnet wird, als die erste, nach welcher Zeit wird der Wasserbehälter angefüllt sein?

165) Bacchus trank einst mit Silen um die Wette; ersterer hatte schon 6 Becher voraus, als dieser zu trinken anfing, und leerte in derselben Zeit 5 Becher, in welcher Silen nur 3 Becher zu leeren imstande war. Recht viel zwar konnten beide vertragen, Bacchus gerade noch einmal soviel, als Silen, doch es erlagen, nachdem sie manchen Becher geleert, beide erschöpft zu gleicher Zeit. Wieviel Becher hatte jeder von ihnen geleert?

166) α) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden. Durch die erste kann solches in 4, durch die zweite in 10, durch die dritte in 15 Stunden geschehen. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn alle drei Röhren zugleich fließen? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 4, 10 und 15 die allgemeinen Zeichen m, n und p gesetzt werden?

167) An einem Mühlenteiche befinden sich drei Schleusen: zwei zum Zuflusse und die dritte zum Abflusse. Ist der Teich leer, so kann er durch Öffnung der ersten Schleuse in $1\frac{1}{4}$ Tag, durch Öffnung der zweiten Schleuse in $1\frac{3}{4}$ Tagen angefüllt werden; ist aber der Teich voll, so kann ihn die dritte Schleuse in $\frac{3}{4}$ Tagen ausleeren. In wieviel Tagen wird der leere Teich angefüllt sein, wenn alle drei Schleusen zugleich geöffnet werden?

168) Ein Wasserbehälter kann, wenn er leer ist, durch eine von drei Röhren in m Stunden, durch eine andere in n Stunden gefüllt, und wenn er voll ist, durch eine dritte in p Stunden ausgeleert werden. In wieviel Stunden wird der leere Wasserbehälter gefüllt, oder der volle ausgeleert sein, wenn alle drei Röhren gleichzeitig geöffnet werden, die beiden ersten zum Zuflusse, die dritte zum Abflusse? Wie können die beiden Resultate dieser Aufgabe auseinander und aus dem Resultate der 166. Aufgabe abgeleitet werden?

169) Aus zwei kreisrunden Öffnungen eines Behälters von verschiedener Größe fließt das Wasser mit ungleichen Geschwindigkeiten aus. Man weiß, daß die Durchmesser der Öffnungen sich wie 3 : 7*), die Geschwindigkeiten der Wasserströme aber wie 7 : 9

*) Siehe Bemerkung zu Beispiel 36 in § 33a.

verhalten; man weiß ferner, daß aus der einen Öffnung in einem gewissen Zeitraume 1458 *l* Wasser weniger flossen, als aus der anderen. Wieviel Wasser gab nun jede Öffnung in diesem Zeitraume?

170) Zwei Fußgänger gehen zu gleicher Zeit von einem Orte A nach einem Orte B ab. Ihre Schritte verhalten sich in Hinsicht ihrer Größe wie 5 : 6, und in Hinsicht ihrer Anzahl während derselben Zeit wie 7 : 6. Nach einer gewissen Zeit erreicht der zweite Fußgänger den Ort der Bestimmung, während der erste noch um 200 seiner Schritte zurück ist. Wieviel Schritte macht jeder derselben von A nach B?

171) Zwei Maurer führen in einer gewissen Zeit zusammen 34 *cbm* Mauerwerk aus; ihr beiderseitiger Fleiß steht in dem Verhältnisse 4 : 5, ihre Ausdauer in dem Verhältnisse 10 : 9. Wieviel Kubikmeter führt jeder der beiden Maurer aus?

172) α) Acht Pferde haben in 7 Wochen eine Wiese von 40 *ha* so abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfange bereits da stand, als auch jenes abfraßen, welches während dieser Zeit darauf gewachsen war. Auf dieselbe Weise haben bei gleichem Futter 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 50 *ha* abgeweidet. Wieviel Pferde können auf diese Art 12 Wochen lang auf einer Wiese von 60 *ha* weiden?*)

β) Wie heißt allgemein die Auflösung der Aufgabe, wenn für die Zahlen 8, 7, 40, 9, 8, 50, 12 und 60 die Zeichen a, c, b, d, f, e, h und g gesetzt werden?

173) In einem Bergwerke befinden sich zur Herausschaffung des Grubenwassers an verschiedenen Orten zwei Dampfmaschinen, welche Tag und Nacht hindurch arbeiten. Die eine schafft alle 5 Minuten 11 *hl* Wasser aus einer Tiefe von 155 *m*, die zweite bringt alle 10 Minuten 31 *hl* auf eine Höhe von 88 *m*. Beide Dampfmaschinen zu ersetzen, hätte man 54 Pferde nötig. Wieviel Pferde ersetzt jede Dampfmaschine einzeln?

174) Man beabsichtigt, das Grundwasser eines Bergwerkes aus einer Tiefe von $276\frac{4}{5}$ *m* zu heben, und wendet zu diesem Zwecke zwei Dampfmaschinen an, von welchen die eine, unterirdisch angebracht, das Wasser bis auf eine gewisse Höhe in einen großen Behälter bringen, die andere aber, über der Erde stehend, dasselbe aus jenem Behälter völlig in die Höhe schaffen soll. Die erste Maschine ist imstande, alle 6 Minuten 13 *hl* Wasser 168 *m* zu

*) Man suche aus den beiden ersten Angaben zuerst den Zuwachs, den je 10 *ha* in einer Woche gewinnen u. s. w.

heben, die zweite vermag alle 3 Minuten 10 *hl* Wasser 72 *m* hoch zu fördern. In welcher Höhe über der Sohle ist der Wasserbehälter anzubringen?

175) In einem Kohlenbergwerke befanden sich zur Förderung der Steinkohlen zwei Dampfmaschinen. Der erste brachte in je 5 Stunden 144 Tonnen auf eine Höhe von 125 *m*, die zweite in je 3 Stunden 80 Tonnen auf eine Höhe von 180 *m*. Beide Dampfmaschinen wurden an denselben Ort hingebracht, und es fand sich, daß, nachdem die erste bereits $1\frac{1}{4}$ Stunden gearbeitet hatte, ehe die zweite anfing, diese doch noch 7 Stunden $11\frac{1}{4}$ Tonnen mehr lieferte, als jene. Wie läßt sich aus diesen Angaben die Tiefe berechnen, aus der beide Maschinen die Steinkohlen zu Tage förderten?

176) In einem Bergwerke befinden sich drei Dampfmaschinen: die erste schafft alle 2 Minuten 7 *hl* Wasser aus einer Tiefe von 87 *m*, die zweite alle 5 Minuten 12 *hl* Wasser aus einer Tiefe von 145 *m*, die dritte endlich alle 3 Minuten $7\frac{1}{2}$ *hl* aus einer Tiefe von 108 *m*. In welcher Zeit würden alle 3 Maschinen vereinigt 2436 *hl* Wasser auf eine Höhe von 270 *m* zu bringen imstande sein?

177) Vier Ursachen bringen einzeln in den Zeiten t_1, t_2, t_3 und t_4 die Wirkungen e_1, e_2, e_3 und e_4 hervor. In welcher Zeit bringen die vier Ursachen, gleichzeitig wirkend, die Wirkung E hervor?

---

178) Jemand soll 2007 *M* nach 5 Monaten, 3395 *M* nach 7 Monaten, 6740 *M* nach 13 Monaten zahlen. Nach wieviel Monaten ist die ganze Summe von 12142 *M* zu bezahlen?*)

179) Jemand soll in fünf Terminen folgende Summen bezahlen: a *M* nach p, b *M* nach q, c *M* nach r, d *M* nach s und e *M* nach t Monaten. Nach wieviel Monaten kann er die Summe $(a + b + c + d + e)$ *M* auf einmal entrichten?

180) Jemand hat drei Summen zu bezahlen, und zwar 1013 *Fl* nach $3\frac{1}{2}$ Monaten, 431 *Fl* 4 Monate später und die letzte Summe endlich wieder 4 Monate später. Wie groß ist die letzte Summe, wenn er die drei Summen zusammen in $6\frac{1}{4}$ Monaten, ohne Nutzen und Schaden zu haben, bezahlen kann?

181) Jemand hat 1980 *M* nach $5\frac{1}{2}$ Monaten zu zahlen; da er aber diese Summe nicht auf einmal entrichten kann, so bezahlt

*) Der Diskonto werde bei diesem Beispiele, wie bei den folgenden, jedesmal, wie gebräuchlich, in Hundert gerechnet. Man vergleiche die Beispiele 22 und 23 in § 105, bei welchen der Diskonto auf Hundert gerechnet wird.

er nach 3 Monaten 440 ℳ, $1\frac{1}{4}$ Monat später 550 ℳ und wieder 2 Monate später 770 ℳ. Wie lange kann er den Rest von 220 ℳ noch in Händen behalten?

182) Jemand übernimmt ein Geschäft mit der Bedingung, in 10 Monaten eine gewisse Summe zu bezahlen. Er kommt mit dem Eigentümer des Geschäftes überein, ihm nach einer bestimmten Zeit, und zwar in 4 Terminen von 3 zu 3 Monaten, jedesmal den vierten Teil der Summe abzutragen. Nach wieviel Monaten beginnt die erste Zahlung?

183) Jemand hat eine Summe von 1698 ℳ nach $4\frac{1}{2}$ Monaten abzutragen. Er kommt mit dem Gläubiger überein, nach einer bestimmten Zeit 324 ℳ zu zahlen, 3 Monate später 384 ℳ, alsdann 2 Monate später 530 ℳ und zuletzt nach $1\frac{1}{2}$ Monat den Rest abzutragen. Nach wieviel Monaten beginnt die Zahlung?

184) Jemand kauft ein Haus für 18 900 Frc unter der Bedingung, diese Summe nach 15 Monaten zu zahlen. Er kommt mit dem Verkäufer überein, nach 3 Monaten 2100 Frc und nach dieser Zeit in 5 gleichen Terminen jedesmal 3360 Frc abzutragen. In welchen Terminen erfolgen die Zahlungen?

185) Jemand hat eine bestimmte Summe in 10 Monaten zu zahlen. Er kommt mit dem Gläubiger überein, in vier Terminen, von denen jeder um $2\frac{1}{2}$ Monate länger sei, als der ganze vorhergehende, jedesmal den vierten Teil der Summe abzutragen. Wieviel Monate muß der erste Termin umfassen, wenn der Diskonto in Hundert gerechnet wird und keiner der Beteiligten Nutzen oder Schaden erleiden soll?

186) Jemand hat eine Summe von 2000 Fl nach 14 Monaten zu zahlen; er kommt mit dem Gläubiger überein, in 5 Terminen, von welchen jeder um $1\frac{1}{2}$ Monat länger sei, als der ganze vorhergehende, die Schuld abzutragen, und zwar bei dem ersten Termine 200 Fl, und bei jedem folgenden 100 Fl mehr. Nach welcher Zeit muß der erste Termin angesetzt werden, wenn den Beteiligten weder Nutzen noch Schaden erwachsen soll?

187) Jemand hat eine bestimmte Summe nach einer gewissen Zeit zu zahlen. Er kommt mit dem Gläubiger überein, die Summe in vier gleichen Terminen, von denen jeder $\frac{1}{4}$ der festgesetzten Zeit betragen soll, zu entrichten, und zwar in jedem folgenden Termine 100 ℳ mehr, als in dem vorhergehenden. Wie groß ist die zu bezahlende Summe?

188) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte giebt A 600 ℳ

auf 4 Monate, B 480 ℳ auf 6 Monate und C 360 ℳ auf 8 Monate. Wieviel bekommt jeder von 408 ℳ Gewinn?

189) Jemand vermachte kurz vor seinem Absterben durch ein Legat einer weitwohnenden Witwe nebst ihrem Kinde eine Summe von 3800 ℳ. Da ihm nicht bekannt war, ob das Kind ein Sohn oder eine Tochter sei, so bestimmte er, daß, falls die Witwe einen Sohn habe, die Mutter $\frac{2}{3}$, der Sohn $\frac{1}{3}$ des Legates erhalten solle; besitze aber die Mutter eine Tochter, so solle umgekehrt die Mutter $\frac{3}{5}$, die Tochter $\frac{2}{5}$ der genannten Summe erhalten. Auf Nachfrage ergiebt sich, was dem Erblasser nicht bekannt war, daß die Erbin Mutter *zweier* Kinder war, eines Sohnes und einer Tochter. In welcher Weise war nun nach dem Willen des Erblassers das Legat von 3800 ℳ zu verteilen?

190) Drei Fuhrleute haben zusammen 408 ℳ verdient. A hat 1500 *kg* 75 *km* weit, B 600 *kg* $112\frac{1}{2}$ *km* weit, C 1250 *kg* 60 *km* weit gefahren. Wieviel kommt jedem zu?

191) Ein Arbeiter verdient, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in 8 Tagen soviel, als ein anderer in 7 Tagen, wenn er täglich 10 Stunden arbeitet. Einige Zeit hindurch haben beide gemeinschaftlich jeden Tag gleichviel Stunden gearbeitet und zusammen 49 ℳ 70 ₰ verdient. Wieviel gebührt jedem derselben?

192) Drei Kaufleute, A, B und C, legen zu eiuem Geschäfte gemeinschaftlich bei und kommen überein, den *Gewinn verhältnismäßig* nach den Einlagen, den Verlust aber im *umgekehrten* Verhältnisse der Einlagen zu teilen. Wenn nun A 2970 Fl, B 6930 Fl und C 3080 Fl einlegt und nach einem Jahre sich ein Verlust von 2345 Fl ergiebt, wieviel hat jeder Teilnehmer am Verluste zu tragen?

193) Ein Kaufmann A handelt 6 Monate lang mit 3000 Fl, darauf läßt er den B und C an seinem Handel teilnehmen. B trägt 1800 Fl, C 2000 Fl bei. Nachdem sie 10 Monate gehandelt haben, tritt ein Vierter, D, in die Gesellschaft, kauft dem A 1200 Fl, dem B 400 Fl ab und schießt außerdem noch 600 Fl dazu. Nach 8 Monaten nehmen diese einen Fünften, E, in ihre Gesellschaft auf, der dem A 200 Fl, dem B ebenfalls 200 Fl abkauft und noch 1000 Fl besonders beiträgt. Vier Monate nachher trennen sich die Mitglieder der Gesellschaft und haben 13 272 Fl Gewinn unter sich zu teilen. Wieviel fällt auf jeden, wenn A und C außerdem wegen besonderer Dienst-

leistungen so vergütet werden sollen, daß A $12\frac{1}{2}$ pCt. und C 5 pCt. mehr erhalten, als ihnen sonst nach dem Verhältnisse ihrer Einlagen zukommen würde?

194) Drei Bauern mieten für 180 Fl eine Wiese zur Weide für ihr Vieh. A treibt eine bestimmte Menge Vieh 12 Wochen lang, B 11 Stück mehr, als A, 10 Wochen lang, und C endlich 50 Stück 13 Wochen lang auf dieselbe. Wenn nun C $97\frac{1}{2}$ Fl bezahlt, wieviel müssen A und B einzeln bezahlen?

195) Zu einer gemeinschaftlichen Mahlzeit giebt Cajus 7, Sempronius 8 Schüsseln, jede von gleichem Werte. Ehe sie die Mahlzeit beginnen, kommt Titus hinzu und setzt sich mit zu Tische. Nachdem er gegessen, zahlt er 30 Silberlinge und verteilt dieselben unter Cajus und Sempronius nach Verhältnis der Anzahl der Schüsseln, welche jeder mitbrachte; ersterem zahlt er 14, letzterem 16 Silberlinge. Sempronius, hiermit nicht zufrieden, verlangt richterlichen Ausspruch. Wie lautet derselbe?

196) Drei Knaben setzten sich unter einen Baum, um ihr mitgebrachtes Obst zu verzehren. Der erste legte 17, der zweite 14, der dritte 11 Pflaumen vor sich hin. Als sie eben anfangen wollten, kam ein anderer Knabe hinzu. Darf ich mitessen? — Recht gern! war die Antwort, und sie verzehrten die sämtlichen Pflaumen zu gleichen Teilen. Der vierte Knabe legte dafür 42 Nüsse hin, welche die Zurückbleibenden unter sich in der Weise verteilten, daß der erste 17, der zweite 14, der dritte 11 erhielt. War die Verteilung richtig? Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 17, 14, 11 und 42 die allgemeinen Zeichen a, b, c und $a + b + c$ gesetzt werden?

---

197) Welche Zahl muß zu jeder der Zahlen 3 und 7 addiert werden, wenn das Verhältnis der Summen dem Verhältnisse der Zahlen 3 : 4 gleich werden soll?

198) Um welche Zahl muß ich die beiden Glieder des Verhältnisses 339 : 355 vermehren oder vermindern, damit das Verhältnis sich in das Verhältnis 21 : 22 verwandle?

199) Welche Zahl muß vom Nenner und Zähler des Bruches $\frac{79}{87}$ subtrahiert werden, damit der Wert desselben gleich $\frac{1}{9}$ wird?

200) Vier Orte, A, B, C und D, liegen hintereinander auf einer Landstraße. Gehe ich gleichmäßig fort, so gebrauche ich von A bis B $2\frac{1}{2}$ Stunden, von C bis D 5 Stunden. Die Zeit, die ich von A bis C gebrauche, verhält sich zu der, die ich von B bis D

nötig habe, wie 3 : 5. In wieviel Stunden mache ich den Weg von B bis C?

201) α) Um welche Größe muß jede der Größen a und b vermehrt oder vermindert werden, damit das Verhältnis der Summen oder Differenzen dem Verhältnisse $p : q$ gleich werde?

β) Zu zwei Zahlen, a und b, eine dritte Zahl zu suchen, so daß der Unterschied zwischen der ersten und dritten sich zum Unterschiede zwischen der dritten und zweiten verhält, wie die erste zur zweiten.

Bemerkung. Eine solche Zahl heißt das harmonische Mittel der beiden Zahlen. Der reciproke Wert des harmonischen Mittels zweier Zahlen ist gleich der halben Summe der reciproken Werte der beiden Zahlen. Warum?

202) Von welcher Zahl muß ich die beiden Größen $a - b$ und $a + b$ abziehen, damit das Verhältnis der beiden Differenzen dem Verhältnisse $a : b$ gleich werde?

203) Ein Bote, der von einem Orte A nach einem anderen B geht, findet einige Zeit nach seiner Abreise, daß das Verhältnis des abgemachten Weges zu dem noch zurücklegenden gleich dem Verhältnisse 2 : 3 ist, und daß, wenn er noch 60 Kilometer weiter reiset, genanntes Verhältnis in das von 6 : 5 übergehen muß. Wie weit ist A von B entfernt?

204) Durch fünf hintereinander liegende Dörfer, A, B, C, D und E, geht eine Landstraße; A ist von B $26\frac{1}{4}$ *km*, D von E $1\frac{3}{4}$ *km* entfernt. Die beiden Entfernungen BC und CD stehen in dem Verhältnisse 2 : 3 und die beiden Entfernungen AC und CE in dem Verhältnisse 3 : 2. Wie weit ist B von C und C von D entfernt?

205) Vermehre ich das erste Glied des Verhältnisses $m : n$ um eine gewisse Zahl, und vermindere das zweite Glied um das p-fache derselben Zahl, so ist das Verhältnis der beiden veränderten Glieder dem Verhältnisse $r : s$ gleich. Wie heißt jene Zahl?

206) Drei Spieler, A, B und C, spielen Karten; A brachte 10, B 57, C 29 *M* mit. Nach dem Spiele verhält sich der Anteil des A zu dem des B, wie 1 : 3, und der Anteil des C verhält sich zu dem Gewinne des A, wie 3 : 1. Wieviel hatte C gewonnen oder verloren?

Mischungs-Aufgaben.

207) Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Tabak; von der einen kostet das Kilogramm 4 *M*, von der andern 2,40 *M*. Er will beide Sorten miteinander vermengen, so daß er das Kilogramm ohne Nutzen

und Schaden zu 3,40 ℳ verkaufen kann. Wieviel muß er, um 32 *kg* zu erhalten, von jeder Sorte nehmen?

208) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 4, 2,40, 3,40 und 32 die allgemeinen Zeichen m, n, p und a gesetzt werden? Ist die Auflösung immer möglich?

209) Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen. Unvermischt würde er das Hektoliter zu 18,75 ℳ verkaufen. Wieviel Wasser muß er zu 24 *hl* hinzusetzen, um das Liter zu 15 ₰ verkaufen zu können?

210) Jemand will zwei Weinsorten in dem Verhältnisse 3 : 2 miteinander vermischen. Das Hektoliter der einen Weinsorte kostet 144 ℳ. Von welchem Preise muß er die zweite Weinsorte nehmen, um Wein zu erhalten, von dem das Hektoliter 126 ℳ kostet? Von welchem Preise muß aber das Hektoliter der zweiten Sorte sein, wenn das Hektoliter der ersten Sorte 210 ℳ kostet?

211) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für die Zahlen 3, 2, 144 und 126 die allgemeinen Zeichen a, b, m und p gesetzt werden, und in welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

212) $94\frac{1}{2}$ *kg* einer aus 3 Teilen Silber und 4 Teilen Kupfer bestehenden Mischung sollen so mit Kupfer versetzt werden, daß auf 7 Teile Kupfer 2 Teile Silber kommen. Wieviel Kupfer muß zu der Mischung gesetzt werden?

213) In 255 *kg* eines Weingeistes sind Wasser und Alkohol (wasserfreier Weingeist) dem Gewichte nach in dem Verhältnisse 2 : 3 gemischt. Wieviel Wasser muß dem Weingeiste durch Destillieren entzogen werden, damit das Gewichtsverhältnis des Wassers und des Alkohols 3 : 17 wird?

214) Wieviel Prozent Wasser muß dem Wasser einer 6lötigen Salzsoole (d. i. Salzwasser, welches in 100 *Lt* 6 *Lt* Salz enthält) entzogen werden, wenn dieselbe 18lötig werden soll?

215) Wie viel 24lötige Salzsoole muß zu 3715 *kg* einer 6lötigen Salzsoole hinzugesetzt werden, wenn die Mischung 16lötig werden soll?

216) Wieviel Silber von dem Feingehalte 700 [520] und wieviel von dem Feingehalte 900 [950] hat man zu nehmen, um 78 [100] *kg* Silber von dem Feingehalte 750 [821] zu erhalten?

Bemerkung. Der Feingehalt des Silbers wurde früher in Loten, der des Goldes in Karaten angegeben. Zwölflötiges Silber war ein solches, welches in einem halben Pfunde (viertel Kilogramm) oder in einer Mark (à 16 *Lt*) 12 *Lt* Silber und 4 *Lt* Kupfer enthielt; 18karatiges Gold ein

solches, welches in einer Mark (à 24 Karat) 18 Karat reines Gold und 6 Karat Zusatz enthielt. Nach dem Münzvertrage vom 24. Januar 1857 soll das Kilogramm als ausschließliches Münzgewicht eingeführt werden. Der Feingehalt des Silbers sowohl als des Goldes soll, wie es bisher in Frankreich üblich war, in Tausendteilen angegeben werden. Silber von dem Feingehalte 900 ist also ein solches, welches in 1000 Teilen 900 Teile reines Silber und 100 Teile Zusatz enthält.

217) Wieviel 14lötiges Silber und wieviel 10lötiges Silber mußten früher zusammengeschmolzen werden, um 15 Mark 13lötiges Silber zu erhalten?

218) Wieviel Kilogramm reines Silber hat man zu 500 kg von dem Feingehalte 750 der alten preußischen Thaler hinzuzusetzen, damit Silber von dem Feingehalte 900 der neuen Mark entstehe?

219) α) Wieviel Kilogramm Kupfer hat man zu 500 kg von dem Feingehalte 750 der alten preußischen Thaler zu setzen, um Silber von dem Feingehalte 520 zu erhalten?

β) Wieviel Kilogramm Kupfer hat man mit 500 kg engl. Sovereigns, welche von dem Feingehalte $916^2/_3$ sind, zusammenzuschmelzen, um Gold von dem Gehalte 900 der Zwanzigmarkstücke zu erhalten?

220) Wieviel betragen in Paris 6,54 kg Silber à 875 fein, wenn das Kilogramm fein Silber 222 Frc 3 Cent kostet?

221) Wieviel beträgt der Wert eines Silberbarren in Paris, wenn derselbe 9 kg wiegt und 825 ‰ fein ist, das Münzsilber à 900 fein 197 Frc gilt und $3\frac{1}{2}$ % Agio gerechnet werden?

222) Welchen Wert hat ein Silberbarren à 875 fein, der 32,8 kg wiegt, in Berlin, wenn 200 ℳ Münzsilber ein Kilogramm feines Silber enthalten?

---

223) Vermindert man jeden der Faktoren der beiden ungleichen Produkte $52 \cdot 45$ und $66 \cdot 37$ um dieselbe Zahl, so werden die neuen Produkte einander gleich. Wie heißt die Zahl?

224) Ein Schüler hat eine geometrische Proportion zwischen vier Zahlen. Da ihm die Zahlen zu groß dünken, so zieht er zur bequemeren Übersicht von jedem der vier Glieder gleiches ab und erhält hierdurch die falsche Proportion $41 : 93 = 7 : 51$. Wie heißt die ursprünglich richtige Proportion?

225) Es soll eine Zahl von der Eigenschaft angegeben werden, daß, wenn man jedes der Glieder der Proportion $a : b = c : d$ um dieselbe vermehrt oder um dieselbe vermindert, eine zweite richtige Proportion zum Vorschein kommt.

226) Zwei Zahlen, die zusammen 70 ausmachen, stehen in einem gewissen Verhältnisse. Das Verhältnis kehrt sich um, wenn die eine Zahl um 14 vermehrt, die andere um 14 vermindert wird. Wie heißen die Zahlen?

227) α) Das Quadrat einer gedachten Zahl ist um 1188 größer, als das Quadrat der um 6 kleineren Zahl. Wie groß ist die gedachte Zahl? β) Das Quadrat des Dreizehnfachen einer gedachten Zahl, weniger das Quadrat des um 3 vermehrten Zwölffachen, ist dem Quadrate des um 9 verminderten Fünffachen derselben Zahl gleich. Wie groß ist die gedachte Zahl?

228) In einer alten chinesischen Arithmetik, Kiu tschang benannt, welche um 2600 v. Chr. verfaßt und um 1250 n. Chr. von Tsin Kiu Tshaou erläutert und vermehrt herausgegeben sein soll, kommen folgende zwei Beispiele vor: 1) Im Mittelpunkte eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Länge und Breite wächst ein Schilf, das sich einen Fuß hoch über dem Wasser erhebt. Als man dasselbe an das Ufer, nach der Mitte einer Seite zog, reichte es nur bis an den Rand des Teiches. Welche Tiefe hat das Wasser? 2) Ein 10 Fuß hoher Bambus ist nach oben hin gebrochen. Berührt nun beim Umbiegen die Spitze des Rohres den Boden, so ist sie 3 Fuß vom untersten Ende des Bambus entfernt. In welcher Höhe befindet sich der Bruch?*)

229) Vermehre ich eine Zahl, die ich im Sinne habe, um 2 und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, so erhalte ich 2. Wie heißt jene Zahl?

230) α) Lege ich eine Anzahl Markstücke, die ich besitze, in Form eines Quadrates nebeneinander, so fehlen mir 25 Stück; vermindere ich aber jede Seite des Quadrats um 2, so bleiben mir 31 ℳ übrig. Wieviel Mark besitze ich?

β) Eine bestimmte Anzahl Nüsse, die ich besitze, habe ich in Form eines gleichseitigen Dreieckes nebeneinander gelegt. Ich gewinne eine gewisse Menge, mit welcher ich versuche, das gleichseitige Dreieck zu vergrößern. Lege ich zwei Reihen dazu, so habe ich

*) Bei beiden Beispielen kommt der pythagorische Lehrsatz in Anwendung. Ueber die Arithmetik der Chinesen vergleiche man Biernatzki in Crelles Journal, Bd. 52, S. 76.

9 Nüsse übrig; will ich drei Reihen hinzulegen, so fehlen mir ebensoviel Nüsse, als ich vorhin übrig hatte. a) Wieviel Nüsse lagen an jeder Seite? b) Wieviel Nüsse besaß ich anfangs? c) Wieviel Nüsse habe ich gewonnen?

231) Ein Weinbauer will einen rechtwinkligen Weingarten, dessen Länge sich zur Breite wie 7 : 5 verhält, mit Weinstöcken bepflanzen. Setzt er dieselben in gleichen Entfernungen nebeneinander, so bleiben ihm von einer gewissen Anzahl Stöcke 2832 übrig. Setzt er dieselben näher zusammen, so daß auf die längere Seite 14, auf die kürzere 10 Stöcke mehr kommen, so bleiben ihm nur 172 übrig. Wieviel Stöcke hat er zum Verpflanzen?*)

232) Ich habe drei hohle Würfel von verschiedener Größe; der erste ist 5 *cm* höher, als der zweite, und der zweite 5 *cm* höher, als der dritte. Fülle ich den zweiten leeren aus dem ersten vollen Würfel und hierauf den dritten leeren aus dem zweiten vollen, so befinden sich im ersten Würfel 1350 *ccm* Wasser mehr, als im zweiten. Wieviel *ccm* enthält jeder der drei Würfel?

233) Bilde ich von vier aufeinander folgenden Zahlen die vierten Potenzen, subtrahiere je zwei aufeinander folgende voneinander, ziehe hierauf je zwei der drei aufeinander folgenden Differenzen und endlich die beiden letzten Differenzen voneinander ab, so erhalte ich 204. Wie heißen die vier Zahlen?

234) Welchen Zahlenwert hat man in dem Produkte:

$$(a^2 + ab + xb^2)(a^2 - ab + xb^2)$$

für x zu setzen, damit das Produkt das einfache Resultat $a^4 + x^2b^4$ gebe?

235) Welchen Zahlenwert hat man in dem Produkte:

$$(a^2 + xab + xb^2)(a^2 - xab + xb^2)$$

für x zu setzen, damit das Resultat $a^4 + x^2b^4$ herauskomme?

§ 64.

Auflösungen der Aufgaben in § 63.

1) 37. 2) 36. 3) 36. 4) 53.
5) α) durch $\frac{1}{8}$ [13]; β] in 392 [637].
6) α) 6; β) $\frac{3}{2}\frac{1}{2}$. 7) Von 8. 8) 67. 9) 7 [35]. 10) 24 [$7\frac{1}{2}$].
11) 12 [2,9]. 12) $(a - b)m$. 13) $361\frac{1}{4}$. 14) 343 [30].

*) Man vergleiche die Bemerkung zu 35 in § 33a.

15) $1\frac{1}{6}\left[\frac{p}{p-1}\right]$. 16) α) $\frac{n^2}{n-1}$ [$4\frac{1}{2}$]; β) $\frac{n^2}{n+1}$ [$2\frac{1}{4}$]. 17) 8 [4].

18) α) $5\frac{1}{7}$; β) $\frac{n-q}{p-m}$ oder $\frac{q-n}{m-p}$. 19) α) 56; β) $\frac{1}{2}$.

20) 21 und 9 [77 und 47].

21) α) In der rechten 24, in der linken 30 Mkr; β) in der rechten 1 ℳ 97 ₰, in der linken 3 ℳ 21 ₰.

22) α) Die Nacht dauert 18 Stunden 30 Minnten, der Tag 5 Stunden 30 Minuten; Sonnenaufgang erfolgt um 9 Uhr 15 Minuten morgens, Sonnenuntergang um 2 Uhr 45 Minuten nachmittags; β) die anhaltende Nacht dauert $3\frac{1}{2}$ Monate*).

23) In der ersten Klasse 23 [25], in der zweiten 27 [30], in der dritten 35 [36], in der vierten 38 [32] Schüler.

24) 12 Apfelbäume, 7 Birnbäume, 9 Kirschbäume, 8 Johannisbeersträucher und 15 Stachelbeersträucher. 25) 6 m.

26) α) Zu 16 ℳ 20 ₰; β) in dem Verhältnisse 16 : 51.

27) 187 m.

28) 8,167 573 cbm Sauerstoffluft und 30,725 632 cbm Stickstoffluft. 29) 154 g.

30) 220 Kavalleristen, 660 Artilleristen und 2640 Infanteristen.

31) Die heiße Zone 3 687 007$\frac{531}{1271}$, jede der gemäßigten Zonen 2 404 570$\frac{79}{1271}$ und jede der kalten 382 545$\frac{300}{1271}$ Quadratmeilen.

32) Das erste 90, das zweite 100 und das dritte 480 l.

33) α) In der rechten Tasche 11, in der linken 5 ℳ; β) in der rechten Tasche 86, in der linken 42 Mkr.

34) α) 1836 ℳ; β) 12 800 cbm.

35) 1818 Frc. 36) 80 ℳ. 37) 8750 ℳ.

38) $\frac{100}{100-p}\,k$. 39) 5200 ℳ. 40) 957 Fl.

41) $\frac{100+p}{100}\,k = k + \frac{p}{100}\,k$ ℳ. 42) $\frac{100}{100+pn}\,k$ ℳ.

43) Zu $4\frac{1}{4}$ Prozent. 44) In $7\frac{3}{4}$ Jahren. 45) 1700 Fl.

46) Auf 1800 ℳ. 47) $\frac{100}{100-np}\,s$ ℳ. 48) In 25 Jahren.

49) Zu $6\frac{1}{4}$ Prozent. 50) 900 ℳ. 51) 256.

52) Der älteste hat 2220, der zweite 111, der dritte 1,11 ℳ.

53) 15 Zwanzigmarkstücke, 10 Einmarkstücke, 4 Zehnpfennigstücke und 3 Zweipfennigstücke.

54) A erhält 4608, B 3072 und C 2048 ℳ.

55) 765 ha auf Buchen, 685 auf Eichen und 461 auf Kiefern.

---

*) Wegen der Refraktion ist genau genommen die Zeit der völligen Abwesenheit der Sonne etwas geringer, als die der anhaltenden Anwesenheit.

56) 5800 ℳ. 57) 36 000 ℳ. 58) 12 Jahre.
59) Nach 20 Wochen. 60) 6000 Fl. 61) $5\frac{1}{7}$ Stunden*).
62) Die Anzahl der Äpfel, welche Eros zu Anfang besaß, war 3360*).
63) 50 Jahre. 64) 28*). 65) 84 Jahre*). 66) 315 Stück.
67) α) 63 [364]; β) 96.
68) 300 ℳ [100 Fl]. 69) 14 400 ℳ. 70) 6330 Frc.
71) 142 857 [428 571]. 72) 857 142. 73) Von 290 [21].
74) $\frac{1}{2}$. 75) $\frac{1}{4}$. 76) 77. 77) 754. 78) 30 Jahre.
79) Der Lohn eines Meisters 5 ℳ. 80) 200 Stück.
81) 12 ℳ; $[(am - 12b) : (12 - m)]$ ℳ. 82) $1\frac{1}{3}$ *kg*.
83) 125. 84) 420 *ha*. 85) 3 Drachmen.
86) A erhält 1686, B 2200 und C 3520 *ha*.
87) Zu einer Höhe von 3296 *m*. 88) 288 ℳ.
89) A ist von B 100 Meilen entfernt. Im ganzen legte das Schiff $119\frac{11}{16}$ Meilen zurück.
90) $\frac{n(a-1)(b+1)(c-1)(d+1)}{(a-1)(b+1)(c-1)(d+1) - abcd}$ Meilen.
91) Mit 960 *l*.
92) A erhält 2800, B 3900, C 5138, D 2196 und E 2966 Frc.
93) 28. 94) 7 ℳ. 95) 101 Stück.
96) In einer Entfernung von 2 *km*.
97) Nach zwei Jahren wird der Vater 8mal, nach 5 Jahren 5mal so alt sein, als sein Sohn, und vor $1\frac{1}{2}$ Jahr war der Vater 57mal so alt, als sein Sohn.
98) Entweder nach $\frac{m - qn}{q - 1}$ Jahren, oder vor $\frac{qn - m}{q - 1}$ Jahren, je nachdem $\frac{m}{n} \gtrless q$ und $q \gtrless 1$, oder $\frac{m}{n} \gtrless q$ und $1 \gtrless q$ ist. Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich: 1) wenn für den Fall, daß $(m : n) < q$ und $q > 1$, oder $(m : n) > q$ und zugleich $q < 1$, das Resultat $\frac{qn - m}{q - 1}$ größer ist, als m oder n; 2) wenn $q = 1$ und zugleich $qn \gtrless m$ ist. Ist aber $q = 1$ und $qn = m$, oder $n = m$, so wird das Resultat $\frac{0}{0}$; letzterer Quotient ist in diesem Falle ganz unbestimmt und bezeichnet jede beliebige Anzahl Jahre.
99) 30 Jahre.
100) $mn\frac{p - 1}{n - p}$. Soll die Auflösung Sinn haben, so darf das

*) Die Aufgaben 61, 62, 64 und 65 sind entnommen den „Arithmetischen Epigrammen der griechischen Anthologie", welche von Professor Zirkel in Bonn (siehe Programm des Gymnasiums zu Bonn, 1853) sorgfältig bearbeitet worden sind.

Resultat nicht negativ*) werden; es muß also zugleich $p \lessgtr 1$ und $n \lessgtr p$ sein; ebenso darf nicht $n = p$ und zugleich $p > 1$, $m > 0$ sein. Ist $n = p$ und zugleich $p = 1$, mithin auch $n = 1$, so erhält man als Resultat den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, d. h. jedes beliebige Alter genügt der Anforderung. Denselben Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhält man, wenn $m = 0$ und $n = p$ gesetzt wird.

101) Vor 12 Jahren. 102) Nach 7 Jahren.

103) 7 *km*. 104) 15 *km*. 105) 90 Stränge.

106) Er besitzt 100 *kg*. Der Einkaufspreis beträgt für das Kilogramm 1,36 *M* (68 *Nkr*).

107) Der Behälter faßt 240 *l* und muß jede Minute 8 *l* Zufluß erhalten.

108) 34 *cbm*. 109) Nach 5¾ Monaten.

110) $100n : (100 - n)$. 111) $100n : (100 + n)$.

112) Zu 16¼ Prozent. 113) Jede der Summen beträgt 1280 *M* und der Diskonto 7½ Prozent.

114) $\frac{ns - ms'}{n - m}$ und $\frac{100(s - s')}{ns - ms'}$. 115) Er verliert 4 pCt.

116) Man gewinnt $[(100 + n)p' - 100p] : p$ pCt., oder verliert $[100p - (100 + n)p'] : p$ pCt., je nachdem $100p \lessgtr (100 + n)p'$ ist. Man gewinnt und verliert nichts, wenn $100p = (100 + n)p'$ ist.

117) α) Er gewinnt 3¾ pCt.;

β) er gewinnt entweder $[(100 - n)p' - 100p] : p$ pCt., oder verliert $[100p - (100 - n)p'] : p$ pCt.

118) 150.

119) Heinrich I. 919—936; Otto I. 936—973; Otto II. 973—983; Otto III. 983—1002; Heinrich II. 1002—1024.

---

*) Ein negatives Resultat, als Antwort auf eine Frage, hat nicht immer Bedeutung, sondern zeigt nur an, daß es nicht möglich ist, unter den aufgestellten Bedingungen die Aufgabe zu lösen. Ein negativer Wert genügt nur in arithmetischer Hinsicht, indem er, an die Stelle von x gesetzt, die beiden Seiten der aus den gegebenen Größen konstruierten Gleichung einander gleich macht. Zuweilen kann man das gefundene negative Resultat in ein entsprechendes positives verwandeln und somit jenem Bedeutung geben; wenn man nämlich imstande ist, durch Umänderung der aufgestellten Frage den Ansatz der Gleichung so einzurichten, daß allenthalben $+x$ in $-x$ und $-x$ in $+x$ sich verwandelt. Häufig geschieht dieses dadurch, daß man die Frage nach Vermögen in die nach Schuld, die Frage nach Fortschreiten im Raume und in der Zeit in die nach Rückschreiten im Raume und in der Zeit u. s. w., und umgekehrt, verändert. So kann z. B. das erste Resultat in Nr. 98 als allgemeine Antwort auf beide Fragen dienen, wobei in dem Falle, daß $\frac{m - qn}{q - 1}$ negativ wird, die Antwort sich auf die vergangene Zeit bezieht. In dem Beispiele 100 dagegen kann ein negatives Resultat gar nicht gedeutet werden.

120) Nach 6 [5] Tagen werden beide zusammentreffen und zwar in einer Entfernung von 315 [$234\frac{3}{8}$] Kilometer vom Orte B.

121) Nach $d:(c'-c)$ Zeiteinheiten wird der zweite Körper den ersten einholen, in einem Abstande von $c'd:(c'-c)$ Meter von dem entfernteren Orte. Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich, wenn $c'=c$ und $d>0$ ist, in welchem Falle das Resultat $=\infty$ wird. Ist aber zugleich $c'=c$ und $d=0$, so erhält man als Resultat den Ausdruck $\frac{0}{0}$, der alsdann jede beliebige Zeit bedeutet, wie es sich auch aus der Natur der Sache ergiebt. Ist endlich $c'<c$, so wird $d:(c'-c)$ negativ und bedeutet im allgemeinen einen unmöglichen Wert. Beginnen nämlich die beiden Körper an den Orten A und B ihre Bewegungen, so werden sie natürlich nicht zusammentreffen können, wenn der folgende eine kleinere Geschwindigkeit hat, als der vorhergehende. Wird aber die Frage der Aufgabe allgemein so gestellt: „Wenn von zwei sich gleichförmig nach derselben Richtung hin bewegenden Körpern der eine in jeder Zeiteinheit c, der andere nachfolgende aber c' Meter zurücklegt, und zu einer gewissen Zeit ihre wechselseitige Entfernung d ist, nach wieviel Zeiteinheiten werden sie zusammentreffen?“, so deutet für den Fall, daß $c'<c$, das negative Resultat $d:(c'-c)$ darauf hin, daß man die Frage: „Nach wieviel Zeiteinheiten werden sie zusammentreffen?“ in die: „Vor wieviel Zeiteinheiten waren sie beisammen?“ umzuändern habe. Das Resultat als Antwort auf die letztere Frage wird alsdann ein positives sein.

122) Nach 6 [4] Tagen in einer Entfernung von $31\frac{1}{2}$ [35] Meilen vom Wohnorte des ersteren.

123) Nach $\frac{d}{c'+c}$ Zeiteinheiten. Dieses Resultat läßt sich aus dem der 121. Aufgabe ableiten, wenn man c negativ nimmt.

124) Nach $6\frac{1}{2}$ Stunden in einer Entfernung von $60\frac{15}{16}$ *km* von A.

125) $93\frac{3}{4}$ *km*. 126) Nach $nc:(c'-c)$ Zeiteinheiten.

127) In 8 Stunden 42 Minuten nach Abgang des ersten, oder in 6 Stunden 12 Minuten nach Abgang des zweiten Fußgängers.

128) In $(d+nc'):(c'+c)$ Zeiteinheiten nach Abgang des ersten, oder in $(d-nc):(c'+c)$ Zeiteinheiten nach Abgang des zweiten Körpers.

129) 30 *km*. 130) 45 *km*.

131) $10\frac{1}{2}$ Stunden nach Abgang des ersten, oder $7\frac{1}{2}$ Stunden nach Abgang des zweiten Kuriers.

132) In $nt:(n-m)$ Zeiteinheiten nach Abgang des ersten, oder in $mt:(n-m)$ Zeiteinheiten nach Abgang des zweiten Körpers.

133) Nach 12 Stunden.

134) In $(\pm c' t \pm d) : (c' - c)$*) Minuten nach Abgang des ersten Körpers, oder in $(\pm ct \pm d) : (c' - c)$ Minuten nach Abgang des zweiten Körpers, wenn $c = m : a$ und $c' = n : b$ gesetzt wird. Die Auflösung ist möglich, wenn $an \lesseqgtr bm$ und $\pm mt \pm ad \lesseqgtr 0$ ist; unmöglich, wenn $an = bm$ und $\pm mt \pm ad \lesseqgtr 0$ ist; unbestimmt, wenn $\pm mt \pm ad = 0$ und zugleich $an - bm = 0$. Das Resultat wird endlich negativ und läßt eine Deutung zu, wenn $bm \lesseqgtr an$ und $\pm mt \pm ad \lesseqgtr 0$ ist.

135) Um 3 Uhr 13 Minuten nachmittags fielen die Mittelpunkte beider Scheiben zusammen. Um 2 U. 11 M. 43,4 Sek. berührten sich die Scheiben zum ersten und um 4 U. 14 M. 16,6 Sek. zum zweiten Male.

136) Nach $3\frac{3}{4}$ [$6\frac{2}{3}$] Stunden. 137) Nach $mn : (m + n)$ Stunden.

138) Um 9 Uhr $46\frac{7}{8}$ Min. 139) In 5 Stunden. 140) $p : (1 - q)$.

141) Um 1 Uhr $45\frac{15}{17}$ Minuten in einer Entfernung von $60\frac{45}{68}$ *km* von Köln.

142) Entweder nach 1 Stunde 12 Minuten, oder nach 13 Stunden 12 Minuten; im ersten Falle vor, im zweiten Falle nach ihrem Zusammentreffen.

143) Nach $\frac{d - l}{c' - c}$ Sekunden vor und nach $\frac{d + l}{c' - c}$ Sekunden nach ihrem Zusammenstoßen.

144) Sowohl nach 17, als nach $23\frac{1}{2}$ Minuten.

145) Sowohl nach $\frac{d - l}{c' + c}$ als nach $\frac{d + l}{c' + c}$ Min. 146) $\frac{l - d}{c' + c}$.

147) Die Entfernung der Punkte A und B ist $nt + l$, wenn die Körper die Entfernung l vor ihrem Zusammenstoßen haben, dagegen $nt - l$, wenn sie die Entfernung l nach ihrem Zusammenstoßen haben. Im ersten Falle findet das Zusammentreffen nach $t + \frac{l}{n}$, im zweiten Falle nach $t - \frac{l}{n}$ Minuten statt.

148) Das Dampfschiff gebraucht 4 Stunden, und die Entfernung von M bis N beträgt $9\frac{1}{3}$ Meilen.

149) Im ersten Falle nach $1\frac{1}{4}$ Stunde, im zweiten nach $14\frac{3}{8}$ Stunden nach Abgang des Reiters.

150) Die Entfernung der Orte C und D beträgt $10\frac{1}{2}$ Meilen.

151) $31\frac{7}{8}$ Meilen. 152) 240 engl. Meilen.

---

*) Die Zeichen + oder — vor $c't$ beziehen sich auf die Fragen: t Minuten später oder früher, sowie die Zeichen + oder — vor d auf die Fragen: d *m* rückwärts oder vorwärts.

153) A ist von B 60 *km* entfernt. Nach dem Zusammentreffen hatte der Fußgänger noch 15 *km* abzumachen.

154) Zum ersten Male um 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Min., zum zweiten Male um 2 Uhr $10\frac{10}{11}$ Min. u. s. w., jedesmal 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Min. später. Im ganzen werden sie 11mal übereinander stehen.

155) α) 11mal, und zwar nach 12 Uhr zum ersten Mal um 12 Uhr $32\frac{8}{11}$ Minuten, hierauf um 1 Uhr $38\frac{2}{11}$ Minuten, um 2 Uhr $43\frac{7}{11}$ Min., um 3 Uhr $49\frac{1}{11}$ Min., um 4 Uhr $54\frac{6}{11}$ Min., gerade um 6 Uhr u. s. w., jedesmal 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Min. später;

β) 22mal, jedesmal nach $32\frac{8}{11}$ Minuten, um 3 Uhr, 3 Uhr $32\frac{8}{11}$ Minuten, 4 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten u. s. w.;

γ) 1) $2\frac{362}{719}$, 2) $16\frac{568}{1427}$, 3) $30\frac{30}{59}$ Sekunden nach halb ein Uhr.

156) α) Nach $\frac{d \pm ct}{c' - c}$, $\frac{d \pm ct + m}{c' - c}$, $\frac{d \pm ct + 2m}{c' - c}$ u. s. w.

$\frac{d \pm ct + (n-1)m}{c' - c}$ Sekunden.

β) Nach $\frac{d \mp ct}{c' + c}$, $\frac{d \mp ct + m}{c' + c}$, $\frac{d \mp ct + 2m}{c' + c}$ u. s. w.

$\frac{d \mp ct + (n-1)m}{c' + c}$ Sekunden.

157) 36 *m*. 158) Nach $2t' - t$ Sekunden.

159) Nach 5 Tagen mittags 12 Uhr mittlerer Sonnenzeit. Beide Uhren zeigen dann auf 12 Uhr 5 Min.

160) α) 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 2,8 Sekunden.

β) *a*) $1\frac{3}{5}$ Jahr od. 584,387 Tage, *b*) *c*) u. *d*) $\frac{4}{5}$ J. od. 292,19 T.

161) α) Nach $tt' : (t + t')$ Sekunden;

β) nach $\frac{m+n}{2c' - c'' - c'''}$ Zeiteinheiten. Im allgemeinen ist diese Zeit nicht das arithmetische Mittel der beiden Zeiten $\frac{m}{c' - c''}$ und $\frac{n}{c' - c'''}$ für das Zusammenstoßen des Körpers A mit den beiden Körpern B und C. Nur in dem besonderen Falle, wo $c'' = c'''$ oder $m : n = (c' - c'') : (c' - c''')$ ist, findet dieses statt. Für das Beispiel ist $x = 10$; das Mittel aus den beiden Zeiten 6 und 18 des Zusammenstoßens würde 12 geben.

162) 600. 163) In 13 Tagen.

164) In 2 Stunden 27 Min. nach Öffnung der ersten Röhre.

165) Bacchus 36 und Silen 18 Becher.

166) α) In 2 St. 24 Min.; β) in $mnp : (mn + np + pm)$ St.

167) In $26\frac{1}{4}$ Tagen.

168) Der leere Wasserbehälter wird in $mnp : (np + pm - mn)$ Stunden voll, oder der volle in $mnp : (mn - np - pm)$ Stunden leer, je nachdem $np + pm \gtrless mn$ ist.

169) Die eine 243, die andere 1701 *l*.

170) Der erste 7000, der zweite 6000.

171) Der eine 16, der andere 18.

172) α) 8; β) $\frac{bdgf(h - c) - aceg(h - f)}{beh(f - c)}$ *).

173) Die eine 30, die andere 24 Pferde.

174) In einer Höhe von $166\frac{5}{6}$ *m* über der Sohle.

175) Die Tiefe beträgt $186\frac{2}{3}$ *m*. 176) In 12 Stunden.

177) In der Zeit $\frac{E t_1 t_2 t_3 t_4}{e_1 t_2 t_3 t_4 + e_2 t_3 t_4 t_1 + e_3 t_4 t_1 t_2 + e_4 t_1 t_2 t_3}$.

178) Nach 10 Monaten. 179) Nach $\frac{ap+bq+cr+ds+et}{a+b+c+d+e}$ Monaten.

180) 428 Fl. 181) 3 Monate. 182) Nach $5\frac{1}{2}$ Monaten.

183) Nach einem halben Monate.

184) In Terminen von $4\frac{1}{2}$ Monaten.

185) $1\frac{1}{2}$ Monat. 186) Nach $1\frac{3}{4}$ Monaten. 187) 1000 *M*.

188) A bekommt 120, B 144 und C 144 *M*.

189) Die Mutter 1200 *M*, die Tochter 800 *M*, der Sohn 1800 *M*.

190) Dem A 180, dem B 108, dem C 120 *M*.

191) Dem ersten 24,50 *M*, dem zweiten 25,20 *M*.

192) A verliert 980, B 420 und C 945 Fl.

193) A erhält 5418, B 2380, C 3234, D 1848 und E 392 Fl.

194) A muß 36, B $46\frac{1}{2}$ Fl bezahlen.

195) Dem Cajus gebühren 12, dem Sempronius 18 Silberlinge.

196) Nein. Dem ersten gebührten 26, dem zweiten 14, dem dritten 2 Nüsse. Allgemein erhält der erste $3a - b - c$, der zweite $3b - a - c$, der dritte $3c - a - b$ Nüsse.

197) 9. 198) Man muß beide Glieder um 3 vermindern.

199) 19. 200) In $1\frac{1}{4}$ Stunde.

---

*) Newton, Arithmetica universalis. III. 2. 11.

201) α) Beide muß man entweder um $\frac{aq - bp}{p - q} = \frac{bp - aq}{q - p}$ vermehren, oder um $\frac{bp - aq}{p - q} = \frac{aq - bp}{q - p}$ vermindern; β) $\frac{2ab}{a + b}$.

202) Von $(a^2 + b^2) : (a - b)$. 203) $412\frac{1}{2}$ *km*.

204) B von C $18\frac{3}{4}$ *km* und C von D $28\frac{1}{8}$ *km*.

205) $(nr - ms) : (pr + s)$. 206) C hatte 5 *M* verloren.

207) Von der besseren Sorte 20, von der schlechteren 12 *kg*.

208) Ist m der Preis der besseren Sorte, also $m > n$, so muß man von der besseren Sorte $\frac{a(p - n)}{m - n}$, von der schlechteren $\frac{a(m - p)}{m - n}$ *kg* nehmen. 209) 6 *hl*.

210) Im ersten Falle muß das Hektoliter der schlechteren Sorte 99 *M* kosten, im zweiten Falle stellt sich für den Preis der schlechteren Sorte 0 heraus, d. h. er muß statt Wein reines Wasser hinzusetzen.

211) $[(a + b)p - am] : b$. 212) $87\frac{3}{4}$ *kg*.

213) 75 *kg*. 214) $70\frac{130}{141}$ Prozent. 215) $4643\frac{3}{4}$ *kg*.

216) $58\frac{1}{2}$ [30] *kg* von dem ersteren, $19\frac{1}{2}$ [70] *kg* von dem zweiten.

217) $11\frac{1}{4}$ Mark 14lötiges und $3\frac{3}{4}$ Mark 10lötiges Silber.

218) 750 *kg* reines Silber.

219) α) $221\frac{2}{13}$ *kg*; β) $9\frac{7}{27}$ *kg* oder 9,2593 *kg*.

220) 1270 Frc 57 Cent.

221) 1682 Frc 13 Cent.

222) 5740 *M*.

223) 17. 224) $221 : 273 = 187 : 231$.

225) Löst man die Gleichung auf, so erhält man als Resultat $\frac{ad - bc}{b + c - a - d}$, wenn die Zahl addiert, oder $\frac{bc - ad}{b + c - a - d}$, wenn die Zahl subtrahiert wird. Wegen der Gleichheit der beiden Produkte bc und ad werden beide Quotienten zu Null, wenn $b + c \gtrless a + d$ ist. In diesem Falle giebt es also keine Zahlen von verlangter Eigenschaft. Ist aber $b + c = a + d$, so erhält man als Resultat $\frac{0}{0}$, d. i. jede beliebige Zahl.

226) Die eine Zahl 28, die andere 42. 227) α) 102; β) 5.

228) α) 12 Fuß; β) in einer Höhe von $4\frac{11}{20}$ Fuß. 229) 2.

230) α) 200; β) a) 15, b) 120, c) 42. 231) 14172.

232) Der erste 2744, der zweite 729, der dritte 64 ccm.

233) 7, 8, 9 und 10. 234) $\frac{1}{2}$. 235) 2.

§ 65a.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) Wieviel voneinander unabhängige Gleichungen müssen gegeben sein, wenn zwei oder mehrere unbekannte Größen in denselben vorkommen?

2) Lassen sich aus folgenden Gleichungen die unbekannten Größen bestimmen?

I. $\begin{cases} x + y = 17, \\ 3x + 3y = 51. \end{cases}$ II. $\begin{cases} x - y = m, \\ ax - ay = n. \end{cases}$

III. $\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 19, \\ 5x + 8y + 11z = 24, \\ 7x + 11y + 4z = 43. \end{cases}$ IIII. $\begin{cases} x + y - z = a + b, \\ x - y + z = a - b, \\ y - z = b. \end{cases}$

3) Wie werden Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen aufgelöst? Worin besteht die Substitutions-, Kombinations-, Additions- oder Subtraktions- und die Bézout'sche (französische) Methode?

4) $x + y = 6912,$
$x - y = 4444.$

5) $x + y = s,$
$x - y = d.$

6) $x + 13y = 176,$
$x + 7y = 98.$

7) $x + 1\frac{2}{3}y = 26\frac{1}{12},$
$4\frac{5}{6}y - x = 44\frac{7}{8}.$

8) $x + ay = b,$
$cx + y = d.$

9) $mx + y = p,$
$nx + y = p.$

10) $x + 17y = 300,$
$11x - y = 104.$

11) $2\frac{3}{7}x - \frac{3}{4}y = 116,$
$1\frac{3}{5}x - y = 40.$

12) $1{,}543\,689x - y = 1{,}543\,689,$
$x - 0{,}839\,2867y = 0{,}839\,2867.$

13) $\dfrac{x + 5143}{3y + 11} = 37,$
$\dfrac{3262 - x}{2y - 11} = 43.$

14) $\dfrac{4x + 81}{10y - 17} = 6,$
$\dfrac{12x + 97}{15y - 17} = 4.$

15) α) $x + \frac{1}{11}y = 71,$
$y - \frac{1}{13}x = 61;$

β) $7x - \frac{1}{5}y = 48,$
$5y + \frac{1}{7}x = 26.$

16) $\dfrac{x}{3,141\,59} + 3,141\,59y = 3,141\,59^2 + 1,$

$3,141\,59x - \dfrac{y}{3,141\,59} = 3,141\,59^2 - 1.$

17) α) $13x + 11y = 194,$
$13x - 11y = 40;$

β) $ax + by = a^2 + 2ab - b^2,$
$ax - by = a^2 + b^2.$

18) $\dfrac{x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a+b}.$
$\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{1}{a-b}.$

19) $\dfrac{1}{x} = m - \dfrac{1}{y},$
$\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} - n.$

20) α) $\dfrac{x + a}{n} + y - b = 2a,$

$x + a + \dfrac{y - b}{a} = 1 + na;$

β) $\sqrt{x + y} = a + b,$

$x - y = (a - b)\sqrt{x + y}.$

21) $mx - ny = 0,$
$x - y = d.$

22) $mx + ny = p,$
$rx + sy = t.$

Welche besonderen Werte können die Unbekannten x und y erhalten?

23) $abx \mp cdy = e,$
$afx - cgy = h.$

24) $17x - 13y = 144,$
$23x + 19y = 890.$

25) $5x - 7y = 20,$
$9x - 11y = 44.$

26) $nx + \frac{1}{n}y = n,$
$\frac{1}{n}x + ny = n.$

27) $1209\frac{1}{3} = 60x + 77y,$
$24x - 35y = -152\frac{1}{3}.$

28) $a(a - x) = b(x + y - a),$
$a(y - b - x) = b(y - b).$

29) $\dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{7} = 6,3,$

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{53y}{56} = 39,2.$

30) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{c},$

$\dfrac{x}{m} - \dfrac{y}{n} = \dfrac{1}{p}.$

31) $1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}y + 4\frac{5}{12},$
$4\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y - 21\frac{7}{12}.$

32) $a(x + y) - b(x - y) = 2a,$
$a(x - y) - b(x + y) = 2b.$

33) $(a + b)x - (a - b)y = 4ab,$
$(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2.$

34) $\frac{1}{2}(a + b - c)x + \frac{1}{2}(a - b + c)y = a^2 + (b - c)^2,$
$\frac{1}{2}(a - b + c)x + \frac{1}{2}(a + b - c)y = a^2 - (b - c)^2.$

35) $(a + b)x + (c - 2b)^2 = (b + c)y + a(a - 4b) + 4b^2,$
$(a - c)x - a(a + b - c) = 5bc - 4c^2 - 2b^2 - (b - c)y.$

36) α) $\frac{13 + x}{7} + \frac{3x - 8y}{3} = x + y - 5\frac{1}{3},$
$\frac{11 - x}{2} + \frac{4x + 8y - 2}{9} = 8 - (y - x);$

β) $\frac{1}{3}(3x - 2y) + 1 + \frac{1}{3}(11y - 10) = \frac{1}{7}(4x - 3y + 5) + \frac{1}{3}(45 - x),$
$45 - \frac{1}{3}(4x - 2) = \frac{1}{18}(55x + 71y + 1).$

37) $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = c,$
$\frac{m}{x} - \frac{n}{y} = p.$

38) $ax + by = 2(a^2 - b^2),$
$\frac{y}{a - b} - \frac{x}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$

39) $\frac{5y}{6} - \frac{4y - 19}{3} = \frac{x}{6} + \frac{20 - 2y}{3},$
$\frac{x + 5y}{6} + 5 = \frac{2y + 21}{3}.$

40) $\frac{7y + 13 - 5x}{4} + y = 2x - \frac{3y + 2x - 16}{3},$
$x + \frac{5y + 2x}{6} - \frac{3x - 12 + 8y}{5} = 4 - \frac{15 + 2y - 4x}{3}.$

41) $\frac{13}{x + 2y + 3} = -\frac{3}{4x - 5y + 6},$
$\frac{3}{6x - 5y + 4} = \frac{19}{3x + 2y + 1}.$

42) $\frac{29 - x}{6} : \left(20 - \frac{4x + 5y}{9}\right) = \frac{1}{3},$
$x - \frac{3x + 4y}{7} - \frac{9x - 3y - 1}{13} = 2y - x - 16.$

43) $10[x + 9(y - 8[x + 7])] = 6,$
$5[x + 4(y - 3[x + 2])] = 1.$

44) $(x + y) : (y - x) = 15 : 8,$
$9x - \frac{3y + 44}{7} = 100.$

45) $(5x + 7y) : (3x + 11) = 13 : 7.$
$(11x + 27) : (7x + 5y) = 19 : 11.$

46) $(ax + by) : (cx + d) = m : n,$
$(e + fy) : (gx + hy) = p : q.$

47) $(mx + ny) : (px - qy) = a : b,$
$(rx + sy) : (tx - uy) = c : d.$

48) $\alpha)$ $ax = by + \frac{a^2 + b^2}{2},$ $\beta)$ $\frac{x}{m-a} + \frac{y}{m-b} = 1,$
$(a - b)x = (a + b)y;$ $\frac{x}{n-a} + \frac{y}{n-b} = 1.$

49) $\frac{m}{n+y} = \frac{n}{m-x},$
$\frac{p}{q-x} = \frac{q}{p+y}.$

50) $\frac{x+y-1}{x-y+1} = a,$
$\frac{y-x+1}{x-y+1} = ab.$

51) $\frac{a}{a+c}x - y = \frac{a-c}{b} - \frac{a}{a+c}y,$
$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = \frac{b}{ac}.$

52) $\frac{x}{n^2-1} - \frac{y}{a^2-1} = a^2 - n^2,$
$\frac{x}{a^2+1} + \frac{y}{n^2+1} + 2 = a^2 + n^2.$

53) $(a + 2b)x - (a - 2b)y = 6ac,$
$(a + 3c)y - (a - 3c)x = 4ab.$

54) $\frac{2(a^2 - b^2)}{x} - a = b\,\frac{y}{x},$
$\frac{1}{(a-b)x} - \frac{1}{(a+b)y} = \frac{a^2+b^2}{abxy}.$

55) $1 + x = y - 1 + 2\,\frac{(a-b)^2 - 2b^2}{a^2 - b^2},$
$by - ax = \frac{ab(3a+b)}{a^2-b^2} - (a+b) + \frac{ab}{a+b}.$

56) $\frac{306a^3 + 324a^2b - 1015ab^2 - 810b^3}{120ab(3a+2b)(7a+6b)xy} - \frac{1}{(3a+2b)y} =$
$-\frac{1}{(7a+6b)x}.$
$\frac{1026a^4 - 393a^2b^2 - 430b^4}{120abxy} - \frac{7a^2 - 6b^2}{x} = \frac{3a^2 - 2b^2}{y}.$

57) $\alpha)$ $x^2 - y^2 = a,$ $\beta)$ $(x + 2y)^2 - (y - 2x)^2 = 168,$
$x - y = b.$ $(x + 2y) + (y - 2x) = 12.$

58) $(x + 1)(y - 2) = (3 - x)(4 - y) - 1,$
$\frac{2x-3}{4y-5} - \frac{3x-4}{6y-7} = \frac{5}{2(4y-5)(7-6y)}.$

59) $2x : y = 29 : 14$,

$y + 4x + 6 = \frac{4y^2 + 13xy - 12x^2}{4y - 3x - 1}$.

60) $\frac{7 + 8x}{10} - \frac{3x - 6y}{2x - 8} = 4 - \frac{9 - 4x}{5}$,

$\frac{6y + 9}{4} = 3\frac{1}{4} + \frac{3y + 4}{2} - \frac{3y + 5x}{4y - 6}$.

61) $\frac{4x^2 + 2xy + 288 - 6y^2}{2x + 13 - 2y} = 2x + 3y - 131$,

$5x - 4y = 22$.

62) $\frac{48 + 11y}{4x + 2} = \frac{16x^2 + 12xy - 8x + 5y + 28}{4x - 2} - (4x + 3y)$,

$2x + 4 = \frac{8x^2 - 18y^2 + 108}{4x + 6y + 3} + 3y$.

63) α) $3y - \frac{151 - 16y}{4x - 1} = \frac{9xy - 110}{3x - 4}$,

$\frac{6y^2 + 130 - 24x^2}{2y - 4x + 3} = 6x + 3y + 1$;

β) $\frac{4x - 8y + 5}{2} = \frac{10x^2 - 12y^2 - 14xy + 2x}{5x + 3y + 3} + 2$,

$\sqrt{6 + x} : \sqrt{6 - y} = 3 : 2$;

γ) $\sqrt{y} - \sqrt{y - x} = \sqrt{20 - x}$,

$\sqrt{y - x} : \sqrt{20 - x} = 3 : 2$.

64) $x - \frac{2xy}{2y + 5} = \frac{15x + 4y}{6y - 2x} + \frac{5x^2 + 4y^2 + 105}{(x - 3y)(2y + 5)}$,

$3 - \frac{7x + 2y}{5x} = 5 - \frac{5y + 9}{3x}$.

65) $(10x + 12y - 14)(x + 1\frac{1}{2}y + 2) - (2x - 3y + 4)(5x - 6y + 7) = 54xy + 12$,

$(15x - 4y)^2 - (10x - 6y)^2 - (11x + 1)^2 + (4y - 3)^2 - 5^2 = (3 - 2x)^2 - (2y - 1)^2 - 91$.

66) $\frac{10}{2x + 3y - 29} + \frac{9}{7x - 8y + 24} = 8$,

$\frac{2x + 3y - 29}{2} = \frac{7x - 8y}{3} + 8$*).

*) Man setze $\frac{1}{2x + 3y - 29} = z$, $\frac{1}{7x - 8y + 24} = u$.

67) $\frac{8}{2x-3y+17}+5x-8y+44=5,$

$\frac{5}{2x-3y+17}+16y=10x+88\frac{1}{2}.$

68) $\frac{1}{1-x+y}-\frac{1}{x+y-1}=\frac{2}{3},$

$\frac{1}{\frac{1}{1-x+y}-\frac{1}{1-x-y}}=\frac{3}{4}.$

69) α) $\frac{1}{x+\frac{1}{y-\frac{a}{x}}}=\frac{1}{x-\frac{1}{y-\frac{b}{x}}}$ β) $\frac{4}{\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{y}}}{4}$

$\frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1.$ $x+\frac{3}{y}=8.$

70) $\sqrt{72+x^2+4y^2+4xy}=x+2y+2,$

$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=\sqrt{x+y+\sqrt{60+4xy}+3}.$

71) $y=-\sqrt{x^2-y\sqrt{y^2+8x}}+x,$

$x=\sqrt{x\sqrt{x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-x-y+4}}}+y^2+y.$

72) $5\sqrt{x}+3\sqrt{y}=8.$ 73) $3\sqrt[3]{x}=16+5\sqrt[3]{y},$

$3\sqrt{x}-7=-4\sqrt{y}.$ $7\sqrt[3]{y}=9\sqrt[3]{x}-8.$

74) α) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{y-2}}=\frac{1}{6},$ β) $\frac{6}{x-5}+\frac{\sqrt{y-3}}{5}=3,$

$\sqrt{\frac{2-y}{3+x}}\cdot\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=1\frac{1}{2}.$ $(x-5)\sqrt{y-3}=15.$

75) α) $\frac{1}{2\sqrt{x-y}}-\frac{1}{2\sqrt{x+y}}=\frac{1}{15},$

$15\sqrt{x+y}+15\sqrt{x-y}=8\sqrt{x^2-y^2}$ *);

β) $\sqrt{x}-\sqrt{m-y}=\sqrt{x-y},$ γ) $\sqrt{a-x}-\sqrt{y-x}=\sqrt{y},$

$\sqrt{x-y}+\sqrt{m-y}=\frac{5}{4}\sqrt{m-y};$ $\sqrt{b-x}+\sqrt{y-x}=\sqrt{y}.$

---

*) Man setze $\sqrt{x+y}=z,$ $\sqrt{x-y}=u,$ bestimme zuerst z und u und mit Hülfe der gefundenen Werte x und y.

76) $x + y = 16,$
$z + x = 22,$
$y + z = 28.$

77) $x + 2y = 23,$
$3x + 4z = 57,$
$5y + 6z = 94.$

78) $x = 21 - 4y,$
$z = 9 - \frac{1}{5}x,$
$y = 64 - 7\frac{1}{2}z.$

79) $3{,}4x - 1{,}2y = -8{,}16,$
$5{,}6x + 1{,}2z + 13{,}44 = 0,$
$5{,}6y = 38{,}08 + 3{,}4z.$

80) $a_1x + b_1y = m_1,$
$a_2y + b_2z = m_2,$
$a_3z + b_3x = m_3.$

81) $x + y - z = 132,$
$x - y + z = 65{,}4,$
$-x + y + z = -1{,}2.$

82) $x + y + z = m,$
$a_1x + b_1y = n_1,$
$a_2y + b_2z = n_2.$

83) $x + y + z = 5,$
$3x - 5y + 7z = 75,$
$9x - 11z + 10 = 0.$

84) $x + y + z = a + b + c,$
$c(x - y) + a(y - z) + b(z - x) = 0,$
$b(x + y - c - a) + c(y + z - a - b) + a(z + x - b - c) = 0.$

85) $x - y + z = 6,$
$3\frac{1}{2}x - 4\frac{3}{4}y + 5\frac{1}{2}z = 32,$
$10\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}y + 11z = 71.$

86) $3x - 5y + 4z = 0{,}5,$
$7x + 2y - 3z = 0{,}2,$
$4x + 3y - z = 0{,}7.$

87) α) $a_1x + b_1y + c_1z = m_1,$
$a_2x + b_2y + c_2z = m_2,$
$a_3x + b_3y + c_3z = m_3$ *);

β) $\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} + \frac{c_1}{z} = m_1,$
$\frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{y} + \frac{c_2}{z} = m_2,$
$\frac{a_3}{x} + \frac{b_3}{y} + \frac{c_3}{z} = m_3.$

88) $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} + \frac{z}{9} = 258,$
$\frac{x}{7} + \frac{y}{9} + \frac{z}{5} = 304,$
$\frac{x}{9} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 296.$

89) $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{b-c} + \frac{z}{c+a} = 2c,$
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{b-c} + \frac{z}{c-a} = 2a,$
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{b-c} - \frac{z}{c+a} = 2a - 2c.$

---

*) Bei der Auflösung dieser Gleichung ist weder die Substitutionsmethode, noch die Kombinationsmethode oder die Additions- und Subtraktionsmethode anzuempfehlen, sondern die Bézoutsche Methode der unbestimmten Koeffizienten. Am einfachsten erhält man x, wenn man die erste Gleichung mit $b_2c_3 - b_3c_2$, die zweite mit $b_3c_1 - b_1c_3$, die dritte mit $b_1c_2 - b_2c_1$ multipliziert und sämtliche multiplizierten Gleichungen zu einander addiert.

90) $x : y : z = 5 : 12 : 13$ (Proportion),
$5x + 12y = 12z + 13.$

91) $(x + 2y) : (3y + 4z) : (5x + 6z) = 7 : 8 : 9$ (Proportion),
$x + y - z = 126.$

92) $(5 - 4x) : (6y + 1) = (55 - 2x) : (3y + 74),$
$(3 + x) : (3z - 2) = (2x + 9) : 6z,$
$(3y - 1) : (3z + 1) = (7y + 3) : (7z + 21).$

93) $$\frac{5x-8y+3z}{2} - \frac{7y-2z-3x}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3y-5x+1}{4} - \frac{7z-3x}{9},$$
$$\frac{x-2y+3z}{3} - \frac{4x+5y+6}{5} - \frac{7x+8z+9}{8} = \frac{10y+11z+12}{13} - 12,$$
$$\frac{10x-9y}{4} - \frac{8y-7z}{5} = \frac{6z-5x}{13} + \frac{x+y-z}{3} - 2.$$

94) α) $(c + a)x - (c - a)y = 2bc,$
$(a + b)y - (a - b)z = 2ca,$
$(b + c)z - (b - c)x = 2ab;$

β) $bx - ay = (b + a) : c,$
$cy + bz = (c + b) : a,$
$az - cx = (a - c) : b.$

95) α) $$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{b+c} = b - a,$$
$$\frac{y}{c-a} + \frac{z}{c+a} = c + a,$$
$$\frac{x}{b-c} - \frac{z}{a-b} = b - c;$$

β) $$\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b,$$
$$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c,$$
$$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a;$$

γ) $(a - x)(b - y) = z,$
$(a' - x)(b' - y) = z,$
$(a'' - x)(b'' - y) = z;$

δ) $(4 - x)(244 - y) = z,$
$(7 - x)(124 - y) = z,$
$(13 - x)(64 - y) = z.$

96) $$\frac{bx + ay}{c} = \frac{a - b}{(b - c)(a - c)},$$
$$\frac{cy + bz}{a} = \frac{b - c}{(c - a)(b - a)},$$
$$\frac{az + cx}{b} = \frac{c - a}{(a - b)(c - b)}.$$

97) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m,$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n,$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = p.$$

98) $m = \frac{xy}{ay + bx}$,

$n = \frac{yz}{cz + dy}$,

$p = \frac{zx}{ex + fz}$.

99) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a$,

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b$,

$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$.

100) α) $\frac{(a-b)c}{z} + \frac{(b-c)a}{x} + \frac{(c-a)b}{y} = 0$,

$\frac{c}{z} + \frac{b}{y} + \frac{a}{x} = a + b + c$,

$\frac{c}{z} - \frac{b}{y} + \frac{a}{x} = 3b - (a + c)$;

β) $x + y + z = (a + b + c)^2$;

$ay + bz + cx = 3(ab^2 + bc^2 + ca^2)$,

$ax + by + cz = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$.

101) α) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 2{,}9$,

$\frac{5}{x} - \frac{6}{y} - \frac{7}{z} = -10{,}4$,

$-\frac{8}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 14{,}9$;

β) $\frac{3}{x} - \frac{4}{5y} + \frac{1}{z} = 7\frac{3}{5}$,

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{2}{z} = 10\frac{1}{6}$,

$\frac{4}{5x} - \frac{1}{2y} + \frac{4}{z} = 16\frac{1}{10}$.

102) $xy + yz + zx = 9xyz$,

$yz + 2zx - 3xy = -4xyz$,

$3yz - 2zx + xy = 4xyz$.

103) $(z + x)a - (z - x)b = 2yz$,

$(x + y)b - (x - y)c = 2zx$,

$(y + z)c - (y - z)a = 2xy$*).

104) α) $ax + by - cz = 2xy$,

$-ax + by + cz = 2yz$,

$ax - by + cz = 2zx$;

β) $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} - \sqrt{xz} = ab + bc - ac$,

$\sqrt{xy} - \sqrt{yz} + \sqrt{xz} = ab - bc + ac$,

$-\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} = -ab + bc + ac$.

---

*) Statt aus den bekannten Größen a, b und c die unbekannten Größen x, y, z zu entwickeln, suche man umgekehrt die Größen a, b, c durch x, y, z auszudrücken, und benutze dann die sich ergebenden drei Gleichungen zur Bestimmung von x, y und z.

105) $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$,
$(a-b)y+(b-c)z+(c-a)x=ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$,
$x+y+z=0$.

106) α) $115(113-x)+719(y-219)-590(337-z)=27$,
$\frac{5(113-x)+2}{2(y-219)}=2$,
$\frac{337-z}{y-221}=4$*);

β) $\frac{12}{2x+3y}-\frac{7,5}{3x+4z}=1$, γ) $\frac{7}{x-2y}+\frac{y-2z}{9}=-7\frac{1}{9}$,
$\frac{30}{3x+4z}+\frac{37}{5y+9z}=3$, $\frac{y-2z}{11}+\frac{13}{z-2x}=6\frac{9}{22}$,
$\frac{222}{5y+9z}-\frac{8}{2x+3y}=5$; $\frac{15}{z-2x}+\frac{17}{x-2y}=-9\frac{1}{2}$.

---

107) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=m_1$,
$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=m_2$,
$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=m_3$,
$a_4x+b_4y+c_4z+d_4u=m_4$.

108) $1\frac{2}{3}x+2\frac{3}{4}y=105$,
$3\frac{4}{5}x+4\frac{5}{6}z=317$,
$5\frac{6}{7}z+6\frac{7}{8}u=741$,
$7\frac{8}{9}u+8\frac{9}{10}x=835$.

109) $x-2y+3z-4u=-10$,
$-5x+6y-7z+8u=18$,
$9x-10y-11z+12u=4$,
$-13x+14y+15z-16u=-4$.

110) $0,12x-0,23y+0,34z=2,071$,
$0,45y-0,56z+0,67u=-8,044$,
$0,78z-0,89u+0,87x=9,560$,
$0,65u-0,43x+0,21y=-4,881$.

111) α) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}+\frac{u}{9}=2800$,
$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9}+\frac{u}{11}=2144$,
$\frac{x}{7}+\frac{y}{9}+\frac{z}{11}+\frac{u}{13}=1744$,
$\frac{x}{9}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}+\frac{u}{15}=1472$;

β) $x+y+z=3a+b+c$,
$x+y+t=a+3b+c$,
$x-z-t=a+b-c$,
$y+z-t=3a-b-c$.

---

*) Man setze $113-x=x'$, $y-219=y'$, $337-z=z'$, und bestimme aus x', y', z' die Unbekannten x, y und z.

112) $\alpha)$ $x + y + z + t + u = a,$
$x + y + z + t + v = b,$
$x + y + z + u + v = c,$
$x + y + t + u + v = d,$
$x + z + t + u + v = e,$
$y + z + t + u + v = f;$

$\beta)$ $x + y + z + t + u + v = (a + b + c)^2,$
$x + y + t = (a + b)^2,$
$ct + bu + av = 6abc,$
$(t - u)(b + c) = 2a(y - z),$
$(u - v)(a + b) = 2c(x - y),$
$ax + by + cz = a^3 + b^3 + c^3.$

113) $\alpha)$ $yztu + xztu + xytu + xyzu + xyzt = xyztu,$
$yztv + xztv + xytv + xyzv + xyzt = xyztv,$
$yzuv + xzuv + xyuv + xyzv + xyzu = xyzuv,$
$ytuv + xtuv + xyuv + xytv + xytu = xytuv,$
$ztuv + xtuv + xzuv + xztv + xztu = xztuv,$
$ztuv + ytuv + yzuv + yztv + yztu = yztuv;$

$\beta)$ $x + ay + a^2z + a^3t = m,$
$x + by + b^2z + b^3t = n,$
$x + cy + c^2z + c^3t = o,$
$x + dy + d^2z + d^3t = p$ *).

Exponential-Gleichungen.

114) $a^x a^{5y} = (a^7)^4$ **),
$a^{7x} : a^6 = (a^y)^3.$

115) $\sqrt[3]{m^x} \cdot \sqrt[7]{m^y} = m^7,$
$\sqrt[4]{m^x} : \sqrt[3]{(m^2)^y} = \frac{1}{m^{11}}.$

116) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a} = \sqrt[12]{a^7},$
$\sqrt[x]{a^3} : \sqrt[y]{a^4} = 1.$

117) $\sqrt[x+1]{a^3} \cdot a^{y+2} = \sqrt[4]{(a^3)^9},$
$\sqrt[x+1]{a^7} : a^{y-5} = a^2 \sqrt[4]{a^3}.$

118) $\sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1,$
$\sqrt[4]{m^{3x-1}} \cdot \sqrt[8]{m^{5y-1}} = m^{16}.$

119) $a^x b^y = p,$
$c^x d^y = q.$

120) $\sqrt[x]{a} : \sqrt[y]{b} = m,$
$\sqrt[x]{c} : \sqrt[y]{d} = n.$

121) $3^x \cdot 4^y = 3981312,$
$2^y \cdot 5^x = 400000.$

*) Gleichungen von dieser Form kommen bei der Interpolation der Reihen vor.
**) Die Gleichungen 114—118 und 130 sind ohne Hülfe der Logarithmen zu behandeln.

122) $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36,$
$\sqrt{4^{-x}} : \sqrt[-10]{256^y} = 4.$

123) $\sqrt[x]{5} \cdot \sqrt[y]{0,2} = 1.$
$\sqrt[x]{4,92} : \sqrt[y]{1,23} = 4$

124) $\sqrt[x]{59\,049} : \sqrt[y]{1296} = 1,5,$
$\sqrt{\sqrt[x]{1\,048\,576} : \left(\sqrt[y]{4096}\right)^{-2}} = 256.$

125) $\sqrt[x]{64} \cdot 3^y = 36,$
$\sqrt[x]{1728} \cdot 5^y = 300.$

126) $x^y = 243,$
$\sqrt[y]{1024} = (\frac{2}{3}x)^2.$

127) $\sqrt[x]{x+y} = 2,$
$(x+y)3^x = 279\,936.$

128) $[\frac{1}{x}]^{\frac{1}{y}} = 0,692\,20,$
$x^{2,302\,585} = 10^y : 52,273\,5.$

129) $2^x \cdot 3^y = 18,$
$4^x \cdot 5^z = 500,$
$6^y \cdot 7^z = 12\,348.$

130) $(a^z)^y \cdot (a^y)^x \cdot (a^x)^z = a^{16xyz},$
$(a^z)^y : [(a^y)^x : (a^x)^z] = a^{14xyz},$
$(a^z)^y \cdot (a^y)^x : (a^x)^z = a^{6xyz}.$

§ 65b.

Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen in § 65a.

4) $x = 5678,\ y = 1234.$ 5) $x = \frac{1}{2}(s+d),\ y = \frac{1}{2}(s-d).$

6) $x = 7,\ y = 13.$ 7) $x = 7\frac{8}{9},\ y = 10\frac{1}{12}.$

8) $x = \frac{ad-b}{ac-1},\ y = \frac{bc-d}{ac-1}.$ 9) $x = 0,\ y = p.$

10) $x = 11,\ y = 17.$ 11) $x = 70,\ y = 72.$

12) $x = 1,543\,69,\ y = 0,839\,29.$ 13) $x = 37,\ y = 43.$

14) $x = 2\frac{1}{4},\ y = 3\frac{1}{5}.$ 15) $\alpha)$ $x = 65,\ y = 66;$ $\beta)$ $x = 7,\ y = 5.$

16) $x = 3,141\,59,\ y = 3,141\,59.$ 17) $\alpha)$ $x = 9,\ y = 7;$ $\beta)$ $x = a+b,\ y = a-b.$

18) $x = \frac{a}{a-b},\ y = \frac{b}{a+b}.$ 19) $x = \frac{2}{m+n},\ y = \frac{2}{m-n}.$

20) $\alpha)$ $x = (n-1)a,\ y = a+b;$ $\beta)$ $x = a(a+b),\ y = b(a+b).$

21) $x = \frac{nd}{n-m},\ y = \frac{md}{n-m}.$ 22) $x = \frac{ps-nt}{ms-nr},\ y = \frac{mt-pr}{ms-nr}.$

23) $x = \frac{eg \mp dh}{a(bg \mp df)},\ y = \frac{ef-bh}{c(bg \mp df)}.$

24) $x = 23,\ y = 19.$ 25) $x = 11,\ y = 5.$

26) $x = n^2 : (n^2+1),\ y = n^2 : (n^2+1).$

27) $x = 7\frac{3}{4}$, $y = 9\frac{2}{3}$. 28) $x = a - b$, $y = a + b$.

29) $x = 6{,}3$, $y = 39{,}2$.

30) $x = \frac{(bp + cn)am}{(an + bm)cp}$, $y = \frac{(ap - cm)bn}{(an + bm)cp}$.

31) $x = -5\frac{1}{2}$, $y = -9\frac{1}{2}$.

32) $x = (a + b) : (a - b)$, $y = (a - b) : (a + b)$.

33) $x = a + b$, $y = a - b$. 34) $x = a + b - c$, $y = a - b + c$.

35) $x = a - 2b + 3c$, $y = 3a - 2b + c$.

36) α) $x = 1$, $y = 2$; β) $x = 5$, $y = 6$.

37) $x = (an - bm) : (cn - bp)$, $y = (an - bm) : (cm - ap)$.

38) $x = (a^2 - b^2) : a$, $y = (a^2 - b^2) : b$.

39) $x = 5$, $y = 7$. 40) $x = 5$, $y = 4$.

41) $x = 7$, $y = 8$. 42) $x = 11$, $y = 11$.

43) $x = -9\frac{678}{925}$, $y = -20\frac{662}{925}$.

44) $x = 14$, $y = 46$. 45) $x = 1$, $y = 3$.

46) $x = \frac{dm(hp - fq) - benq}{(an - cm)(hp - fq) - bgnp}$,

$y = \frac{eq(an - cm) - dgmp}{(an - cm)(hp - fq) - bgnp}$.

47) Den Gleichungen genügen die Werte $x = 0$ und $y = 0$, wenn $(bn + aq)(ct - dr)$ ungleich $(ap - bm)(ds + cu)$ ist. Sind die beiden Produkte einander gleich, so genügen alle Werte von x und y, welche in der Beziehung zu einander stehen, daß $y = \frac{ct - dr}{ds + cu}x$ ist.

48) α) $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$;

β) $x = -\frac{(a - m)(a - n)}{(a - b)}$, $y = \frac{(b - m)(b - n)}{(a - b)}$.

49) $x = \frac{(q^2 - p^2)n - (m^2 - n^2)p}{nq - mp}$, $y = \frac{(m^2 - n^2)q - (q^2 - p^2)m}{nq - mp}$.

50) $x = (a + 1) : (ab + 1)$, $y = a(b + 1) : (ab + 1)$.

51) $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, $y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

52) $x = (a^2 + 1)(n^2 - 1)$, $y = (a^2 - 1)(n^2 + 1)$.

53) $x = a - 2b + 3c$, $y = a + 2b - 3c$.

54) $x = (a^2 - b^2) : a$, $y = (a^2 - b^2) : b$.

55) $x = (a - b) : (a + b)$, $y = (a + b) : (a - b)$.

56) $x = \frac{3a}{4b} - \frac{5b}{6a}$, $y = \frac{9a}{10b} + \frac{7b}{8a}$.

57) α) $x = (a + b^2) : 2b$, $y = (a - b^2) : 2b$;
β) $x = 3$, $y = 5$.
58) $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 2\frac{1}{2}$.
59) $x = 29$, $y = 28$.
60) $x = 9$, $y = 7$.
61) $x = 26$, $y = 27$.
62) $x = 3$, $y = 2$.
63) α) $x = 2$, $y = 9$; β) $x = 3$, $y = 2$.
γ) $x = 16$, $y = 25$.
64) $x = 2$, $y = 3$.
65) $x = 1$, $y = 2$.
66) $x = 5$, $y = 7$.
67) $x = 9$, $y = 11$.
68) $x = 2$, $y = 2$.
69) α) $x = \frac{1}{2}(a + b + 2)$, $y = (a + b) : (a + b + 2)$;
β) $x = 10$, $y = -1\frac{1}{2}$.
70) $x = 3$, $y = 7$.
71) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$. Außer diesen Werten genügen noch $x = 0$, $y = 0$.
72) $x = (+1)^2 = 1$, $y = (+1)^2 = 1$.
73) $x = (-3)^3 = -27$, $y = (-5)^3 = -125$.
74) α) $x = (+2)^2 + 3 = 7$, $y = (+3)^2 + 2 = 11$;
β) $x = 8$, $y = 28$.
75) α) $x = 17$, $y = 8$;
β) $x = \frac{5}{4}m$, $y = \frac{4}{5}m$;
γ) $x = \frac{ab}{a+b}$, $y = \frac{a+b}{4}$.
76) $x = 5$, $y = 11$, $z = 17$.
77) $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.
78) $x = 1\frac{2}{3}$, $y = 4\frac{5}{6}$, $z = 7\frac{8}{9}$.
79) $x = -1{,}2$, $y = 3{,}4$, $z = -5{,}6$.
80) $x = \frac{a_2 a_3 m_1 - a_3 b_1 m_2 + b_1 b_2 m_3}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}$, $y = \frac{a_3 a_1 m_2 - a_1 b_2 m_3 + b_2 b_3 m_1}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}$,
$z = \frac{a_1 a_2 m_3 - a_2 b_3 m_1 + b_3 b_1 m_2}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}$.
81) $x = 98{,}7$, $y = 65{,}4$, $z = 32{,}1$.
82) $x = \frac{(b_2 m - n_2) b_1 + (a_2 - b_2) n_1}{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2}$, $y = \frac{b_2 n_1 - (b_2 m - n_2) a_1}{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2}$,
$z = \frac{(a_1 m - n_1) a_2 - (a_1 - b_1) n_2}{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2}$.
83) $x = 5$, $y = -5$, $z = 5$.
84) $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$.
85) $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$.
86) $x = 0{,}1$, $y = 0{,}2$, $z = 0{,}3$.
87) α) $x = \frac{m_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + m_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + m_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}$,

$$y = \frac{m_1(c_2 a_3 - c_3 a_2) + m_2(c_3 a_1 - c_1 a_3) + m_3(c_1 a_2 - c_2 a_1)}{b_1(c_2 a_3 - c_3 a_2) + b_2(c_3 a_1 - c_1 a_3) + b_3(c_1 a_2 - c_2 a_1)},$$

$$z = \frac{m_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + m_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + m_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}.$$

Bemerkung: Der Wert von x läßt sich auch unter der Form

$$x = \frac{\Sigma m_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2)}{\Sigma a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2)}$$

darstellen, wenn man auf das cyklische Fortrücken der mit den Indices 1, 2, 3 versehenen Buchstaben achtet, wonach a_2 auf a_1, a_3 auf a_2 und a_1 auf a_3 folgt. Aus $m_1(b_2c_3 - b_3c_2)$ erhält man durch cyklisches Fortrücken das folgende Glied $m_2(b_3c_1 - b_1c_3)$ und hieraus das dritte $m_3(b_1c_2 - b_2c_1)$. In derselben Weise läßt sich das zweite Glied des Divisors aus dem ersten und hieraus das dritte ableiten. Die Summe aller Ableitungen wird durch das Zeichen Σ angedeutet. Durch cyklisches Fortrücken der Buchstaben in der Reihenfolge a, b, c, a.. und x, y, z, x.. erhält man aus dem Werte von x den von y und hieraus den von z. Eine besondere Auflösungs-Methode der Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen ist die durch Determinanten (§ 66). Man sehe: „Theorie und Anwendung der Determinanten von Dr. Baltzer"; ferner: „Die Determinanten als Gegenstand des Gymnasial-Unterrichts, von Dr. Dölp". Abhandlung im Programm des Gymnasiums zu Gießen 1865; sowie „Die Determinanten elementar behandelt von Dr. O. Hesse (Leipzig)".

β) Die Wurzelwerte sind die reciproken der in 87) α) gefundenen.

88) $x = 315, \quad y = 630, \quad z = 945.$

89) $x = a^2 - b^2, \quad y = b^2 - c^2, \quad z = c^2 - a^2.$

90) $x = 5, \quad y = 12, \quad z = 13.$ 91) $x = 51, \quad y = 76, \quad z = 1.$

92) $x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2.$ 93) $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

94) α) $x = b + c - a, \quad y = a + c - b, \quad z = a + b - c.$

β) $x = (b + c) : bc, \quad y = (c - a) : ca, \quad z = (a + b) : ab.$

95) α) $x = (a+b)(b-c), \quad y = (b+c)(c-a), \quad z = (c+a)(a-b);$

β) $x = b^2 - c^2, \quad y = c^2 - a^2, \quad z = a^2 - b^2;$

$$\gamma)\ x = \frac{ab(a' - a'') + a'b'(a'' - a) + a''b''(a - a')}{b(a' - a'') + b'(a'' - a) + b''(a - a')},$$

$$y = \frac{ab(b' - b'') + a'b'(b'' - b) + a''b''(b - b')}{a(b' - b'') + a'(b'' - b) + a''(b - b')},$$

$$z = -\frac{(a - a')(a' - a'')(a'' - a)(b - b')(b' - b'')(b'' - b)}{[(ab' - a'b) + (a'b'' - a''b') + (a''b - ab'')]^2};$$

δ) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 720.$

$$96)\ x = \frac{1}{b - c}, \quad y = \frac{1}{c - a}, \quad z = \frac{1}{a - b}.$$

$$97)\ x = \frac{2}{m + p - n}, \quad y = \frac{2}{m + n - p}, \quad z = \frac{2}{n + p - m}.$$

$$98)\ x = \frac{mnp(ace + bdf)}{bdmn + cenp - bemp}, \quad y = \frac{mnp(ace + bdf)}{aemp + dfnp - admn},$$

$$z = \frac{mnp(ace + bdf)}{acmn + bfmp - cfnp}.$$

$$99)\ x = \frac{2}{a + b}, \quad y = \frac{2}{c + a}, \quad z = \frac{2}{b + c}.$$

$$100)\ \alpha)\ x = \frac{a}{b + c - a}, \quad y = \frac{b}{a - b + c}, \quad z = \frac{c}{a + b - c};$$

β) $x = a^2 + 2bc, \quad y = b^2 + 2ca, \quad z = c^2 + 2ab.$

101) α) $x = 3\frac{1}{3}, \; y = 1\frac{3}{7}, \; z = \frac{10}{11}$; β) $x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{3}, \; z = \frac{1}{4}.$

102) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$.

103) $x = \frac{1}{2}(b + c)$, $y = \frac{1}{2}(c + a)$, $z = \frac{1}{2}(a + b)$.

104) α) $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b)$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$; β) $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$.

105) $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$.

106) α) $x = 111$, $y = 222$, $z = 333$; β) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; γ) $x = -\frac{5}{7}$, $y = \frac{1}{7}$, $z = \frac{4}{7}$.

107) $x = \dfrac{\Sigma m_1 [b_2(c_3 d_4 - c_4 d_3) + b_3(c_4 d_2 - c_2 d_4) + b_4(c_2 d_3 - c_3 d_2)]}{\Sigma a_1 [b_2(c_3 d_4 - c_4 d_3) + b_3(c_4 d_2 - c_2 d_4) + b_4(c_2 d_3 - c_3 d_2)]}$.

Über die Bedeutung von Σ und über die Ableitung von y, z und u aus dem Werte für x sehe man die Antwort zu 87 α).

108) $x = 30$, $y = 20$, $z = 42$, $u = 72$.

109) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$.

110) $x = 0,1$, $y = -2,3$, $z = 4,5$, $u = -6,7$.

111) α) $x = 315$, $y = 3465$, $z = 9009$, $u = 6435$; β) $x = a + b + c$, $y = a + b - c$, $z = a - b + c$, $t = -a + b + c$.

112) α) Setzt man $a + b + c + d + e + f = s$, so ist $x = \frac{1}{5}s - f$, $y = \frac{1}{5}s - e$, $z = \frac{1}{5}s - d$, $t = \frac{1}{5}s - c$, $u = \frac{1}{5}s - b$, $v = \frac{1}{5}s - a$; β) $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $t = 2ab$, $u = 2ca$, $v = 2bc$.

113) α) $x = 5$, $y = 5$, $z = 5$, $t = 5$, $u = 5$, $v = 5$. Die Gleichungen führen eigentlich auf eine Gleichung höheren Grades; es genügen auch noch die Werte: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$.

β) Zieht man die zweite Gleichung von der ersten, die dritte von der zweiten, die vierte von der dritten ab, so gelangt man zu Resultaten, welche bezüglich durch $a - b$, $b - c$, $c - d$ teilbar sind. Setzt man: $\dfrac{m - n}{a - b} = m'$, $\dfrac{n - o}{b - c} = n'$, $\dfrac{o - p}{c - d} = o'$, $\dfrac{m' - n'}{a - c} = m''$, $\dfrac{n' - o'}{b - d} = n''$, $\dfrac{m'' - n''}{a - d} = m'''$, so wird: $t = m'''$, $z = m'' - (a + b + c)m'''$, $y = m' - m''(a + b) + m'''(ab + bc + ca)$, $x = m - m'a + m''ab - m'''abc$.

114) $x = 3$, $y = 5$. 115) $x = 12$, $y = 21$.

116) $x = 3$, $y = 4$. 117) $x = 3$, $y = 4$.

118) $x = 11$, $y = 13$.

119) $x = \dfrac{\log b \cdot \log q - \log d \cdot \log p}{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}$,
$y = \dfrac{\log c \cdot \log p - \log a \cdot \log q}{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}$.

120) $x = \dfrac{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}{\log b \cdot \log n - \log d \cdot \log m}$,
$y = \dfrac{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}{\log a \cdot \log n - \log c \cdot \log m}$.

121) $x = 5, \quad y = 7.$ 122) $x = 6, \quad y = 10.$
123) $x = 1, \quad y = 1.$ 124) $x = 5, \quad y = 4.$
125) $x = 3, \quad y = 2.$ 126) $x = 3, \quad y = 5.$
127) $x = 7, \quad y = 121.$ 128) $x = 2{,}71828.., \; y = 2{,}71828...$
129) $x = 1, \; y = 2, \; z = 3.$ 130) $x = 0{,}1, \; y = 0{,}2, \; z = 1.$

§ 66.

Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten mit Hülfe der Determinanten.

Die Resultate, zu welchen die Auflösung der Aufgaben Nr. 22, 87 α) und 107 in § 65a führt, lassen sich leicht nach einem gewissen Schema bilden, welches man mit dem Namen Determinante bezeichnet. Durch Auflösung von Nr. 22 erhält man

$$x = \frac{ps - nt}{ms - nr}, \qquad y = \frac{mt - pr}{ms - nr}.$$

Die Dividenden und der gemeinsame Divisor dieser Quotienten entstehen aus folgenden Schematen von vier Elementen:

$$\begin{vmatrix} p & n \\ t & s \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} m & p \\ r & t \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix}$$

indem man jedes Element der ersten Kolumne bei abwechselnden Vorzeichen mit demjenigen Elemente der zweiten Kolumne multipliziert, welches nicht in derselben Zeile steht.

Durch Auflösung von Nr. 87 α) erhält man

$$x = \frac{m_1(b_2c_3 - b_3c_2) - m_2(b_1c_3 - b_3c_1) + m_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Der Dividend und der Divisor dieses Ausdruckes werden gebildet aus folgenden Schematen von neun Elementen oder den beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

indem man jedes Element der ersten Kolumne bei abwechselnden Vorzeichen mit dem jedesmal übrigbleibenden Schema multipliziert, dessen Elemente weder derselben Kolumne noch derselben Zeile angehören, also

$$m_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - m_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + m_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

und

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Diese Ausdrücke können wiederum nach dem Schema von vier Elementen berechnet werden. Die zweite der Determinanten von neun Elementen ist die Determinante der Koeffizienten der Unbekannten x, y, z und möge der Kürze wegen mit dem Ausdrucke Koeffizienten-Determinante bezeichnet werden. Man findet in entsprechender Weise die Werte der Unbekannten y und z,

wenn man in der Koeffizienten-Determinante der Reihe nach jede Kolumne mit der aus den Absolutgliedern m_1, m_2, m_3 gebildeten Kolumne vertauscht.

Begriff und Auswertung der Determinanten. Wenn n^2 gegebene Zahlengrößen in n Horizontalreihen (Zeilen) und n Vertikalreihen (Kolumnen) zusammengestellt sind, wie folgt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & . & . & n_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . & n_n \end{vmatrix} = | a_1 \quad b_2 \quad c_3 \quad . \quad . \quad n_n |$$

so versteht man unter der Determinante dieses Systems das Aggregat aller Produkte von je n dieser Größen, welche sämtlich verschiedenen Zeilen und verschiedenen Kolumnen angehören. Das Vorzeichen jedes dieser Produkte wird bestimmt durch die Vorzeichen ihrer aufeinander folgenden Faktoren, und diese Vorzeichen wiederum, wenn man in den Kolumnen fortschreitet, durch ihre jedesmalige Stellung in der ersten Kolumne des zuvor übrig gebliebenen Systems, der sogenannten Unterdeterminante. Die Bestimmung des Vorzeichens geschieht nach folgenden Regeln:

a) Ein Faktor des Produkts wird mit dem Koeffizienten $(-1)^{2m}$ also positiv genommen, wenn er in der Unterdeterminante in ungerader Zeile steht;

b) ein Faktor des Produkts wird mit dem Koeffizienten $(-1)^{2m+1}$ also negativ genommen, wenn er in der Unterdeterminante in gerader Zeile steht.

Die vorgelegte Determinante sei

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = | a_1 \quad b_2 \quad c_3 | .$$

Entwickelt man zunächst nach allen Elementen der ersten Kolumne, bildet also alle Ausdrücke, in welchen diese vorkommen, so sind die vorangehenden Faktoren mit Berücksichtigung ihrer Stellung $+a_1$, $-a_2$, $+a_3$, und die zugehörigen, übrigbleibenden Systeme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = A_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = A_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = A_3.$$

Es ist demnach der Wert der Determinante D oder $| a_1 \; b_2 \; c_3 |$ entwickelt in Unterdeterminanten erster Ordnung

$$D = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 .$$

Entwickelt man ebenso die Unterdeterminanten A_1, A_2, A_3 nach den Elementen ihrer ersten Kolumne, so zerfallen sie in Unterdeterminanten zweiter Ordnung.

1) In jeder Determinante ist die Gesamtzahl der Produkte immer eine gerade. Warum?

Anleitung. Wenn man bei fortgesetztem Hinzufügen eines neuen Elements zur Bildung eines Teilprodukts sämtliche den bereits vorhandenen Faktoren zugehörige Zeilen und Kolumnen unterdrückt, so bleibt zuletzt eine Unterdeterminante von vier Elementen übrig, welche zwei, also eine gerade Anzahl von Teilprodukten liefert..

2) In jeder Determinante ist die eine Hälfte der Produkte positiv, die andere negativ. Warum?

Anleitung. Setzt man voraus, daß alle Elemente positiv seien, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes aus dem Beweise des vorhergehenden, da die letzten Unterdeterminanten von je vier Elementen stets Teilprodukte von entgegengesetztem Vorzeichen liefern.

3) Das Glied der Determinante, welches sich aus dem Produkte der Elemente der Hauptdiagonale $a_1\, b_2\, c_3\, .\, .$ ergiebt, ist stets positiv. Warum?

4) Das Glied der Determinante, welches sich aus dem Produkte der Elemente der Nebendiagonale $a_n\, b_{n-1}\, c_{n-2} \ldots\ldots$ ergiebt, ist $+$ oder $-$, je nachdem n von der Form $4t$ oder $4t+1$, beziehungsweise $4t+2$ oder $4t+3$ ist. Warum?

5) Folgende Determinanten zweiten Grades ($n = 2$) zu berechnen:

$\alpha)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\beta)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; $\gamma)\ \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; $\delta\ \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

6) $\alpha)\ \begin{vmatrix} a+b, & b \\ a-b, & a \end{vmatrix}$; $\beta)\ \begin{vmatrix} x+y, & x-2y \\ x+2y, & x-y \end{vmatrix}$;

$\gamma)\ \begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}\alpha & \sin\frac{1}{2}\alpha \\ \sin\frac{1}{2}\alpha & \cos\frac{1}{2}\alpha \end{vmatrix}$; $\delta)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

7) Folgende Ausdrücke in Determinanten zweiten Grades zu verwandeln:

$\alpha)\ ac - b^2$; $\beta)\ a_2 c_3 + a_3 c_2$; $\gamma)\ x^2 + y^2$; $\delta)\ m^2$.

8) Es sollen folgende Determinanten dritten Grades durch Zerlegung in Unterdeterminanten erster Ordnung bezüglich der ersten Kolumne berechnet werden:

$\alpha)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$; $\beta)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$; $\gamma)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$.

9) $\alpha)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; $\beta)\ \begin{vmatrix} m & p & q \\ 0 & m & p \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix}$; $\gamma)\ \begin{vmatrix} 1+a, & 1, & 1 \\ 1, & 1+b, & 1 \\ 1, & 1, & 1+c \end{vmatrix}$.

10) Zu berechnen die Werte der Koeffizienten-Determinanten folgender Systeme von Gleichungen:

$$\alpha)\ \begin{aligned} a_1 x + a_2 y &= a_3 \\ b_1 x + b_2 y &= b_3; \end{aligned} \qquad \beta)\ \begin{aligned} 3x - 5y + 4z &= 0{,}5 \\ 7x + 2y - 3z &= 0{,}2 \\ 4x + 3y - z &= 0{,}7. \end{aligned}$$

11) Zu entwickeln und die Resultate nach Potenzen der Größe z zu ordnen:

$$\alpha)\ \begin{vmatrix} z & -b_2^2 c_1 & b_1 c_2^2 \\ a_2^2 c_1 & z & -a_1 c_2^2 \\ a_2^2 b_1 & -a_1 b_2^2 & z \end{vmatrix}; \qquad \beta)\ \begin{vmatrix} a & b & (c+2z) \\ b & (c-z) & d \\ (c+2z) & d & e \end{vmatrix}.$$

12) Ebenso:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & z \\ x_1^2 & x_2^2 & z^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

13) Aufzulösen und x zu berechnen aus:

$$\alpha)\ \begin{vmatrix} x & -b & c \\ a & 1 & -a \\ c & -b & x \end{vmatrix} = 0; \qquad \beta)\ \begin{vmatrix} x & -a & -b \\ a & x & -c \\ b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

14) Von den Gliedern $a_1 b_2 c_3$, $a_3 b_2 c_1$ und $a_2 b_3 c_1$ der Determinante $| a_1 b_2 c_3 |$ die Vorzeichen anzugeben.

15) Die Vorzeichen der Glieder $a_1 b_2 c_3 d_4$, $a_4 b_3 c_2 d_1$, $d_1 b_2 a_3 c_4$ und $b_1 a_2 d_3 c_4$ von folgenden Determinanten vierten Grades zu bestimmen:

$$\alpha)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \beta)\ \begin{vmatrix} -a_1 & b_1 & -c_1 & d_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & -d_2 \\ -a_3 & b_3 & -c_3 & d_3 \\ a_4 & -b_4 & c_4 & -d_4 \end{vmatrix}.$$

Anleitung: Nachdem man die Faktoren der gegebenen Produkte nach den Kolumnen, in welchen sie vorkommen, geordnet hat, unterdrücke man nacheinander die Kolumnen und Zeilen, zu welchen die Faktoren gehören, indem man durch Querlinien die Unterdeterminante erster Ordnung bezüglich des ersten Faktors, davon wieder die Unterdeterminante zweiter Ordnung bezüglich des zweiten Faktors u. s. f. markiert. Zugleich bestimme man die Vorzeichen der Faktoren nacheinander unter Berücksichtigung ihres jedesmaligen Stellenwertes in der ersten Kolumne der Unterdeterminante.

16) Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei aufeinander folgende Kolumnen miteinander vertauscht. Warum?

Anleitung: Folgender Beweis für einen speziellen Fall ist allgemein anwendbar. Die beiden Determinanten seien

$$D = | a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 |, \qquad R = | a_1 c_2 b_3 d_4 e_5 |.$$

Es ist zu zeigen, daß $R = -D$ wird. Ist man in der Entwicklung von D und R bis zur ersten vertauschten Kolumne fortgeschritten und sind die weiter zu entwickelnden zu demselben Teilprodukte gehörenden Unterdeterminanten etwa

$$A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & d_1 & e_1 \\ c_3 & b_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & b_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & b_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix},$$

so übersieht man leicht, daß in diesen beiden Systemen irgendwelche hinzutretende Teilprodukte z. B. $b_3 c_5$ und $b_5 c_3$ mit derselben Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_4 & e_4 \end{vmatrix}$$

verbunden sind. Es läßt sich nun zeigen, daß die genannten Teilprodukte in A_2 und $\bar{A}_2$, also auch in D und R immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Da nämlich b_3 und c_3 in der zweiten Zeile der Unterdeterminante, b_5 und c_5 in vierter Zeile stehen, so ist in A_2 der Koeffizient von b_3 gleich $(-1)^{2-1}$, der von c_5 gleich $(-1)^{4-2}$, weil eine Zeile dem c_5 vorweg unterdrückt ist. Dagegen ist der Koeffizient von b_5 gleich $(-1)^{4-1}$, der von c_3 gleich $(-1)^{2-1}$, weil dem c_3 keine Zeile vorweg unterdrückt ist. Es hat also in A_2 das Teilprodukt $c_3 b_5$ das entgegengesetzte Zeichen von $b_3 c_5$, in $\bar{A}_2$ dagegen $c_3 b_5$ das gleiche Zeichen wie $b_3 c_5$ in A_2, woraus der Satz folgt.

17) Wenn A_1, A_2, A_3 die Unterdeterminanten erster Ordnung der Determinante $| a_1 b_2 c_3 |$ bezüglich der ersten Kolumne, B_1, B_2, B_3 die der zweiten, C_1, C_2, C_3 die der dritten Kolumne bezeichnen, welche Ausdrücke gelten alsdann auch noch für $| a_1 b_2 c_3 |$ oder D, wenn man die zweite Kolumne oder die dritte vor die erste stellt?

Antwort:

α) ohne Vertauschung ist $D = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3$;

β) mit einer Vertauschung $| abc |$ in $| bac |$ ist $-D = b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3$;

γ) mit zwei Vertauschungen $| abc |$ in $| acb |$ in $| cab |$ ist $D = c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3$.

18) Die Determinante $| a_1 b_2 c_3 |$ nach den Elementen einer beliebigen Kolumne in Unterdeterminanten darzustellen und zu berechnen.

Auflösung:

$$D = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 = - b_1 B_1 + b_2 B_2 - b_3 B_3 = c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3 = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

19) Wenn die für die Berechnung einer Determinante festgesetzten Regeln über die Bestimmung der Vorzeichen der Elemente auch auf die Zeilen übertragen werden, so läßt sich die Determinante auch in Unterdeterminanten bezüglich irgend einer Zeile entwickeln. Warum?

Anleitung: Bezeichnet man den Wert der bezüglich der ersten Kolumne entwickelten Determinante wieder mit D, denjenigen der bezüglich der ersten Zeile entwickelten Determinante mit R, so läßt sich zeigen, daß $R = D$ ist. Die vorgelegte Determinante sei

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = | \, a_1 \; b_2 \; c_3 \, | .$$

Es ist alsdann nach dem vorhergehenden Satze

$$\begin{aligned} D &= a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3, & R &= a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1, \\ D &= - b_1 B_1 + b_2 B_2 - b_3 B_3, & R &= - a_2 A_2 + b_2 B_2 - c_2 C_2, \\ D &= c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3, & R &= a_3 A_3 - b_3 B_3 + c_3 C_3. \end{aligned}$$

Addiert man beide Systeme für sich, so resultiert daraus $3D = 3R$, woraus der Satz folgt.

20) Wie wird eine Determinante mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert?

21) Vereinfache und berechne:

$\alpha)$ $\begin{vmatrix} 1\frac{2}{3} & 2\frac{3}{4} \\ 3\frac{4}{5} & -4\frac{5}{6} \end{vmatrix}$; $\beta)$ $\begin{vmatrix} 1{,}2 & -3{,}4 & 5{,}6 \\ 2{,}3 & 4{,}5 & -6{,}7 \\ -3{,}4 & 5{,}6 & 7{,}8 \end{vmatrix}$; $\gamma)$ $\begin{vmatrix} ax & by & cz \\ dx & 0 & dz \\ ex & fy & gz \end{vmatrix}$.

22) Welches ist der Wert einer Determinante, in welcher zwei Kolumnen miteinander übereinstimmen?

Antwort: 0.

Anleitung zum Beweise: Es sei $| \, a \, b \, c \, b \, e \, | = D$, so ist $| \, a \, b \, b \, c \, e \, | = - D$. Entwickelt man die zweite Determinante erst nach der ersten Kolumne (b) und vertauscht die beiden gleichen Kolumnen, so wird die neue Determinante gleich $+ D$. Da aber die Vertauschung den Wert von $- D$ nicht ändert, so ist offenbar $- D = + D$, d. h. $D = 0$.

23) Zu entwickeln und die Werte anzugeben von folgenden Ausdrücken:

$\alpha)$ $\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix}$; $\beta)$ $\begin{vmatrix} 12 & 4 & 7 \\ -9 & -3 & 8 \\ 6 & 2 & 9 \end{vmatrix}$; $\gamma)$ $\begin{vmatrix} ax & bx & -cx \\ m & -b & c \\ ny & by & -cy \end{vmatrix}$.

24) Wenn die Unterdeterminanten bezüglich einer Kolumne mit den Elementen einer andern unter Berücksichtigung ihrer Stellenwerte multipliziert werden, so ist das Aggregat dieser Produkte stets der Null gleich. Warum?

Anleitung: Für die Determinante $| \, a_1 \; b_2 \; c_3 \, |$ ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3,$$

folglich, wenn man a durch b ersetzt:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0 \text{ (nach 22)};$$

ebenso

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0.$$

25) Die Unbekannten eines Systems von mehreren Gleichungen werden ausgedrückt durch einen Quotienten, dessen Divisor die Koeffizienten-Determinante ist und dessen Dividend aus letzterem gebildet wird, indem man die Koeffizienten der jedesmaligen Unbekannten durch die Absolutglieder ersetzt. Warum?

Anleitung: Folgender Beweis für ein System von drei Unbekannten ist allgemein anwendbar. Gegeben sei das System Nr. 87 α):

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = m_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = m_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = m_3.$$

Die Koeffizienten-Determinante werde mit D bezeichnet. Man multipliziere die Gleichungen der Reihe nach mit A_1, $-A_2$, $+A_3$ und addiere. Daraus ergiebt sich in Berücksichtigung des Satzes in 24)

$$Dx = m_1 A_1 - m_2 A_2 + m_3 A_3,$$
$$x = | m_1 b_2 c_3 | : | a_1 b_2 c_3 | .$$

Multipliziert man das System der Reihe nach mit $-B_1$, $+B_2$, $-B_3$, und addiert, so wird

$$Dy = -m_1 B_1 + m_2 B_2 - m_3 B_3,$$
$$y = | a_1 m_2 c_3 | : | a_1 b_2 c_3 | \text{ u. s. f.}$$

26) Mittels Determinanten aufzulösen:

α) $a_1 x + b_1 y = m_1$, $a_2 x + b_2 y = m_2$; β) $5x - 7y = 20$, $9x - 11y = 44$; γ) $1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}y + 4\frac{5}{12}$, $4\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y - 21\frac{7}{12}$.

27) α) $abx \pm cdy = e$, $afx - cgy = h$; β) $a(x+y) - b(x-y) = 2a$, $a(x-y) - b(x+y) = 2b$.

28) α) $x + y - z = a$, $x - y + z = b$, $-x + y + z = c$; β) $x + y + z = 5$, $3x - 5y + 7z = 75$, $9x - 11z + 10 = 0$.

29) α) $3x - 5y + 4z = 0{,}5$, $7x + 2y - 3z = 0{,}2$, $4x + 3y - z = 0{,}7$; β) $x + y = 16$, $z + x = 22$, $y + z = 28$.

30) α) $a_1 x + b_1 y = m_1$, $a_2 y + b_2 z = m_2$, $a_3 z + b_3 x = m_3$; β) $xy + yz + zx = 9xyz$, $yz + 2zx - 3xy = -4xyz$, $3yz - 2zx + xy = 4xyz$.

31) Warum lassen sich aus den Systemen III und IV in § 65a 2) die Wurzeln nicht bestimmen?

32) Die Systeme § 65a Nr. 107, 108, 109 mittels Determinanten aufzulösen.

33) Mit Hülfe von Determinanten aufzulösen:

$\alpha)$ $ax + by = l$, $cy + dz = m$, $ez + fu = n$, $gu + hx = p$;

$\beta)$ $5x - 3y + z = 1$, $7y - 5z + 3u = 17$, $z - 7u + 5x = -39$, $3u - x + 7y = 41$;

$\gamma)$ $x + y + z + u = a$, $x - y + z - u = b$, $x + y - z - u = c$, $x - y - z + u = d$.

34) Wie läßt sich eine Determinante, in welcher jedes Element irgend einer Kolumne oder Zeile aus der Summe einer gleichen Anzahl von Gliedern besteht, in die Summe von ebensoviel Determinanten desselben Grades zerlegen?

35) In einfachere Determinanten zu zerlegen die Systeme

$|\,(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\, b_2\, c_3\,|$ und $|\,(a_1 + m b_1 + n c_1)\, b_2\, c_3\,|$.

36) Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu sämtlichen Elementen einer Kolumne oder Zeile gleiche Vielfache der entsprechenden Elemente einer anderen hinzugefügt. Warum?

37) Mit Anwendung des vorangehenden Satzes auf Determinanten niedrigeren Grades zu reduzieren und auszuwerten:

$$\alpha)\ \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix};\qquad \beta)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

38) Mit Hülfe desselben Satzes das System § 65a 113β) aufzulösen.

39) Wenn die Absolutglieder eines Systems bestimmter Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten gleich Null sind, so muß auch die Koeffizienten-Determinante der Null gleich sein. Warum?

40) Wenn die drei Größen x, y, z von Null verschieden sein und dem System

$$ax + by = z,$$
$$cx + bz = y,$$
$$cy + az = x,$$

genügen sollen, welche Beziehung findet alsdann zwischen den Koeffizienten a, b, c statt, und wie groß ist $x : y : z$?

41) Welche verschiedenen Werte müssen a, b, c annehmen und wie groß ist $x : y : z$, wenn x, y, z von Null verschieden sein und folgende Gleichungen bestehen sollen?

$\alpha)$ $ax + by = 0$, $a^2x + b^2y = 0$;

$\beta)$ $ax + by + cz = 0$, $a^2x + b^2y + c^2z = 0$, $a^3x + b^3y + c^3z = 0$.

42) Wie läßt sich mit Hülfe von Determinanten ermitteln, ob die drei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$u + 3v = 5,$$
$$3u - 2v = 37,$$
$$5u + 6v = 42$$

zusammen bestehen können?

Anleitung: Man setze $u = x : z$, $v = y : z$, multipliziere die Gleichungen mit z und wende Nr. 39 an.

§ 67.

Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen*).

1) Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe 857 142 [$67\frac{1}{2}$] und deren Differenz 571 428 [$25\frac{3}{8}$] ist.

2) In einer Versammlung von 48 Personen wird ein Vorschlag mit einer Stimmenmehrheit von 18 Personen angenommen. Wie viele haben für und wie viele gegen den Vorschlag gestimmt?

3) Wenn der mit dem Winde gehende Schall einer Kanone in einer Sekunde 344,42 *m*, der gegen den Wind gehende Schall aber nur 335,94 *m* in derselben Zeit zurücklegt, wieviel Meter legt der Schall allein, wieviel der Wind allein in einer Sekunde zurück?

4) Von Köln geht um 2 Uhr 13 Minuten [7 U. 6 M.] Kölner Zeit eine telegraphische Depesche nach Berlin, welche daselbst um 3 Uhr 14 Minuten [7 U. 39 M.] Berliner Zeit anlangt. Von Berlin geht hierauf mit derselben Geschwindigkeit um 4 Uhr 15 Minuten [7 U. 45 M.] Berliner Zeit eine Nachricht durch den Telegraphen nach Köln, welche am letzteren Orte um 4 Uhr 24 Minuten [7 U. 26 M.] Kölner Zeit anlangt. In welcher Zeit wurde die telegraphische Nachricht von Berlin nach Köln gebracht, und um wieviel ging die Kölner Uhr später, als die Berliner?

5) Der Planet Venus und die Erde vollenden beide in verschiedenen Zeiten ihren Umlauf um die Sonne, daher sie zuweilen einander sehr nahe stehen, zuweilen dagegen weit voneinander entfernt sind. Wenn nun die größte Entfernung voneinander 34 403 000 geogr. Meilen, die kleinste aber nur 5 523 000 geogr. Meilen beträgt, und angenommen wird, daß beide Himmelskörper sich in kreisförmigen Bahnen um die Sonne als Mittelpunkt bewegen, wie lassen sich hieraus die Entfernungen der Venus und der Erde von der Sonne berechnen, wenn man außerdem weiß, daß ersterer Planet der Sonne näher steht, als letzterer?

6) Um eine Schuld von 4 *M* 60 *ℛ* zu bezahlen, gebe ich

*) Die leichteren Aufgaben dieses Paragraphen können auch als Anwendungen von Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe (§ 63) behandelt werden.

ein 20-Francstück und erhalte 1 Dukaten und 2 ℳ 20 ₰ zurück. Zu dem Dukaten lege ich noch ein 20-Francstück hinzu, bezahle eine Schuld von 25,50 ℳ und erhalte 40 ₰ zurück. Wie hoch wurde das 20-Francstück und der Dukaten in deutschem Gelde gerechnet?

7) Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter;
Und die Eselin seufzete sehr; da sagte das Söhnlein:
Mutter, was klagst und stöhnst du doch, wie ein jammerndes Mägdlein?
Gieb ein Pfund mir ab, so trag' ich doppelte Bürde;
Nimmst du es aber von mir, gleichviel dann haben wir beide.
Rechne mir aus, wenn du kannst, mein Bester, wieviel sie getragen.

8) Ein Knabe spricht zu einem anderen: Gieb mir 5 [a] von deinen Nüssen, so habe ich dreimal [n-mal] soviel als du. Nein, erwiderte dieser, gieb du mir lieber 2 [b] von deinen Nüssen, so habe ich fünfmal [p-mal] soviel als du. Wieviel hat jeder?

9) Jemand hat zwei Becher nebst einem auf beide passenden Deckel; setzt er den Deckel auf den ersten Becher, so ist derselbe noch einmal soviel wert, als der zweite; setzt er dagegen den Deckel auf den zweiten Becher, so ist letzterer $1\frac{1}{2}$ mal soviel wert, als ersterer. Wenn nun ohne Deckel jeder Becher 30 ℳ weniger wert ist, als mit Deckel, wieviel kostet jeder der beiden Becher?

10) In einer Familie waren mehrere Kinder, Knaben und Mädchen. Auf die Frage, wie groß ihre Zahl sei, antwortete das älteste Mädchen: „Ich habe so viele Schwestern, wie Brüder." Der älteste Knabe aber sagte: „Ich habe nur halb soviel Brüder, wie Schwestern." Wieviel Knaben, wieviel Mädchen waren es?

11) α) Welcher Bruch erhält den Wert $\frac{1}{4}$ [m], wenn man den Zähler um 1 [a] vermehrt, dagegen den Wert $\frac{1}{5}$ [n], wenn man den Nenner um 1 [b] vermehrt?

β) Einen Bruch zu suchen von der Eigenschaft, daß der Wert $\frac{1}{2}$ entsteht, wenn man Nenner und Zähler um 1 vermehrt, dagegen der Wert $\frac{1}{3}$, wenn man Nenner und Zähler um 1 vermindert.

12) A und B geben zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte zusammen 10 000 Fl her. A läßt sein Geld 1 Jahr 3 Monate, B das seinige 2 Jahre 11 Monate stehen. Wenn nun nach diesen Zeiten der Gewinn für beide gleich groß ist, wieviel betrug eines jeden Einlage?

13) Zwei Zahlen geben, zu einander addiert, zur Summe 47 [s], durcheinander dividiert, zum Quotienten 5 [q] und zum Reste 5 [r]. Wie heißen die beiden Zahlen?

14) Zwei Zahlen zu suchen, deren Differenz und Quotient 5 [a] ist.

15) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe und Quotient a ist.

16) Dividiere ich die größere zweier Zahlen in die kleinere, so erhalte ich zum Quotienten 0,21 und zum Reste 0,041 62. Dividiere ich die kleinere in die größere, so erhalte ich zum Quotienten 4 und zum Reste 0,742. Wie heißen die beiden Zahlen?

17) Dividiere ich eine von zwei Zahlen durch die andere, so erhalte ich zum Quotienten $a - b^2$, zum Reste $b + b^4$. Dividiere ich die zweite Zahl durch die erste, so erhalte ich zum Quotienten $b - a^2$ und zum Reste $a + a^4$. Wie heißen die beiden Zahlen?

18) Ich kenne zwei dreizifferige Zahlen, deren Summe, um 1 vermehrt, gerade 1000 ausmacht. Schreibe ich die beiden Zahlen hintereinander und trenne dieselben durch ein Decimalkomma, so entsteht eine sechsmal so große Zahl, wenn die kleinere Zahl nach der größeren, als wenn die größere Zahl nach der kleineren gesetzt wird. Wie heißen die beiden Zahlen?

19) Ein Vater sagt zu seinem Sohne: Vor 7 Jahren war ich 7 mal so alt, als du damals warst, und über 3 Jahre werde ich 3 mal so alt sein, wie du alsdann sein wirst. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

20) Ein Kapital, zu einem gewissen Prozente auf Zinsen angelegt, wächst innerhalb 8 Jahren mit den Zinsen zu 6486 *M* an. Dasselbe Kapital würde, wenn es 1 Prozent Zinsen mehr trüge, in 5 Jahren mit den Zinsen 6051,25 *M* ausmachen. Wie groß ist das Kapital und der Zinsfuß?

21) Jemand zahlt für eine gewisse Summe, die er nach 3 Monaten zu zahlen schuldig ist, mit einem gewissen Prozente Diskonto 3523,50 *M*. Ein anderer zahlt für eine gleiche Summe, die er nach 11 Monaten zu zahlen schuldig ist, mit demselben Prozente Diskonto 3319,50 *M*. Wieviel Mark waren die beiden zu zahlen schuldig und wieviel Prozent betrug der jährliche Diskonto?

22) A sagt zu B: Gieb mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so habe ich gerade 100 *M*. Nein, sagte hierauf B zu A, gieb du mir nur die Hälfte deines Geldes, so habe ich 100 *M*. Wieviel hatte A, wieviel B?

23) Einst wurde ein Pferd zum Verkaufe ausgeboten. A sagte zu B: Gieb du mir die Hälfte deines Geldes, so kann ich mir das Pferd kaufen. B sagte: Ich möchte mir das Pferd kaufen, aber es fehlt mir $\frac{1}{3}$ deines Geldes. Der Kauf unterblieb. Bald darauf wurde ein zweites Pferd zum Verkaufe ausgestellt, welches 36 *M* wohlfeiler war, als ersteres. Es wollte aber weder B hierzu dem A $\frac{3}{8}$ seines Geldes, noch A dem B $\frac{1}{6}$ seines Geldes abtreten*), und somit konnte der Kauf zum zweiten Male nicht

*) Diese zweite Bestimmung, daß A dem B $\frac{1}{6}$ seines Geldes abgeben muß, ist eigentlich überflüssig und würde, wenn für $\frac{1}{6}$ irgend eine andere Zahl gesetzt wäre, einen Widerspruch in sich enthalten.

vor sich gehen. Wieviel besaß A, wie viel B, und zu welchem Preise war das erste Pferd ausgestellt?

24) Jemand hat zwei Fässer und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Um in beide gleichviel zu bekommen, gießt er aus dem ersten Fasse soviel in das zweite, als schon in diesem ist, gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste soviel, als nun in dem ersten ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite soviel, als noch in diesem übrig ist. Am Ende hat er in jedem Fasse 80 *l* Wein. Wieviel Liter waren anfangs darin?

25) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn das Ausgießen auf dieselbe Weise noch einmal wiederholt wird und zuletzt n *l* in jedem Fasse übrig bleiben?

26) Das 3fache einer Zahl nebst dem 7fachen einer anderen Zahl gibt 58; das 7fache der ersten Zahl nebst dem 3fachen der zweiten gibt 42. Wie heißen die beiden Zahlen?

27) Zwei Zahlen von der Eigenschaft zu finden, daß sich die erste zur zweiten, wie ihre Summe zu 5 [a] und wie ihre Differenz zu 3 [b] verhält.

28) Die Quersumme einer 3zifferigen Zahl ist gleich 9. Die Ziffer auf der ersten Stelle links beträgt den achten Teil der aus den beiden anderen Ziffern bestehenden Zahl und die Ziffer auf der ersten Stelle rechts ebenfalls den achten Teil der aus den beiden anderen Ziffern bestehenden Zahl. Welches ist demnach die Zahl?

29) Vermehrt man die beiden Glieder eines Verhältnisses um 5, so ist das veränderte Verhältnis dem Verhältnisse 9 : 11 gleich. Vermindert man aber die beiden Glieder des gegebenen Verhältnisses um 5, so wird dasselbe dem Verhältnisse 2 : 3 gleich. Wie heißen die Glieder des gegebenen Verhältnisses?

30) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn an die Stelle der Zahlen 5, 9, 11, 5, 2 und 3 die allgemeinen Zeichen d, m, n, o, p und q gesetzt werden?

31) Zwei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 3 : 5. Setzt man zu der einen 10 hinzu und zieht von der anderen 10 ab, so kehrt sich das Verhältnis der beiden Zahlen um. Wie heißen die Zahlen?

32) Zwei Zahlen von folgender Beschaffenheit zu finden: Dividiert man die eine durch 6, die andere durch 5, so ist die Summe der Quotienten 52; dividiert man aber die eine durch 8, die andere durch 12, so ist die Summe der Quotienten 31.

33) Die Summe der reciproken Werte zweier Zahlen ist 5. Die Hälfte der einen Zahl nebst $\frac{1}{3}$ der anderen Zahl ist dem doppelten Produkte der Zahlen gleich. Wie heißen beide Zahlen?

34) Jemand hat zwei volle Fässer und ein drittes, größeres, leeres Faß. Um das leere zu füllen, bedarf es entweder des Inhaltes des ersten nebst einem Fünftel des Inhaltes des zweiten, oder des Inhaltes des zweiten nebst einem Drittel des Inhaltes des ersten. Alle drei Fässer zusammen können 1440 *l* fassen. Wieviel faßt jedes derselben?

35) Eine zweizifferige Zahl giebt es, welche zur Quersumme 10 hat. Kehrt man die Ziffern um, so entsteht eine Zahl, welche um 36 kleiner ist. Wie heißt die Zahl?

36) Für 7 Zwanzigfrancstücke und 9 Dukaten erhielt ich von einem Geldwechsler 198 *M* 80 *ℳ*, und für 11 Zwanzigfrancstücke und 3 Dukaten 207 *M* 10 *ℳ*. Wie hoch wurde jede der beiden Geldsorten in deutschem Gelde gerechnet?

37) Jemand zahlt für 10 *kg* Kaffee und 14 *kg* Zucker 30 *M* 50 *ℳ* und für 18 *kg* Kaffee und 7 *kg* Zucker 41 *M* 25 *ℳ*. Wieviel kostet das Kilogramm einer jeden Waare?

38) Ein Meister und ein Geselle erhielten zusammen 80 *M* zum Arbeitslohne. Der Meister arbeitete 7, der Geselle 12 Tage; dabei bekam der Meister für 3 Arbeitstage 3,75 *M* weniger, als der Geselle für 5 Arbeitstage. Wie groß war beider Tagelohn?

39) Ein Kapital macht mit den 7jährigen Zinsen zusammen 2101 *Frc* 95 *Cent*, ein dreimal so großes Kapital bei gleichen Prozenten nach 5 Jahren mit den Zinsen 5892 *Frc* 75 *Cent*. Wie groß sind beide Kapitalien, und zu wieviel Prozent stehen dieselben aus?

40) Jemand bringt zu einem Weinhändler zwei große Krüge und läßt dieselben mit Wein füllen, und zwar den einen mit Wein, wovon das Liter 1,20 *M*, den anderen mit Wein, wovon das Liter 1,60 *M* kostet. Für beide Krüge will er zusammen 11,80 *M* bezahlen, erhält aber 50 *ℳ* zurück, indem es sich ergiebt, daß eine Verwechselung zwischen den Krügen stattgefunden. Wieviel Liter faßt jeder der Krüge?

41) Zwei Kapitalien, von denen das eine zu 5 Prozent, das andere zu $4\frac{1}{2}$ Prozent ausgeliehen wurde, gaben in einem Jahre 853,20 *M* Zinsen. Wäre das erste Kapital zu den Prozenten des zweiten, und das zweite zu den Prozenten des ersten ausgeliehen worden, so würde man 13,50 *M* weniger Zinsen erhalten haben. Wie groß waren die beiden Kapitalien?

42) Von zwei Kapitalien geben $\frac{1}{4}$ des ersteren, zu $3\frac{3}{4}$ Prozent, und $\frac{2}{5}$ des zweiten, zu $4\frac{1}{4}$ Prozent, zusammen in 6 Jahren 327 *Fl* 90 *Nkr* Zinsen. Der Rest des ersteren Kapitals zu $5\frac{1}{4}$ Prozent, und der Rest des zweiten, zu $4\frac{3}{4}$ Prozent, geben

in 2 Jahren zusammen 277 *Fl* 20 *Kr*. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

43) α) Ein Weinhändler hat zweierlei Weine. Vermischt er 9 *l* des schlechteren mit 7 *l* des besseren, so kann er das Liter zu 1,375 *M* verkaufen. Mischt er aber 3 *l* des schlechteren mit 5 *l* des besseren, so kann er das Liter zu 1,45 *M* verkaufen. Wieviel kostet das Liter einer jeden Sorte?

β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für die Zahlen 9, 7, 1,375, 3, 5 und 1,45 die allgemeinen Zeichen a, b, p, c, d und q gesetzt werden? Welche besonderen Werte kann das Resultat der allgemeinen Auflösung erhalten?

44) Eine Hausfrau mietete zwei Mägde, jede für 40 *Fl* Lohn; außerdem versprach sie jeder ein neues Kleid und ein Paar Schuhe zu bestimmten Preisen. Die eine Magd verließ, nachdem sie bereits das Kleid voraus erhalten hatte, nach 8 Monaten ihren Dienst und erhielt 26½ *Fl* Lohn; die zweite, welche das Paar Schuhe voraus erhalten hatte, verließ nach 9½ Monaten ihren Dienst und erhielt 35½ *Fl* Lohn. Wie hoch war das Kleid, wie hoch das Paar Schuhe berechnet?

45) Wieviel Gramm wiegt 1 *ccm* Blei und 1 *ccm* Zinn, wenn 11 *ccm* Zinn ebensoviel wiegen, als 7 *ccm* Blei, und wenn 11 *ccm* Blei und 7 *ccm* Zinn zusammen 175,1 *g* schwer sind?

46) Die jährliche Pacht eines Gutes betrug 960 *M*. Die Ausgaben des Pächters für seine Haushaltung und für die Steuern waren der Art, daß derselbe im ersten Jahre nur 840 *M* bezahlen konnte. Das nächste Jahr wurde das Pachtgeld um 5 pCt. erniedrigt, die Ausgaben für den Haushalt wurden um $\frac{1}{6}$ vermindert, auch die Steuern um $\frac{1}{4}$ verringert. Da nun noch außerdem der Ertrag des Pachtgutes sich um $\frac{1}{10}$ vermehrt hatte, so war der Pächter nicht allein imstande, die vorjährige Schuld zu tilgen, sondern er behielt noch 126 *M* übrig. Im dritten Jahre, wo das Pachtgut sich um $\frac{1}{8}$ des Ertrages des zweiten Jahres vermehrt hatte, behielt er sogar, obgleich er seine Ausgaben für den Haushalt um $\frac{1}{10}$ der Ausgaben des vorhergehenden Jahres vermehrt hatte, bei dem erniedrigten Pachtgelde noch 417 *M* übrig. Wieviel betrugen im ersten Jahre die Ausgaben für die Haushaltung und für die Steuern, wie groß war der Ertrag des Gutes?

47) Zwei Körper haben die Entfernung d *m*. Bewegen sie sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten gegeneinander, so treffen sie nach m Sekunden zusammen; bewegen sie sich aber mit denselben Geschwindigkeiten hintereinander, so treffen sie nach n Sekunden zusammen. Wieviel Meter legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

48) Ein Körper geht mit gleichförmiger Geschwindigkeit von einem Punkte A nach einem 323 *m* entfernt gelegenen Punkte B und geht, ohne zu ruhen, mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung von B nach der Richtung von A hin zurück. 13 Sekunden später geht ein zweiter Körper von B nach der Richtung von A mit gleichförmiger, aber geringerer Geschwindigkeit und trifft in 10 Sekunden nach seinem Abgange zum ersten Male und in 45 Sekunden nach seinem Abgange zum zweiten Male mit dem ersten Körper zusammen. Wieviel Meter legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

49) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 323, 13, 10 und 45 die allgemeinen Zeichen d, t, m und n gesetzt werden?

50) Wie heißt das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn der zweite Körper den Ort B t Sekunden früher verläßt, als der andere?

51) Zwei Boten, A und B, gehen von zwei Städten, deren Entfernung $86\frac{1}{4}$ Kilometer beträgt, einander entgegen. Geht A $5\frac{3}{4}$ Stunden früher ab, als B, so treffen sie in $6\frac{1}{8}$ Stunden nach Abgang des B zusammen; geht aber B $5\frac{3}{4}$ Stunden früher ab, als A, so treffen sie in $5\frac{5}{8}$ Stnnden nach Abgang des A zusammen. Wieviel Kilometer legt A, wieviel B, in jeder Stunde zurück?

52) Zwei Körper, B und C, gehen von zwei Punkten, deren wechselseitige Entfernung d *m* beträgt, einander entgegen. Geht B t Sekunden früher ab, als C, so treffen sie sich in m Sekunden nach Abgang des C; geht aber C u Sekunden früher ab, als B, so treffen sie sich in n Sekunden nach Abgang des B. Wieviel Meter legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

53) Ein Teich von 9900 *cbm* Raum-Inhalt kann durch 2 Schleusen angefüllt werden. Öffnet man die erste Schleuse 10, die zweite 14 Stunden, so wird der Teich angefüllt; ebenso wird derselbe voll, wenn man die erste Schleuse 18 und die zweite 12 Stunden laufen läßt. Wieviel Kubikmeter Wasser schickt jede Schleuse in einer Stunde dem Teiche zu, und in wieviel Stunden wird der Teich voll werden, wenn man beide Schleusen gleich lange öffnet?

54) A und B machen einen Wettlauf nach einem Pfahle hin und wieder zurück. Bei der Rückkehr trifft A den B 90 *m* vor dem Pfahle und erreicht den Ausgangspunkt 3 Minuten eher, als dieser. Wenn er nun wieder zurückgekehrt wäre, so würde er den B in einer Entfernung vom Ausgangspunkte getroffen haben, die gleich $\frac{1}{6}$ der Länge der Bahn ist. Es soll die Länge der Bahn und die Dauer des Wettlaufes berechnet werden.

55) Jemand hat zwei Sorten Silber: vermischt er 10 kg der einen Sorte mit 5 kg der anderen, so erhält er Silber von dem Gehalte 687,5; vermischt er aber $7\frac{1}{2}$ kg der einen Sorte mit $1\frac{1}{2}$ kg der anderen, so erhält er Silber von dem Gehalte 625. Von welchem Gehalte sind die Silbersorten?

56) Wenn zwei Silberbarren zusammen ein Gewicht von 60 kg haben und zusammengeschmolzen Silber von dem Gehalte 812,5 geben, und wenn in dem ersten Barren auf neun Teile Silber ein Teil Kupfer, in dem zweiten Barren auf drei Teile Silber ein Teil Kupfer kommt, wie läßt sich hieraus das Gewicht jedes der Barren berechnen?

57) Ein Kaufmann kauft 120 m Tuch für 54 Zwanzigfrancstücke und 317,10 ℳ, und verkauft hierauf zuerst 84 m mit einem Gewinn von 18 Prozent und hierauf den Rest mit einem Gewinn von $12\frac{1}{2}$ Prozent. Der Erlös beträgt im ganzen 62 Zwanzigfrancstücke und 382,50 ℳ. Wieviel bezahlte der Kaufmann für jedes Meter Tuch, und zu wieviel wurde das Zwanzigfrancstück in deutschem Gelde gerechnet?

58) Ein Kaufmann hat zweierlei Ware: die eine verkauft er mit einem Nutzen von 8 Prozent, die andere dagegen mit einem Schaden von 12 Prozent. Von beiden Waren setzt er eine bestimmte Menge an einen Kaufmann B ab und erhält 20 ℳ mehr, als ihm dieselben zusammen gekostet haben. Einem anderen Kaufmanne, C, verkauft er von der ersten Ware dreimal soviel, und von der zweiten Ware siebenmal soviel, als er an den Kaufmann B abgesetzt hat, und erhält im ganzen 84 ℳ weniger, als der Einkaufspreis beider Waren zusammen betrug. Wieviel mußte ihm der Kaufmann B für jede der Waren bezahlen?

59) Zwei Kaufleute, A und B, haben zu drei verschiedenen Zeiten miteinander gemeinschaftlichen Handel getrieben. Bei dem ersten Handel gab A sein Kapital 4, B das seinige 5 Monate lang her; der Gewinn war 3458 Fl. Zum zweiten Male gab A sein Kapital auf 7 Monate, B das seinige auf 4 Monate ins Geschäft; der Gewinn war 3591 Fl. Zum dritten Male gab A sein Kapital und außerdem noch 500 Fl auf $7\frac{1}{2}$ Monate, B das seinige auf 11 Monate her; der gemeinschaftliche Gewinn war 7651 Fl. Wenn nun bei allen drei Geschäften der Gewinn verhältnißmäßig gleich groß war, wie lassen sich hieraus die Kapitalien der beiden Kaufleute A und B berechnen?

60) Mit einem Metallgemische von 300 kg, welches aus 2 Teilen Zink, 3 Teilen Kupfer und 4 Teilen Zinn besteht, werden

200 *kg* eines anderen, aus denselben Stoffen bestehenden Metallgemisches zusammengeschmolzen. In der hierdurch erhaltenen Legierung finden sich 3 Teile Zink, 4 Teile Kupfer und 5 Teile Zinn. In welchem Verhältnisse befinden sich Zink, Kupfer und Zinn in dem hinzugesetzten Metallgemische?

61) Ein volles Weinfaß enthält 465 preußische Quart und $532\frac{1}{2}$ *l*. Wenn nun 31 preußische Quart und 142 *l* ein Sechstel des Fasses anfüllen, wieviel preußische Quart enthält das Faß, und in welchem Verhältnisse stehen Quart und Liter?

62) Ein Dampfschiff legt a Meilen stromaufwärts und b Meilen abwärts, zusammen in der Zeit t zurück; ein anderes Mal legt dasselbe a' Meilen aufwärts und b' Meilen abwärts in der Zeit t' zurück. Wieviel Meilen legt das Schiff 1) in einem ruhigen Wasser, blos durch die Kraft seiner Maschine, 2) ohne Maschine, blos durch den Strom getrieben, in der Zeiteinheit im Mittel zurück?

63) Ein viereckiger, rechtwinkliger Garten wird in 6 gleiche Teile geteilt. Giebt man jedem Teile zur Länge $\frac{1}{3}$ der Länge und zur Breite die Hälfte der Breite des ganzen Gartens, so beträgt der Umfang eines jeden Teiles 216 *m*. Nimmt man aber zur Länge die Hälfte der Länge und zur Breite $\frac{1}{3}$ der Breite des Gartens, so beträgt der Umfang eines jeden Teiles 224 *m*. Wie lang und wie breit ist der zu teilende Garten?

64) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 6, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 216 und 224 bezüglich die allgemeinen Zeichen ab, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, m und n gesetzt werden?

65) Ein Landwirt hat eine gewisse Anzahl Ochsen und für eine bestimmte Anzahl Tage Futter. Verkauft er 75 Ochsen, so wird er 20 Tage länger mit dem Futtervorrate auskommen. Kauft er dagegen 100 Ochsen hinzu, so wird sein Vorrat 15 Tage kürzer reichen. Wieviel Ochsen besitzt der Landwirt, und auf wie viele Tage reicht das Futter hin?

66) Eine Anzahl Arbeiter verdient bei einem gewissen, für alle gleichen Lohne eine bestimmte Summe. Wären 7 Arbeiter mehr, und erhielte jeder 25 ₰ mehr, so würden sie im ganzen 18,65 *M* mehr erhalten. Wären aber 4 Arbeiter weniger, und erhielte jeder 15 ₰ weniger, so würde ihnen im ganzen 9,20 *M* weniger zu Teil. Wieviel Arbeiter sind vorhanden, und wieviel erhält jeder zum Lohne?

67) Ein Wasserbehälter, der eine bestimmte Menge Wasser enthält, kann durch eine Röhre angefüllt und durch eine andere aus-

geleert werden. Die erste Röhre giebt in jeder Minute 4 *l* mehr, als die zweite. Öffnet man beide Röhren, die erste aber eine Stunde früher, als die zweite, so erhält der Wasserbehälter in einer bestimmten Zeit 1760 *l*. Öffnet man aber die zweite Röhre eine Stunde früher, als die erste, so verliert der Behälter in derselben Zeit halb soviel, als er im ersten Falle erhält. Wieviel Wasser liefert jede der beiden Röhren in einer Minute, und wie lange ist in jedem Falle jede Röhre geöffnet?

68) Jemand läßt sich drei Kleider von derselben Größe anfertigen. Zu dem zweiten gebraucht er 2 *m* mehr, als zu dem ersten, indem das Tuch $\frac{1}{8}$ *m* schmäler ist, als das des ersten Kleides. Das dritte Kleid dagegen erfordert $2\frac{2}{3}$ *m* weniger, als das zweite Kleid, indem das Tuch zu jenem $\frac{1}{3}$ *m* breiter ist, als das zu diesem. Wieviel Tuch und von welcher Breite ist zu dem ersten Kleide erforderlich?

69) Eine gewisse Anzahl Arbeiter schafft einen Haufen Steine in 6 Stunden von einem Orte zum andern. Wären der Arbeiter 2 mehr gewesen, und hätte jeder bei jedem Gange 2 *kg* mehr getragen, so wäre der Haufen in 5 Stunden fortgeschafft worden. Wären der Arbeiter 3 weniger gewesen, und hätte jeder bei jedem Gange $2\frac{1}{2}$ *kg* Steine weniger getragen, so würde der Haufen in 8 Stunden fortgeschafft worden sein. Wieviel Arbeiter waren beschäftigt, und wieviel trug jeder bei einem Gange?

70) Ein Wagen gebraucht eine gewisse Zeit, um von einem Orte A nach einem Orte B zu gelangen. Ein zweiter Wagen, der alle 4 Stunden $7\frac{1}{2}$ Kilometer weniger zurücklegt, als der erste, gebraucht zu demselben Wege 4 Stunden mehr, als jener. Ein dritter Wagen, der alle 3 Stunden $13\frac{1}{2}$ Kilometer mehr, als der zweite, zurücklegt, gebraucht zu dem Wege 7 Stunden weniger, als dieser. Wieviel Zeit braucht jeder Wagen, um den Weg zurückzulegen? Wie weit ist A von B entfernt?

71) Zwei Zahlen zu suchen, deren Differenz a-mal und deren Produkt b-mal so groß ist, als ihre Summe.

72) Ein Quadrat liegt mit der einen Ecke in der Ecke eines größeren Quadrates. Der Überschuß der Seite des größeren Quadrates über die des kleineren ist 118 *m*, der Überschuß der Quadrate selbst 26 432 *qm*. Wieviel Inhalt hat jedes der beiden Quadrate*)?

73) Zwei Zahlen anzugeben, deren Summe, Differenz und Produkt im Verhältnisse 5 : 1 : 18 stehen.

*) Diese Gleichung kann auch als Gleichung des ersten Grades mit einer unbekannten Größe betrachtet werden.

74) Zwei Zahlen stehen im Verhältnisse 7 : 3, und ihre Differenz verhält sich zu ihrem Produkte, wie 1 : 21. Wie heißen die beiden Zahlen?

75) α) Die reciproke Differenz zweier Zahlen nebst der reciproken Summe der Zahlen ist 3; die reciproke Differenz der Zahlen, vermindert um die reciproke Summe der Zahlen, ist 1. Wie heißen die beiden Zahlen? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 3 und 1 die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden?

76) Eine zweizifferige Zahl giebt, durch die Quersumme der Ziffern dividiert, 7 zum Quotienten. Subtrahiere ich 27 von der Zahl, so erhalte ich eine Zahl, deren Ziffern in umgekehrter Ordnung geschrieben sind. Wie heißt die Zahl?

77) Drei Städte, A, B und C, liegen in einem Dreiecke. Von A über B nach C sind 82, von B über C nach A 97 und von C über A nach B 89 *km*. Wie weit sind A, B und C voneinander entfernt?

78) Die Zahl 96 in drei Teile zu zerlegen, so daß, wenn man den ersten Teil durch den zweiten dividiert, 2 zum Quotienten und 3 zum Reste herauskommt; wenn man aber den zweiten Teil durch den dritten Teil dividiert, 4 zum Quotienten und 5 zum Reste herauskommt. Wie heißen die drei Teile?

79) Ein Vater sagte zu seinen beiden Söhnen, von denen der eine 4 Jahre älter war, als der andere: Nach 2 Jahren werde ich doppelt so alt sein, als ihr beide zusammen; und vor 6 Jahren war ich 6mal so alt, als ihr beide zusammen. Wie alt war der Vater, wie alt jeder der Söhne?

80) α) Drei Zahlen von folgender Beschaffenheit zu finden: Dividiert man die erste in 6, die zweite in 9, die dritte in 12, so erhält man zur Summe der Quotienten 9; dividiert man die erste in 9, die zweite in 12, die dritte in 6, so erhält man zur Summe der Quotienten 10; dividiert man endlich die erste in 12, die zweite in 6, die dritte in 9, so erhält man zur Summe der Quotienten $10\frac{1}{4}$. β) Drei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 3 : 4 : 5. Das 5fache der ersten Zahl nebst dem 4fachen der zweiten Zahl nebst dem 3fachen der dritten Zahl ist 345. Wie heißen die drei Zahlen?

81) Auf dem Personenzuge einer Eisenbahn haben für die Strecke von dem Orte A nach dem Orte B in der zweiten und dritten Wagenklasse zusammen 402 Personen mehr, als in der ersten Wagenklasse, Billets genommen. Der Ertrag für die gelösten Billets belief sich im ganzen auf 898 ℳ 30 ₰, und zwar für die zweite Klasse 136 ℳ 50 ₰ mehr, als für die erste, und 122 ℳ 20 ₰ weniger, als für die dritte Klasse. Jedes Billet in der ersten Klasse kostet $1\frac{1}{2}$mal soviel, als ein Billet

in der zweiten, und dreimal soviel, als eines in der dritten Wagenklasse. Wieviel betrug hiernach die Personenzahl in jeder der drei Wagenklassen?*)

82) Drei Knaben spielten mit Nüssen. A sagte zu B: Gieb mir 5 Nüsse, so habe ich doppelt soviel, als dir bleibt. B sagte zu C: Gieb mir 13 Nüsse, so habe ich dreimal soviel, als dir bleibt. C sagte zu A: Gieb mir drei Nüsse, so habe ich sechsmal soviel, als du behälst. Wieviel Nüsse hatte jeder Knabe?

83) Die Entfernungen der drei Planeten Mars, Ceres und Jupiter von der Sonne lassen sich annäherungsweise durch folgende Angabe berechnen: Man denke sich der Reihe nach zuerst Mars und Ceres, hierauf Mars und Jupiter und zuletzt Jupiter und Ceres noch einmal soweit von der Sonne entfernt, als sie von derselben abstehen; zu gleicher Zeit aber lasse man jedes Mal den dritten Planeten der Sonne um soviel in Meilen sich nähern, als die beiden andern in Meilen zusammen sich entfernen. Durch diese Veränderungen kommen alle drei Planeten in die gleiche Entfernung von 64 Millionen geogr. Meilen von der Sonne.

84) Man soll 232 in drei Zahlen zerlegen, so daß, wenn die erste von der Summe der beiden anderen die Hälfte, die zweite von der Summe der beiden anderen den dritten Teil, die dritte von der Summe der beiden übrigen den vierten Teil erhält, die drei Zahlen untereinander gleich werden.

85) Ein Dampfwagen und ein Eilwagen gehen beide von zwei entgegengesetzten Städten A und B ab, letzterer 2 Stunden früher als ersterer, und treffen 6 Stunden nach Abgang des ersteren zusammen. Legt jeder derselben jede Stunde $1\frac{1}{2}$ *km* mehr zurück, so treffen sie nach $5\frac{1}{2}$ Stunden zusammen; legt aber jeder derselben jede Stunde $1\frac{1}{2}$ *km* weniger zurück, und geht der Eilwagen 2 Stunden später ab, so treffen sie 7 Stunden 5 Minuten nach Abgang des Dampfwagens zusammen. Wieviel Kilometer legt jeder der Wagen in einer Stunde zurück, und wieviel Kilometer ist A von B entfernt?

86) 4 Metalle sind in dem Verhältnisse 1 : 3 : 5 : 7 miteinander verbunden. Setzt man zu dem Gewichte der Quantität noch das $2\frac{2}{3}$fache einer anderen, aus denselben Metallen bestehenden Legierung hinzu, so ändert sich das genannte Verhältnis der Metalle in 3 : 4 : 5 : 6 um. In welchem Verhältnisse stehen die Metalle der hinzugesetzten Legierung?

---

*) Ein ähnliches Beispiel findet sich unter den Gleichungen des 2. Grades mit mehreren Unbekannten, § 75, Nr. 37.

87) Ein Behälter faßt an Wasser zusammen 62 preuß. Pfund (Altgewicht) 174 *kg* und 622 engl. Pfund Troy-Gewicht. 93 preuß. Pfund, 145 *kg* und 311 engl. Pfund füllen nur $\frac{7}{10}$ desselben an, und 155 preuß. Pfund, 87 *kg* und 155½ engl. Pfund nur die Hälfte. In welchem Verhältnisse stehen die genannten Gewichte, und wieviel Kilogramm Wasser faßt der Behälter?

88) Zwei Körper bewegen sich gleichmäßig von zwei Punkten, A und B, einander entgegen. 15 Sekunden nach ihrem Abgange haben sie die Entfernung 35 *m*, hierauf nach 2 Sekunden wieder dieselbe Entfernung 35 *m*. Hätten beide Körper sich hintereinander, statt gegeneinander, bewegt, so würde 21 Sekunden nach ihrem Abgange der vorangehende, mit kleinerer Geschwindigkeit sich bewegende Körper um 35 *m* von dem nachfolgenden entfernt sein. α) Wie groß ist die Entfernung der Punkte A und B; β) wieviel Meter legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

89) Ein Wasserbehälter kann durch die Röhren A und B in 35 Minuten, durch A und C in 42 Minuten und durch B und C in 70 Minuten gefüllt werden. In wieviel Zeit kann er durch jede Röhre einzeln, in wieviel Zeit durch alle drei Röhren gefüllt werden?

90) Drei Röhren führen in einen Behälter, der bis auf eine gewisse Höhe gefüllt ist; die erste Röhre würde ihn in 7, die zweite in 5, die dritte in 8¾ Stunden füllen. Wenn man die erste fließen läßt und stündlich 28 *hl* herausnimmt, so wird der Behälter in 40 Stunden leer; wenn man aber die zweite öffnet und stündlich 39 *hl* herausnimmt, so wird er in 120 Stunden leer. Wann wird er leer, wenn die dritte Röhre fließt und stündlich 23 *hl* herausgenommen werden? Wieviel Hektoliter sind in dem Behälter enthalten, und wieviel Hektoliter liefert die erste Röhre stündlich?

91) Ein dreizifferige Zahl, deren Quersumme 6 [3] ist, zu finden, so daß die Ziffer auf der ersten Stelle links ¼ [½] der Zahl ist, welche aus den beiden übrigen Ziffern gebildet wird, und die Ziffer auf der ersten Stelle rechts die Hälfte [⅕] der aus den beiden übrigen gebildeten Zahl ist. Wie heißt die Zahl?

92) Ein Rechenmeister gab seinen drei Schülern zwei Zahlen zum Multiplizieren auf. Nach verrichteter Multiplikation mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators vergaß der eine bei der Summation auf irgend einer Stelle eine Eins im Sinne zu behalten; er machte die Probe auf die Rechnung, indem er das Resultat durch die kleinere Zahl dividierte, und erhielt zum Quotienten 971, zum Reste 214. Der zweite beging zwar an derselben Stelle keinen Fehler, an der nächstfolgenden aber vergaß er bei der Addition eine Zwei herüberzuziehen; er machte ebenfalls die Probe durch

die Division und erhielt zum Quotienten 965, zum Reste 198. Der dritte hatte eine Eins zu wenig auf der folgenden Stelle (ebenfalls nach der linken Seite hin) gerechnet und erhielt, indem auch er die Probe machte, zum Quotienten 940, zum Reste 48. Welches waren die beiden Zahlen, die miteinander multipliziert wurden, und bei welchen Stellen wurde von den drei Rechnern gefehlt?

93) Durch die vier in einem Vierecke liegenden Städte A, B, C und D geht eine je zwei derselben geradlinig miteinander verbindende Straße. Fahre ich von A über B und C nach D, so bezahle ich 6 ℳ 10 ₰ Postgeld; fahre ich von A über D und C nach B, so zahle ich 5 ℳ 50 ₰ Postgeld. Von A über B nach C zahle ich ebensoviel, als von A über D nach C; dagegen von B über A nach D 40 ₰ weniger, als von B über C nach D. Wie lassen sich aus diesen Angaben die Entfernungen AB, BC, CD und DA berechnen, wenn man außerdem weiß, daß für 1 *km* 10 ₰ Postgeld bezahlt wird?

94) Drei Bauern, A, B und C, haben ihr Vieh abwechselnd auf 4 Weiden geschickt, und auf jeder derselben gleichviel für die Woche und für jedes Stück bezahlt. A schickte seine Herde 5 Wochen auf die erste, 6 Wochen auf die zweite, 8 Wochen auf die dritte und 9 Wochen auf die vierte; B schickte seine Herde 8 Wochen auf die erste, 12 auf die zweite, 3 auf die dritte und 5 Wochen auf die vierte Weide; C endlich schickte seine Herde 8 Wochen auf die erste, 3 auf die zweite, 10 auf die dritte und 7 Wochen auf die vierte Weide. Auf der ersten Weide zahlen sie gemeinschaftlich 391,20 ℳ, auf der zweiten 349,20 ℳ, auf der dritten 414,80 ℳ. Wieviel Stück Vieh hat jeder der drei Bauern, wenn sie zusammen 138 Stück besitzen? Wieviel zahlt jeder für ein Stück wöchentlich? Wieviel mußten sie zusammen für die vierte Weide zahlen?

95) Vier Spieler, A, B, C und D, machen 4 Kartenspiele miteinander. Bei dem ersten Spiele gewinnen A, B und C, und zwar jeder soviel, als er besitzt; bei dem zweiten Spiele gewinnen A, B und D, und zwar wiederum jeder soviel, als er besitzt; ebenso gewinnen beim dritten Spiele A, C und D, und endlich bei dem vierten Spiele B, C und D. Hierauf zählen sie ihr Geld und finden, daß jeder 6 ℳ 40 ₰ hat. Wieviel hatte jeder vor dem Spiele?

96) In jedem von sieben Körben befindet sich eine gewisse Anzahl Äpfel. Lege ich aus dem ersten Korbe in jeden der übrigen soviel, als sie enthalten, hierauf aus dem zweiten in jeden der übrigen soviel, als sie enthalten, u. s. w. bis zum letzten hin,

so enthält jeder gleichviel, nämlich 128 Äpfel. Wieviel Äpfel enthielt jeder Korb vor der Verteilung?

97) n Zahlen von der Eigenschaft zu bestimmen, daß, wenn die erste an alle übrigen soviel abgiebt, als jede groß ist, und ebenso hierauf die zweite an alle übrigen soviel abgiebt, als jede nun groß geworden, u. s. w. bis zur n-ten, zuletzt n Zahlen entstehen, die alle gleich a sind.

98) Den Quotienten $\frac{27 + 34z}{(3 + 4z)(6 + 7z)}$ in die Summe zweier Quotienten zu zerlegen, deren Divisoren $3 + 4z$ und $6 + 7z$ sind.

99) Ebenso den Quotienten $\frac{a - bz}{(c - dz)(e - fz)}$ in die Summe zweier Quotienten zu zerlegen, deren Divisoren $c - dz$ und $e - fz$ sind.

100) Den Quotienten $\frac{306x^2 - 450x + 162}{(8x - 7)(5x - 4)(2x - 1)}$ in die Summe dreier Quotienten zu zerlegen, deren Divisoren $8x - 7$, $5x - 4$ und $2x - 1$ sind.

§ 68.

Auflösungen der Aufgaben in § 67.

1) Die eine Zahl ist 714 285 [$46\frac{19}{24}$], die andere 142 857 [$20\frac{23}{24}$].

2) 33 Personen stimmten dafür und 15 dagegen.

3) Der Schall 340,18 m, der Wind 4,24 m.

4) Die Nachricht wurde in 35 [7] Minuten mitgeteilt, und die Berliner Uhr ging 26 Minuten vor der Kölner Uhr.

5) Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 19 963 000 und die der Venus von der Sonne 14 440 000 geographische Meilen.

6) Das Zwanzigfrankstück zu 16 ℳ 35 ₰, der Dukaten zu 9 ℳ 55 ₰.

7) Die Mutter 5, das Söhnchen 7 Pfund.

8) Der eine 4, der andere 8 Nüsse. Allgemein der eine $\frac{bn(p + 1) + a(n + 1)}{np - 1}$, der andere $\frac{ap(n + 1) + b(p + 1)}{np - 1}$.

9) Der erste 54, der zweite 42 ℳ. 10) 3 Knaben und 4 Mädchen.

11) α) $\frac{5}{24}$. Allgemein der Zähler $\frac{n(a + bm)}{m - n}$ und der Nenner $\frac{a + bn}{m - n}$; β) $\frac{3}{7}$.

12) Die des A 7000, die des B 3000 Fl.

13) 40 u. 7. Allgemein $[qs + r] : [q + 1]$ u. $[s - r] : [q + 1]$.

14) $6\frac{1}{4}$ und $1\frac{1}{4}$. Allgemein $a^2 : [a - 1]$ und $a : [a - 1]$.

15) $\frac{a^2}{a + 1}$ u. $\frac{a}{a + 1}$. 16) 1,234 u. 5,678. 17) $a^2 + b$ u. $a + b^2$.

18) 857 und 142. 19) Der Vater 42, der Sohn 12 Jahre.

20) Das Kapital 4700 M, der Zinsfuß $4\frac{1}{4}$ Prozent.

21) Jeder hatte 3600 M zu bezahlen, und der Diskonto betrug $8\frac{1}{3}$ Prozent jährlich. 22) A hatte 40, B 80 M.

23) A besaß 216 M, B 288 M. Der Preis des ersten Pferdes war 360 M.

24) In dem einen 110, in dem anderen 50 l.

25) In dem einen $\frac{21}{8}n$, in dem anderen $\frac{11}{8}n$ l.

26) Die eine 3, die andere 7.

27) 16 und 4. Allgemein: $(a + b)^2 : [2(a - b)]$ u. $\frac{1}{2}(a + b)$.

28) 324. 29) 13 : 17.

30) $\frac{(m - n)dp + (p - q)om}{np - mq} : \frac{(m - n)dq + (p - q)on}{np - mq}$.

31) 15 und 25. 32) 168 und 120. 33) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$.

34) Das erste 480, das zweite 400, das dritte 560 l.

35) 73. 36) Das Zwanzigfrancstück zu 16 M 25 ₰, der Dukaten zu 9 M 45 ₰.

37) Ein Kilogramm Kaffee 2 M, ein Kilogramm Zucker 75 ₰.

38) Der des Meisters 5 M, der des Gesellen $3\frac{3}{4}$ M.

39) Das eine Kapital ist 1620, das andere 4860 Frc. Beide stehen zu $4\frac{1}{4}$ Prozent aus.

40) Der eine $3\frac{1}{2}$, der andere $4\frac{3}{4}$ l.

41) Das eine 10 260, das andere 7560 M.

42) Das eine 1840, das andere 2200 Fl.

43) α) Das Liter der schlechteren Sorte 1,2 M, der besseren 1,6 M; β) $\frac{(c + d)bq - (a + b)dp}{bc - ad}$ und $\frac{(a + b)cp - (c + d)aq}{bc - ad}$.

44) Das Kleid $5\frac{1}{2}$ Fl, das Paar Schuhe $2\frac{1}{2}$ Fl.

45) Ein Kubikcentimeter Zinn 7,21 g, ein Kubikcentimeter Blei 11,33 g.

46) Im ersten Jahre betrugen die Ausgaben 720 M, die Steuern 120 M und der Ertrag des Gutes 1680 M.

47) Der eine $\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$, der andere $\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$.

48) Der erste 11, der zweite 7 *m*.

49) Der erste $\frac{d(n+m)}{2mn+t(n+m)}$, der zweite $\frac{d(n-m)}{2mn+t(n+m)}$ Meter.

50) Der erste $\frac{d(n+m)}{2mn-t(n+m)}$, der zweite $\frac{d(n-m)}{2mn-t(n+m)}$ Meter.

51) A legt jede Stunde $4\frac{1}{2}$ *km*, B jede Stunde $5\frac{5}{14}$ *km* zurück.

52) Der erste $\frac{d(u+n-m)}{t(u+n)+mu}$, der zweite $\frac{d(t+m-n)}{t(u+n)+mu}$ Meter.

53) Die erste Schleuse schickt stündlich 150, die zweite 600 *cbm* Wasser. Werden beide Schleusen zugleich geöffnet, so wird der Teich in $13\frac{1}{2}$ Stunden voll.

54) Die Länge 1080 *m*, die Dauer im ganzen $19\frac{1}{2}$ Minuten.

55) Die eine von dem Gehalte $562\frac{1}{2}$, die andere von dem Gehalte $937\frac{1}{2}$.

56) Der erste 25, der zweite 35 *kg*.

57) Jedes Meter Tuch kostete 10 *M* und das Zwanzigfrancstück wurde zu 16 *M* 35 *Pf* gerechnet.

58) Für die erste Ware 756, für die zweite 264 *M*.

59) Das des A 3100, das des B 7400 *Fl*.

60) In dem Verhältnisse 7 : 8 : 9.

61) 930 Quart. 1 Quart : 1 Liter = 71 : 62.

62) 1) $\frac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b-a)t'-(b'-a')t}{(x't-at')(bt'-b't)}$;

2) $\frac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b+a)t'-(b'+a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}$.

63) 144 *m* lang und 120 *m* breit.

64) Die Länge beträgt $\frac{ab(an-bm)}{2(a^2-b^2)}$, die Breite $\frac{ab(am-bn)}{2(a^2-b^2)}$.

65) Er besitzt 300 Ochsen, und der Vorrat reicht auf 60 Tage hin.

66) Der Arbeiter sind 20, und der Lohn eines jeden beträgt 1 *M* 70 *Pf*.

67) Die eine Röhre liefert jede Minute 24, die andere jede Minute 20 *l*. Im ersten Falle war die eine 2 Stunden 20 Minuten, die andere 1 Stunde 20 Minuten lang geöffnet; umgekehrt im zweiten Falle.

68) 6 *m* von $1\frac{1}{2}$ *m* Breite.

69) Der Arbeiter waren 18 und jeder trug 25 *kg*.

70) Der erste Wagen gebraucht 12, der zweite 16, der dritte 9 Stunden. Die Entfernung AB beträgt 90 Kilometer.

71) $2b:[1-a]$ und $2b:[1+a]$.

72) Das eine 29 241, das andere 2809 *qm*.

73) 9 und 6. 74) 28 und 12.

75) α) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$; β) $2a:[a^2-b^2]$ und $2b:[a^2-b^2]$.

76) 63. 77) A von B 37, B von C 45 und C von A 52 *km*.

78) 61, 29 und 6. 79) Der Vater war 42, der eine Sohn 11, der andere 7 Jahre alt. 80) α) 2, 3 und 4; β) $22\frac{1}{2}$, 30 und $37\frac{1}{2}$.

81) Auf der ersten 43, auf der zweiten 117, auf der dritten 328.

82) A hatte 7, B 11, C 21 Nüsse.

83) Mars 32, Ceres 56, Jupiter 104 Millionen Meilen. Die drei Zahlen 32, 56, 104 ändern sich zuerst in die Zahlen 64, 112, 16, hierauf in die Zahlen 128, 32, 32 und zuletzt in die Zahlen 64, 64, 64 um.

84) Der erste Teil ist 40, der zweite 88, der dritte 104.

85) Der Dampfwagen legt jede Stunde $38\frac{1}{2}$, der Eilwagen jede Stunde 7 *km* zurück; die Entfernung beträgt 287 *km*.

86) In dem Verhältnisse 8 : 9 : 10 : 11.

87) Das alte preuß. Pfund verhält sich zum Kilogramm, wie 29 : 62, das alte preuß. Pfund zum englischen Troy-Pfund, wie 311 : 248. Der Behälter faßt 435 *kg* Wasser.

88) α) 560 *m*; β) der eine Körper legt in jeder Sekunde 5, der andere in jeder Sekunde 30 *m* zurück.

89) Durch sämtliche Röhren in 30 Minuten; durch A in $52\frac{1}{2}$, durch B in 105, durch C in 210 Minuten.

90) In 10 Stunden; $7\frac{1}{2}$ *hl*; $27\frac{11}{18}$ *hl*. 91) 105 [102].

92) Die beiden miteinander zu multiplizierenden Zahlen waren 314 und 972. Der erste Schüler hatte auf der dritten, der zweite auf der vierten und der dritte auf der fünften Stelle von der Rechten zur Linken gefehlt.

93) A ist von B 21, B von C 17, C von D 23, D von A 15 *km* entfernt.

94) A hatte 42, B 37, C 59 Stück Vieh; jeder zahlte für 1 Stück in einer Woche 40 ₰; für die vierte Weide mußten sie zusammen 390 ℳ 40 ₰ bezahlen.

95) A hatte 2 ℳ, B 3 ℳ 60 ₰, C 6 ℳ 80 ₰, D 13 ℳ 20 ₰.

96) Der erste 449, der zweite 225, der dritte 113, der vierte 57, der fünfte 29, der sechste 15, der siebente 8 Äpfel.

97) Die erste ist $\frac{2^{n-1}\cdot n+1}{2^n}\cdot a$, die zweite $\frac{2^{n-2}\cdot n+1}{2^n}\cdot a$,

die dritte $\frac{2^{n-3} \cdot n + 1}{2^n} \cdot a$ u. s. w., die p-te $\frac{2^{n-p} \cdot n + 1}{2^n} \cdot a$, die $(n - 2)$-te $\frac{4n + 1}{2^n} \cdot a$, die $(n - 1)$-te $\frac{2n + 1}{2^n} \cdot a$ und die n-te $\frac{n + 1}{2^n} \cdot a$. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht ohne Ansatz am einfachsten, wenn man rückwärts verfährt. Die letzte Operation giebt die Zahlen $a, a, a, a, a \ldots a$; die vorletzte giebt $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \ldots \frac{n+1}{2} a$ u. s. w.

98) $\frac{2}{3+4z} + \frac{5}{6+7z}$. 99) $\frac{bc-ad}{cf-de}$ u. $\frac{af-be}{cf-de}$ sind die Dividenden.

100) $\frac{9}{8x-7} + \frac{6}{5x-4} + \frac{3}{2x-1}$.

B. Gleichungen vom zweiten Grade.

§ 69.

Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) Was versteht man unter einer reinen, was unter einer gemischten quadratischen Gleichung?

A. Reine quadratische Gleichungen.

2) Wie wird eine reine quadratische Gleichung aufgelöst?

3) $7x^2 = 105903$. 4) $16x^2 = 1210000$.

5) $x^2 - m = 0$. Wie läßt sich diese Gleichung als das Produkt zweier Gleichungen des ersten Grades darstellen?

6) $12ab + x^2 = 4a^2 + 9b^2$. 7) $10000 - \frac{36}{49}x^2 = 199$.

8) $11 - \frac{x + 25}{x^2} = 3 - \frac{x - 25}{x^2}$.

9) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2(a^2+1)}{(1+a)(1-a)}$.

10) α) $\frac{x-m}{x+m} = \frac{n-x}{n+x}$. β) $\frac{7x + 2\sqrt{-1}}{7x - 2\sqrt{-1}} = \frac{2\sqrt{-1} - 7x}{2\sqrt{-1} + 7x}$.

11) $\sqrt{\frac{5}{x^2}+49}-\sqrt{\frac{5}{x^2}-49}=7$.

12) $x+\sqrt{x^2-17}=4:\sqrt{x^2-17}$.

13) $x+\sqrt{a+x^2}=(a^2+a):\sqrt{4a+4x^2}$.

14) $\sqrt{\frac{3m^2}{x^2}+m^2-3}=m+1-\sqrt{\frac{3m^2}{x^2}-2}$.

15) $\sqrt{a-\frac{b}{x^2}}+\sqrt{d-\frac{b}{x^2}}=c$.

16) $\sqrt{\frac{560}{x^2}+29}-\sqrt{\frac{560}{x^2}-34}=7$.

17) $\sqrt[3]{0{,}125x^3-6x}=\sqrt{0{,}25x^2-8}$.

18) $(1-\sqrt{1-x^2})^{-1}-(1+\sqrt{1-x^2})^{-1}=x^{-2}\sqrt{3}$.

19) $(x+\sqrt{2-x^2})^{-1}+(x-\sqrt{2-x^2})^{-1}=x$.

20) α) $\frac{\sqrt[n]{m+x^2}}{m}+\frac{\sqrt[n]{m+x^2}}{x^2}=\sqrt[n]{x^2}$;

β) $\sqrt[m-1]{m}\cdot\sqrt[m+1]{x-m}=\sqrt[m+1]{m}\cdot\sqrt[m-1]{x-m}$.

21) $\frac{x+m-2n}{x+m+2n}=\frac{n+2m-2x}{n-2m+2x}$.

22) $\frac{49}{64}\left(x-\frac{7}{9}\right)^2=\frac{25}{81}$.

23) $\frac{2}{x-10}+10-x=\frac{2}{10-x}$

24) $\frac{a(a-b)}{x-a-b}+a+b-x=\frac{(b-a)b}{a+b-x}$.

25) α) $m^2=\frac{(x+b-c)(x-b+c)}{(b+c+x)(b+c-x)}$; β) $\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)}=x$.

B. Gemischte quadratische Gleichungen.

26) Wie wird eine gemischte quadratische Gleichung aufgelöst? $x^2+px=q$ aufzulösen.

27) $x^2+6x=7$.

28) $x^2-8x=-12$.

29) $x^2+10x=-21$.

30) $x^2-mx+n=0$.

31) $x^2+mx+n=0$.

32) $x^2-mx-n=0$.

33) $x^2 + mx - n = 0.$ 34) $x^2 + 10x - 24 = 0$*).
35) $x^2 - 10x - 24 = 0.$ 36) $x^2 + 10x + 24 = 0.$
37) $x^2 - 10x + 24 = 0.$ 38) $986x = 145\,080 - x^2.$
39) $x^2 - 986x = -145\,080.$ 40) $26x - x^2 + 120 = 0.$
41) $x^2 + 26x + 120 = 0.$ 42) $x(9999 - x) = 10\,816\,010.$
43) $557x = 5801\tfrac{1}{4} + 8x^2.$
44) $840\,478{,}2 + (4x)^2 = (8027 + 6x)x.$
45) $699\,230{,}07 - 3(100x - 31x^2) = 100x\,(60 + x).$
46) $px^2 - qx + r = 0.$

47) In welchem Falle sind die Wurzeln der Gleichung $px^2 - qx + r = 0$ reell, in welchem Falle imaginär?

48) In welchem Falle sind die beiden Wurzelwerte der Gleichung $px^2 - qx + r = 0$ einander gleich, oder hat die quadratische Gleichung nur einen Wurzelwert?

49) Wann sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ beide positiv, wann beide negativ, wann ist die größere Wurzel positiv und die kleinere negativ, wann die kleinere positiv und die größere negativ?

50) α) $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}$; β) $\frac{1}{n(n+1)x} = x + \frac{1}{n(n+1)}.$
51) $x^2 = 1 - x.$ 52) $(7x)^2 - 7x = 1.$
53) $(5x)^2 - 33\,333x = 24x^2 + 11\,111x + 701\,060\,205.$
54) $12x^2 = 21 + \tfrac{1}{4}x.$ 55) $57x - 18x^2 + 145 = 0.$
56) $\frac{x}{100} - \frac{21}{25x} = \tfrac{1}{4}.$ 57) $\frac{x}{100} + \frac{21}{25x} = -\tfrac{1}{4}.$
58) $\frac{15}{x} - \frac{72 - 6x}{2x^2} = 2.$
59) $x + \frac{3{,}351\,297\,2}{x} = -3{,}8259.$ 60) $\frac{9}{16} + \frac{64}{81x^2} = \frac{4}{3x}.$
61) $(\tfrac{1}{3}x)^2 + 1 = (\tfrac{5}{13})^2 - \tfrac{10}{13}x - (\tfrac{1}{4}x)^2.$
62) α) $\tfrac{3}{4}x^2 - 9x = 0$; β) $x^2 = x.$
63) $ax^2 - a^2(x + b^2) = ab(x - ab).$
64) $(x - a)^2 - b(x - a - c) = bc.$ 65) $x^2 - 2x = -2.$
66) $\frac{x}{4} + \frac{25}{x} = 3$ 67) $\frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 1.$
68) $x^2 = 2x\sqrt{-1} - 1.$ 69) $x^2 + a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 2ax.$

*) Mehrere der nachfolgenden Gleichungen lassen sich, wenn sie auf die Form $= 0$ gebracht werden, nach Anleitung von § 28 Nr. 43 und 50 durch ein Produkt zweier binomischer Faktoren darstellen. Setzt man nacheinander die einzelnen Faktoren $= 0$, so erhält man die beiden Wurzelwerte für x.

70) $x^2 - (a+b)x + ab = 0.$ 71) $x^2 + 1 = x\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{mn}.$

72) $2b^2 = 2x\sqrt{a^2+b^2} - x^2.$

73) $\frac{x^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}x - (m-n)^2 = 0.$

74) $x^2 - (a^2+b^2)x + (a^2-b^2)ab = 0.$

75) $x^2 - (a^2+b^2)x - (a^2-b^2)ab = 0.$

76) α) $(x - 3\frac{1}{2})(x + 5\frac{1}{2}) = 0$; β) $(3x - 25)(7x + 29) = 0.$

77) α) $m(ax - b)(bx - a) = 0$;

β) $7\left(\frac{1}{7}x - 1\right)\left(x + \frac{1}{7}\right) = 0.$

78) $(x - \sqrt{-7})(x - \sqrt{-11}) = 0.$

79) $(m - x)^2 + (x - n)^2 = (m - n)^2.$

80) $(p + mx\sqrt{-1})(1 + nx) = 0.$

81) $x^2 - 5x = 6\sqrt{-3} - 16.$

82) $x^2 + (5 + 2\sqrt{-1})x = 24 + 6\sqrt{-1}.$

83) $x^2 - (8 - 2\sqrt{-1})x = 38\sqrt{-1} - 31.$

84) $x^2 - 2x = 2\sqrt{6} - 6.$

85) $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{2b}.$

86) $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a} = \frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}.$

87) $\frac{2+3x}{1-4x} - \frac{6-5x}{7x-25} = \frac{16-x}{28x-193}.$

88) α) $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x} = \frac{3+x^2}{a^2-x^2}$;

β) $(a-1)^2x^2 + 2(3a-1)x = 4a - 1.$

89) $x : (a+x) + (a+x) : x = 2\frac{1}{2}.$

90) $\frac{12x^3 - 11x^2 + 10x - 78}{8x^2 - 7x + 6} = 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$

91) $\frac{\sqrt{3a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{3a+x}} = \frac{\sqrt{3a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{3a-x}}.$

92) $\frac{2x-3}{3x-2} - \frac{3x-2}{2x-3} = 5(1 - x^2).$

93) $\frac{x+m}{a+m} - \frac{a-m}{x-m} = \frac{x+n}{a+n} - \frac{a-n}{x-n}.$

94) $(m-n)x^2 - nx = m.$

95) $x^2 + \frac{a-b}{ab^2} = \frac{14a^2 - 5b(a+2b)}{18a^2b^2} + \frac{2a-3b}{2ab}x.$

96) α) $\frac{x}{a-b} = \frac{1}{2\sqrt{a-x}}$; β) $\frac{1}{a-b+x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{x}.$

97) $15x^2 - (5a+3b-3c)(50b-12a-90c+15x) = 15bc + 324ac - 169ab.$

98) $\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 18x + 27} = -\sqrt{4x^2 + 4x + 9}.$

99) $\frac{x^3-1}{x-1} = 0.$ 100) $x^{2n} + ax^n = b.$

101) $x^4 + 28\,224 = (25x)^2.$ 102) $(13x^2)^2 + (12x)^2 = 5^2.$

103) $(65x)^4 + (65^2x)^2 + 1848^2 = 0.$

104) α) $x^4 - ax^2 + b^2 = 0$; β) $x^4 + 4abx^2 = (a^2 - b^2)^2.$

105) $4m^2 = (a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b).$

106) $(2{,}5 - x)^4 + 0{,}5625 = 2{,}5(2{,}5 - x)^2.$

107) $25x^2 - \sqrt{x^4 - 6x^2} = 25x^2 - 3\sqrt{-1}.$

108) $(x^2 - 8x + 11)^2 + (x-4)^2 = 25.$

109) $x^6 + 27 = 28x^3.$ 110) $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0.$

---

111) α) $\sqrt{x-1} = x - 1$; β) $7x - 4\sqrt{x} = 20.$

112) α) $x + \sqrt{x} = 20$; β) $x - \sqrt{x} = 20.$

113) α) $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2x\sqrt{1-x^2}$; β) $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^3} = 6\sqrt{x}.$

114) α) $(a+x)^{\frac{2}{3}} + 6(a-x)^{\frac{2}{3}} = 5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$;

β) $\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{c}{x}$; γ) $\frac{5+x+\sqrt{25-x^2}}{5+x-\sqrt{25-x^2}} = \frac{8}{x}.$

115) $x - (a+b)\sqrt{x} = 2a(a-b).$

116) $x + ab = (a+b)\sqrt{x} + 2(a-b)^2.$

117) α) $\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}} + \frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\tfrac{1}{2}$; β) $\frac{x}{5+\sqrt{x}} + \frac{5+\sqrt{x}}{x} = 2\tfrac{9}{28}.$

118) $\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} = \sqrt{7x+72}.$

119) $\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-4x} = 4\sqrt{x}.$

120) $\sqrt{2abx} + \sqrt{a^2 - bx} = \sqrt{a^2 + bx}.$

121) $x + 2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x} + 10ab = 0.$

122) $\sqrt{x^2 - 8x + 31} + (x-4)^2 = 5.$

123) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 20.$ 124) $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-1} - 2x\sqrt{x^2-1} = 0{,}25$ *).

*) Man setze $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-1} = y.$

125) $\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x^2} = 350.$ 126) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{-x} = n(n+1).$

127) $x^{1\frac{3}{5}} + x^{3\frac{1}{5}} = 43\,053\,282.$ 128) $12x^{-\frac{3}{4}} - x^{-\frac{3}{8}} = 2^{-4}.$

129) α) $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2};$

β) $\sqrt{(x-a)(x-b)} + \sqrt{(x-c)(x-a+b-c)} = \sqrt{(a-c)(b-c)}.$

130) α) $(x+\sqrt{x})^4 - (x+\sqrt{x})^2 = 20\,592;$

β) $(ax^{2m} + bx^m + c)^{2n} + p(ax^{2m} + bx^m + c)^n = q;$

γ) $(x^{2m} + a^m x^m - a^{2m})^{2n} + a^{2mn}(x^{2m} + a^m x^m - a^{2m})^n = 2a^{4mn}.$

131) α) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = m$ *);

β) $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

132) $\sqrt[3]{m-x} - \sqrt[3]{n-x} = p.$

133) $\sqrt[3]{m-x} + \sqrt[3]{x-n} = \sqrt[3]{m-n}.$

134) $\sqrt[3]{x^2 + 2x\sqrt{a} + a} - \sqrt[3]{x^2 + 2x\sqrt{a} - a} = \sqrt[3]{2a}.$

135) α) $(x-a)(x-b)(x-c) + abc = 0.$

β) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) = b^4.$

136) α) $9(x^2 - 7x + 12) = 7(x^2 - 7x + 12)$ **);

β) $a(x-b)(x-c) = (a+1)(x-b)(c-x).$

Exponential-Gleichungen.

137) $\sqrt[x]{1{,}371\,29^{-10}} + \sqrt[x]{1{,}371\,29^{-20}} = 0{,}11.$

138) $(4^{3-x})^{2-x} = 1.$ 139) $10^{(5-x)(6-x)} = 100.$

140) $\sqrt[x]{a} = a^x.$ 141) $\sqrt[x]{0{,}707\,107} = 0{,}707\,107^{x+707\,107}.$

142) $\sqrt[x+1]{2} = 3^{x+2}.$ 143) $a \cdot b^x = \sqrt[x]{c}.$

144) $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}.$ 145) $x^{\log x} = 10.$

---

*) Die Gleichungen 131—134 werden am einfachsten dadurch gelöst, daß man beide Seiten zur 3. Potenz erhebt und berücksichtigt, daß $(p-q)^3 = p^3 - q^3 - 3pq(p-q)$ ist.

**) Man vergleiche die Bemerkung zu § 61 Nr. 192.

146) $x^{2+\log x} = 15{,}2016.$ 147) $(2 \cdot 3^x)^{x+4} = 5.$

148) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x+1]{b} = c.$ 149) $\sqrt[x+2]{117\,649} : \sqrt[x+3]{2401} = 7.$

150) α) $625^{\frac{x+1}{x+2}} : 15\,625^{\frac{4x-3}{5x-4}} = 0{,}04;$ β) $m = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$

151) $7^{\frac{x+1}{x+2}} = 6{,}703\,75^{\frac{x+3}{x+4}}.$ 152) $10^{0{,}289\,623} = x^{\log x}.$

153) α) $(10\,000x)^{(\log x)^2 - 5\log x} = 1;$

β) $\sqrt[x]{2}\;\sqrt[x+1]{3} \cdot \sqrt[x+2]{4} = 1.$ γ) $3^x \cdot \sqrt[x+1]{8^x} = 36.$

---

154) Wenn x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - px + q = 0$ sind, wem ist α) $x_1 + x_2$, β) $x_1 x_2$, γ) $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$, δ) $x_1^3 + x_2^3$, ε) $x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4$ gleich?

155) Welche Gleichung hat α) die Wurzeln 123 und 789; β) die Wurzeln $-12\frac{3}{4}$ und $+56\frac{7}{8}$?

156) Welche Gleichung hat α) die Wurzeln $a - 2b$ und $3a - 4b$; β) die Wurzeln $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$?

157) Welche quadratische Gleichung hat α) die Wurzeln $ab\sqrt{a:b}$ und $-ab\sqrt{a:b}$; β) beide Wurzeln gleich 13?

158) Welche Gleichung hat die Wurzeln $a + b + c\sqrt{-1}$ und $a + b - c\sqrt{-1}$?

159) In welche Faktoren lassen sich die Gleichungen
α) $x^2 - px + q = 0$, β) $x^2 - 6x + 8\frac{7}{16} = 0$, γ) $x^2 - x - 15\frac{3}{4} = 0$ zerlegen, und wie heißen die Wurzeln? Die Gleichungen Nr. 27, 28, 29, 34, 35, 36, 37, 40 und 41 sollen mittels Zerlegung aufgelöst werden.

160) Für welche Zahlenwerte von x wird der Ausdruck $x^2 - 18x + 77$ positiv, für welche negativ?

161) Für welche Zahlenwerte von x wird α) der Ausdruck $x^2 + 3\frac{1}{12}x + 2\frac{1}{3}$, β) der Ausdruck $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4}$ positiv und für welche negativ?

162) Die Gleichung $x^2 - 4{,}2527x + 3{,}490\,652\,064\,9 = 0$ hat die eine Wurzel 1,111 11. Wie heißt die andere?

163) Die eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 444\frac{61}{66}x = 975\,406\frac{5}{66}$ ist $-1234\frac{5}{6}$. Wie groß ist die andere?

164) Die eine Wurzel der Gleichung
$x^2 - (5p - 7q + 9r)x + 4p^2 + 18pr + 18r^2 = 13pq - 10q^2 + 27qr$ ist $4p - 5q + 6r$. Wie heißt die andere Wurzel?

165) In den Gleichungen $x^2 - 714x + 78165 = 0$ und $x^2 - 444x - 78165 = 0$ ist die eine Wurzel bei beiden dieselbe; dagegen ist die zweite Wurzel der einen Gleichung, negativ genommen, gleich der zweiten Wurzel der anderen Gleichung. Wie heißen die Wurzeln beider Gleichungen?

Trigonometrische Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade *).

166) Welche Formen nehmen die Wurzeln der Gleichung $x^2 \pm px = q$ an, wenn $\frac{2\sqrt{q}}{p} = tang\,\lambda$ gesetzt wird?

167) Welche Formen nehmen die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 \pm px = -q$ an, wenn α) für den Fall, daß $4q \leqq p^2$ ist, $2\sqrt{q} : p = sin\,\lambda$, β) für den Fall, daß $4q > p^2$ ist, $p : (2\sqrt{q}) = cos\,\vartheta$ gesetzt wird?

168) $x^2 + 1{,}1102x = 3{,}3594$.

169) $x^2 + 0{,}42331x = 8{,}53972$.

170) α) $x^2 + 9{,}12557x + 9{,}7419 = 0$.
β) $x^2 - 10{,}83945x + 26{,}9911 = 0$.

171) $7{,}3527x^2 - 148{,}871 = 33{,}815x$.

172) $x^2 : 1{,}2345 - 1{,}54994x + 0{,}6789 = 0$.

173) Was wird aus dem Resultate der Gleichung:

$$c^2 = (a + mx)^2 + (d + nx)^2,$$

wenn $n : m = tang\,\alpha$, $p : q = tang\,\beta$, $p^2 = c^2 - a^2 - d^2$ und $q = a\,cos\,\alpha + d\,sin\,\alpha$ gesetzt werden? **)

174) $1930{,}58^2 = (1605{,}8 + 2604{,}8x)^2 + (111{,}8x - 616{,}1)^2$.

175) Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - mx + n = 0$ mit $tang\,\varphi$ und $tang\,\varphi'$ bezeichnet werden, durch welche Formeln lassen sich die Winkel φ und φ' bestimmen?

176) $x^2 - 24{,}691x + 61{,}6 = 0$.

177) $x^2 - 2{,}3927x - 5{,}757312 = 0$.

178) $x^2 + 0{,}43555x - 0{,}2016 = 0$.

179) $x^2 + 0{,}91931x + 0{,}2112 = 0$.

180) $7{,}285x^2 + 19{,}749x - 115{,}638 = 0$.

181) $x^2 - 138{,}72274x + 8016 = 0$.

182) $x^2 + 9{,}859006x + 32{,}59 = 0$.

Reciproke Gleichungen höheren Grades, die sich auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen lassen.

183) $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ ***).

---

*) Man vergleiche Heis, Lehrbuch der Trigonometrie VIII. 112.

**) Diese Gleichung kommt bei Berechnung von Sonnenfinsternissen in Anwendung.

***) Trigonometrische Lösung s. Heis, Trigonometrie VIII. 115.

Anleitung. Dividiert man die ganze Gleichung durch x^2, so ist: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$. Setzt man $x + \frac{1}{x} = z$, so ist $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Die gegebene Gleichung verwandelt sich also in: $z^2 + az + b - 2 = 0$.

184) $x^4 + 1\frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 1\frac{1}{2}x + 1 = 0$.

185) $x^4 - 3\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$.

186) $x^4 - 4\frac{1}{3}x^3 + 5\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{1}{3}x + 1 = 0$.

187) α) $x^4 + \left(n - \frac{1}{n}\right)x^3 - 2n^2x^2 + \left(n - \frac{1}{n}\right)x + 1 = 0$;

β) $(x - 1)^2 (x^2 + 1) = a^2x^2$.

188) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + (c^2 : a^2) = 0$. Anl.: $x = y\sqrt{c : a}$.

189) $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0$.

190) $x^4 + 3x^3 - 41\frac{9}{25}x^2 + 6x + 4 = 0$.

191) $x^4 + 2x^3 - 21\frac{1}{9}x^2 + 10x + 25 = 0$.

192) $x^3 \pm ax^2 \pm ax + 1 = 0$.

Anleitung. $x^3 \pm ax^2 \pm ax + 1 = x^3 + 1 \pm ax(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 \pm ax)$, u. s. w.

193) $x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1 = 0$.

194) $x^3 - 1\frac{1}{6}x^2 - 1\frac{1}{6}x + 1 = 0$. 195) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.

196) $x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$.

197) $x^5 + 3x^4 + 2\frac{3}{4}x^3 + 2\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$.

198) $x^5 - 4\frac{13}{21}x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4\frac{13}{21}x + 1 = 0$.

199) $x^3 + ax^2 + bx + (b^3 : a^3) = 0$. Anleit.: $x = \frac{b}{a}y$.

200) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$. 201) $x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{8} = 0$.

202) $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + (c^3a : b^3)x + (c^5 : b^5) = 0$.

203) α) $x^5 - 2\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 2x^2 - 20x + 32 = 0$;

β) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 16x + 32 = 0$.

204) α) $x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0$;

β) $x^6 - 5\frac{5}{6}x^5 + 9\frac{1}{3}x^4 - 9\frac{1}{3}x^2 + 5\frac{5}{6}x - 1 = 0$;

γ) $x^7 + 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$;

δ) $x^7 + ax^6 + bx^5 + (a + b - 1)x^4 + (a + b - 1)x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$;

ε) $x^8 + ax^7 + bx^6 + 4ax^5 + (2b - 1)x^4 + 4ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$;

ζ) $x^9 + 3x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 1 = 0$;

η) $x^{10} + x^9 + 3x^7 - 3x^3 - x - 1 = 0$.

Wiederholungsbeispiele.

205) $x^2 - 2mx = (n - p + m)(n - p - m)$.

206) $x^2 - (m + n)x = \frac{1}{4}[p + q - m - n][p + q + m + n]$.

207) $x^2 - (c - b)x = (a - b)(a - c)$.

208) $2(a^2 + b^2)x - x^2 = (a^2 - b^2)^2$.

209) $(a^2 + 1)x - ax^2 = a.$ 210) $(ac + b^2)x - bcx^2 = ab.$

211) $abx^2 - (a + b)(ab + 1)x + (a^2 + 1)(b^2 + 1) = 0.$

212) $mnx^2 - (m + n)(mn + 1)x + (m + n)^2 = 0.$

213) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 x = 2x^2 + \sqrt{a^3 b} + \sqrt{ab^3}.$

214) $2ab\sqrt{ab} = (a + b)x[\sqrt{ab} - x] + 2abx.$

215) $\frac{(11x^2 + 5x + 1)(x^2 + 5x + 11)}{(2x^2 + 5x + 1)(x^2 + 5x + 2)} = 4.$

216) $\sqrt{x^2 + mx + n^2} - \sqrt{x^2 + nx + m^2} = m - n.$

217) α) $\frac{x - 3}{x - 5} + \frac{x - 5}{x - 3} = \frac{x - 1}{x - 4} + \frac{x - 4}{x - 1};$

β) $\frac{1 + x}{2 + x} - \frac{3 + x}{4 + x} = \frac{4 + x}{5 + x} - \frac{2 + x}{3 + x};$

γ) $\sqrt[3]{\frac{1 + x}{1 - x}} + \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}} = 2\sqrt[3]{\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2}.$

218) $\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2 + x} - \frac{1}{3 + x} - \frac{1}{4 + x} + \frac{1}{5 + x} - \frac{1}{6 + x}$
$+ \frac{1}{7 + x} = 0.$

219) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2} + \frac{c}{x - 3} + \frac{b}{x - 4} + \frac{a}{x - 5} = 0.$

220) $\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} + \frac{1}{x + c} + \frac{1}{x + a + b - c} = 0.$

221) $\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} + \frac{1}{x + c} + \frac{1}{x + d} + \frac{1}{x + a + b - c}$
$+ \frac{1}{x + a + c - d} = 0.$

222) $\frac{1}{x - a} + x - a = \frac{1}{x - b} + x - b.$

223) $\frac{m}{mx - n} + \frac{mx - n}{m} = \frac{n}{nx - m} + \frac{nx - m}{n}.$

224) $(a + 2x - \sqrt{a^2 - 4x^2})\, a = 5x(a + 2x + \sqrt{a^2 - 4x^2}).$

225) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{b}.$

226) $\sqrt[3]{(1 + x)^2} - \sqrt[3]{(1 - x)^2} = \sqrt[3]{1 - x^2}.$

227) $1 + x^4 = a\,(1 + x)^4$. 228) $1 + x^5 = a(1 + x)^5$.

229) $\alpha)\ \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - a}} = \dfrac{n^2 a}{x - a}$; $\beta)\ \dfrac{(x^4 - 1)(x + 1)}{(x^4 + 1)(x - 1)} = \dfrac{a^2}{b}$.

230) $\dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} + \dfrac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{m^2 + 1}{m}$.

231) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2 + a^2 x} + \sqrt{x^2 - a^2 x}} + \sqrt{\sqrt{x^2 + a^2 x} - \sqrt{x^2 - a^2 x}}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + a^2 x} + \sqrt{x^2 - a^2 x}} - \sqrt{\sqrt{x^2 + a^2 x} - \sqrt{x^2 - a^2 x}}}$
$= \sqrt{1 + a}$.

§ 70.

Auflösungen der Aufgaben in § 69.

(Der eine Wurzelwert der Gleichung ist mit x_1, der andere mit x_2 bezeichnet.)

3) $x = \pm 123$. 4) $x = \pm 275$. 5) $x = \pm \sqrt{m}$.
6) $x = \pm(2a - 3b)$. 7) $x = \pm 115\frac{1}{2}$. 8) $x = \pm 2\frac{1}{2}$.
9) $x = \pm 1$. 10) $\alpha)\ x = \pm \sqrt{mn}$. $\beta)\ x = \pm \frac{2}{7}$.
11) $x = \pm \frac{2}{7}$. 12) $x = \pm 4\frac{1}{3}$.
13) $x = \pm \frac{1}{2}(a - 1)$. 14) $x = \pm m$.
15) $x = \pm 2c\sqrt{b : [4c^2 d - (c^2 + d - a)^2]} =$
$\pm 2c\sqrt{b : [4ac^2 - (c^2 + a - d)^2]}$.
16) $x = \pm 4$.
17) $x = \pm 6{,}531\,97$. 18) x_1 und $x_2 = \pm \frac{1}{2}$, $x_3 = \infty$
19) x_1 und $x_2 = \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 0$.
20) $\alpha)\ x = \pm \left[m : \left(m^{\frac{n}{n+1}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$; $\beta)\ x_1 = 2m, x_2 = 0, x_3 = m$.
21) $x = \pm \sqrt{m^2 + n^2}$. 22) $x_1 = 1\frac{26}{63}$, $x_2 = \frac{1}{7}$.
23) $x_1 = 8$, $x_2 = 12$. 24) $x_1 = 2a$, $x_2 = 2b$.
25) $\alpha)\ x = \pm \sqrt{[(b + c)^2 m^2 + (b - c)^2] : [m^2 + 1]}$;
$\beta)\ x = \pm \sqrt{ab}$.
26) $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ *). 27) $x_1 = 1$, $x_2 = -7$.
28) $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. 29) $x_1 = -3$, $x_2 = -7$.
30) $x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - n}$. 31) $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - n}$.
32) $x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + n}$. 33) $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + n}$.

*) Formel von Brahmegupta und Mohammed ben Musa. (Brahmegupta [650] and Bhascara [1150], translated by Colebrooke. London 1817. Mohammed ben Musa [† 812] Alchowaresmi, algebra oûalmokabala, publ. by Rosen, London 1831.)

34) $x_1 = 2, \quad x_2 = -12.$ 35) $x_1 = -2, \quad x_2 = 12.$
36) $x_1 = -6, \quad x_2 = -4.$ 37) $x_1 = 6, \quad x_2 = 4.$
38) $x_1 = 130, \quad x_2 = -1116.$ 39) $x_1 = 806, \quad x_2 = 180.$
40) $x_1 = 30, \quad x_2 = -4.$ 41) $x_1 = -6, \quad x_2 = -20.$
42) $x_1 = 8765, \quad x_2 = 1234.$ 43) $x_1 = 56\frac{7}{8}, \quad x_2 = 12\frac{3}{4}.$
44) $x_1 = 678{,}9, \quad x_2 = 123{,}8.$ 45) $x_1 = 99{,}9, \quad x_2 = -999{,}9.$
46) $x = (q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}) : (2p).$ 47) Reell für $q^2 \geqq 4pr$, imaginär für $q^2 < 4pr$. 48) Wenn $q^2 = 4pr$ ist.

49) Die Wurzelwerte der Gleichung $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ und $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ sind beide positiv, wenn a und b beide positiv sind; beide negativ, wenn a negativ, b dagegen positiv ist. Die größere Wurzel wird negativ, die kleinere positiv, wenn a und b beide negativ sind; dagegen wird die größere Wurzel positiv, die kleinere negativ, wenn a positiv, b negativ ist.

50) α) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1$; β) $x_1 = 1 : (n + 1), \quad x_2 = -1 : n.$
51) $x_1 = 0{,}618\,034\,0, \quad x_2 = -1{,}618\,034\,0.$
52) $x_1 = 0{,}231\,147\,7\ldots, \quad x_2 = -0{,}088\,290\,5\ldots..$
53) $x_1 = 56\,789, \quad x_2 = -12\,345.$ 54) $x_1 = 1\frac{1}{3}, \quad x_2 = -1\frac{5}{16}.$
55) $x_1 = 4\frac{5}{6}, \quad x_2 = -1\frac{2}{3}.$ 56) $x_1 = 28, \quad x_2 = -3.$
57) $x_1 = -4, \quad x_2 = -21.$ 58) $x_1 = 6, \quad x_2 = 3.$
59) $x_1 = -1{,}357\,9, \quad x_2 = -2{,}468.$
60) $x_1 = 1\frac{5}{27} = x_2.$ 61) $x_1 = -2\frac{14}{65} = x_2.$
62) α) $x_1 = 12, \quad x_2 = 0$; β) $x_1 = 1, \quad x_2 = 0.$
63) $x_1 = a + b, \quad x_2 = 0.$ 64) $x_1 = a + b, \quad x_2 = a.$
65) $x = 1 \pm \sqrt{-1}.$ 66) $x = 6 \pm 8\sqrt{-1}.$
67) $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}) = 0{,}5 \pm 0{,}866\,025\,4\sqrt{-1}.$
68) $x_1 = \sqrt{-1} + \sqrt{-2} = 2{,}414\,213\,5\sqrt{-1},$
$x_2 = \sqrt{-1} - \sqrt{-2} = -0{,}414\,213\,5\sqrt{-1}.$
69) $x_1 = a + b - c, \quad x_2 = a - b + c.$
70) $x_1 = a, \quad x_2 = b.$ 71) $x_1 = \sqrt{m : n}, \quad x_2 = \sqrt{n : m}.$
72) $x = \sqrt{a^2 + b^2} \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$
73) $x_1 = (m + n)^2, \quad x_2 = -(m - n)^2.$
74) $x_1 = (a - b)a, \quad x_2 = (a + b)b.$
75) $x_1 = (a + b)a, \quad x_2 = (b - a)b.$
76) α) $x_1 = 3\frac{1}{2}, \quad x_2 = -5\frac{1}{2}$; β) $x_1 = 8\frac{1}{3}, \quad x_2 = -4\frac{1}{7}.$
77) α) $x_1 = \frac{b}{a}, \quad x_2 = \frac{a}{b}$; β) $x_1 = 7, \quad x_2 = -\frac{1}{7}.$
78) $x_1 = \sqrt{-7}, \quad x_2 = \sqrt{-11}.$ 79) $x_1 = m, \quad x_2 = n.$
80) $x_1 = \frac{p}{m}\sqrt{-1}, \quad x_2 = -\frac{1}{n}.$

81) $x_1 = 4 + 2\sqrt{-3}, \quad x_2 = 1 - 2\sqrt{-3}.$

82) $x_1 = 3, \quad x_2 = -8 - 2\sqrt{-1}.$

83) $x_1 = 7 + 4\sqrt{-1}, \quad x_2 = 1 - 6\sqrt{-1}.$

84) $x_1 = 1 + \sqrt{-2} - \sqrt{-3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{-2} + \sqrt{-3}.$

85) x_1 und $x_2 = \pm\sqrt{b(2a-b)}$. 86) $x_1 = a+b, x_2 = -a^2 : (a+b).$

87) $x_1 = 8, \quad x_2 = -2\frac{111}{178}.$

88) α) $x = 1 \pm \sqrt{-2}$; β) $x = [1 - 3a \pm 2a\sqrt{a}] : (a-1)^2.$

89) $x_1 = a, \quad x_2 = -2a.$ 90) $x_1 = 5, \quad x_2 = -4\frac{2}{7}.$

91) $x_1 = \pm 2\sqrt{2}a, \quad x_2 = \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}a.$

92) $x_1 = +1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{5}{3}, \quad x_4 = \frac{1}{2}.$

93) $x_1 = +a, \quad x_2 = -a, \quad x_3 = a + m + n.$

94) $x_1 = m : (m - n), \quad x_2 = -1.$

95) $x_1 = [4a - 5b] : [6ab], \quad x_2 = [a - 2b] : [3ab].$

96) α) $x_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}, x_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; β) $x_1 = -a_1, x_2 = b.$

97) $x_1 = 4a + 5b - 6c, \quad x_2 = a - 2b + 3c.$

98) $x_1 = \frac{1}{6}[-1 + 4\sqrt{-5}], \quad x_2 = \frac{1}{6}[-1 - 4\sqrt{-5}]$ *).

99) $x_1 = \frac{1}{2}[-1 + \sqrt{-3}], \quad x_2 = \frac{1}{2}[-1 - \sqrt{-3}]$ **).

100) $x = \left(\frac{1}{2}[-a \pm \sqrt{4b + a^2}]\right)^{\frac{1}{n}}.$

101) x_1 und $x_2 = \pm 24$, x_3 und $x_4 = \pm 7$.

102) $x_1 = \pm \frac{5}{13}, \quad x_2 = \pm\sqrt{-1}.$

103) $x_1 = \pm \frac{33}{65}\sqrt{-1}, \quad x_2 = \pm \frac{56}{65}\sqrt{-1}.$

104) α) $x = \pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{a + 2b} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a - 2b}\right)$ (nach § 55);
β) x_1 und $x_2 = \pm(a - b)$,
x_3 und $x_4 = \pm(a + b)\sqrt{-1}$.

105) $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab + m)(ab - m)}}.$

106) $x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$

107) $x = \pm\sqrt{3}.$ 108) $x_1 = 7, \; x_2 = 1, \; x_3 = 4, \; x_4 = 4.$

109) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Aus Beispiel 99 folgt, daß es außer den beiden genannten Wurzelwerten 3 und 1 noch vier Wurzeln giebt, welche der Gleichung Genüge leisten, nämlich:
x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{-3}]$, x_5 und $x_6 = \frac{3}{2}[-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}]$.

---

*) Die Gleichung ist eigentlich eine vom vierten Grade, welche außer den genannten beiden Wurzeln x_1 und x_2 noch die Wurzeln $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ hat.

**) Es ist also $[\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})]^3 = 1$. (S. § 49, Nr. 20.)

110) $x_1 = \pm 3\sqrt{\pm 1}$, $x_2 = \pm 2\sqrt{\pm 1}$. (8 Werte.)
111) α) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; β) $x_1 = 4$, $x_2 = 2\frac{2}{49}$.
112) α) $x_1 = (+4)^2 = 16$, $x_2 = (-5)^2 = 25$;
β) $x_1 = (+5)^2 = 25$, $x_2 = (-4)^2 = 16$.
113) α) $x_1 = \pm 0{,}92388$, $x_2 = \pm 0{,}38268$;
β) $x_1 = 0$, $x_2 = (+2)^2 = 4$, $x_3 = (-3)^2 = 9$.
114) α) $x_1 = \frac{7}{9}a$, $x_2 = \frac{13}{14}a$;
β) x_1 und $x_2 = \pm\sqrt{c(2a-c)}$. γ) $x = \pm 4$.
115) $x_1 = (b-a)^2$, $x_2 = (+2a)^2$.
116) $x_1 = (2a-b)^2$, $x_2 = (2b-a)^2$.
117) α) $x_1 = 196$, $x_2 = 49$; β) $x_1 = 4$, $x_2 = 2\frac{2}{49}$;
x_3 u. $x_4 = \frac{1}{64}(7 \pm \sqrt{609})^2$. 118) $x_1 = 7$, $x_2 = -11\frac{42}{47}$.
119) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{5}$.
120) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2a^3}{(1+a^2)b}$.
121) $x_1 = (a-3b)^2 - 3(a^2+b^2) = -2a^2 - 6ab + 6b^2$,
$x_2 = (b-3a)^2 - 3(a^2+b^2) = -2b^2 - 6ab + 6a^2$.
122) $x_1 = 4 + \sqrt{(+4)^2 - 15} = 5$, $x_2 = 4 - \sqrt{(+4)^2 - 15} = 3$,
$x_3 = 4 + \sqrt{(-5)^2 - 15} = 4 + \sqrt{10} = 7{,}16228\ldots$,
$x_4 = 4 - \sqrt{(-5)^2 - 15} = 4 - \sqrt{10} = 0{,}83772\ldots$.
123) $x_1 = (+4)^4 = 256$, $x_2 = (-5)^4 = 625$.
124) x_1 u. $x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{15}} = \pm\frac{1}{4}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \pm 0{,}992$;
x_3 u. $x_4 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{15}} = \pm\frac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \pm 0{,}126$.
125) $x_1 = 343$, $x_2 = -364\frac{148}{343}$.
126) $x_1 = n^3$, $x_2 = -(n+1)^3$.
127) $x_1 = 243$, $x_2 = 243{,}0231\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\sqrt{-1}\right]$.
128) $x_1 = 256$, $x_2 = (-24)^{\frac{8}{3}} = 4792{,}5$.
129) α) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; β) $x_1 = a$, $x_2 = c$.
130) α) $x_1 = (+3)^2 = 9$; $x_2 = (-4)^2 = 16$,
$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = (-0{,}5 \mp \sqrt{-11{,}75})^2 = -11{,}5 \pm \sqrt{-11{,}75}$,
x_5 und $x_6 = 0{,}5 + \sqrt{-143} \mp \sqrt{0{,}25 + \sqrt{-143}}$,
x_7 und $x_8 = 0{,}5 - \sqrt{-143} \mp \sqrt{0{,}25 - \sqrt{-143}}$;

$$β)\ x = \left[-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}\left(-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{c}{a}}\right]^{\frac{1}{m}};$$

$\gamma)$ $x_1 = a, \quad x_2 = a\sqrt[m]{-2};$

x_3 und $x_4 = a\left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{1\frac{1}{4} + (-2)^{\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{m}}.$

131) $\alpha)$ $x = \pm\sqrt{[(2a - m^3) : 3m]^3 + a^2}$; $\beta)$ $x = \pm\sqrt{2}$.

132) $x = n + \frac{1}{3}[p \mp \sqrt{[4(m - n) - p^3] : [3p]}]^3 =$
$\frac{1}{2}(m + n) \pm \sqrt{[(m - n - p^3) : [3p)]^3 + \frac{1}{4}(m - n)^2}$.

133) $x_1 = m, \quad x_2 = n.$

134) $x_1 = -\sqrt{a}$, x_2 und $x_3 = -\sqrt{a} \pm \sqrt{2a}$.

135) $\alpha)$ $x_1 = 0$, x_2 und $x_3 =$
$\frac{1}{2}(a + b + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}$;
$\beta)$ $x = -\frac{3}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{5a^2 \pm 4\sqrt{a^4 + b^4}}$.

136) $\alpha)$ $x_1 = 4$, $x_2 = 3$; $\beta)$ $x_1 = b$, $x_2 = c$.

137) $x = 1{,}371\,29$. Giebt es noch einen zweiten Wurzelwert?

138) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. 139) $x_1 = 7$, $x_2 = 4$.

140) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

141) $x_1 = 0{,}707\,107$, $x_2 = -1{,}414\,214$.

142) $x_1 = -0{,}561\,42$, $x_2 = -2{,}438\,58$.

143) $x = [-\log a \pm \sqrt{4 \log b \cdot \log c + (\log a)^2}] : (2 \log b)$.

144) $x_1 = 3$, $x_2 = -5$. 145) $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

146) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{300}$.

147) $x_1 = -4{,}389\,74$, $x_2 = -0{,}241\,18$.

148) $x = [-\log \frac{c}{ab} \pm \sqrt{(\log \frac{c}{ab})^2 + 4 \log a \cdot \log c}] : [2 \log c]$.

149) $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. 150) $\alpha)$ $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$;
$\beta)$ $x = \log(m \pm \sqrt{1 + m^2}) : \log e$. 151) $x_1 = 7$, $x_2 = -12$.

152) $x_1 = 3{,}452\,76$, $x_2 = 0{,}289\,62$.

153) $\alpha)$ $x_1 = 0{,}000\,1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 172{,}213\,8$, $x_4 = 0{,}005\,806\,8$;
$\beta)$ $x_1 = -0{,}292\,968$, $x_2 = -1{,}488\,926$; $\gamma)$ $x_1 = 2$, $x_2 = -2{,}631$.

154) $\alpha)$ p; $\beta)$ q; $\gamma)$ $p^2 - q$; $\delta)$ $p(p^2 - 3q)$; $\varepsilon)$ $(p^2 - q)(p^2 - 3q)$.

155) $\alpha)$ $x^2 - 912x + 97\,047 = 0$; $\beta)$ $x^2 - 44\frac{1}{8}x - 725\frac{5}{32} = 0$.

156) $\alpha)$ $x^2 - (4a - 6b)x + 3a^2 - 10ab + 8b^2 = 0$; $\beta)$ $x^2 + 1 = 0$.

157) $\alpha)$ $x^2 - a^3b = 0$; $\beta)$ $x^2 - 26x + 169 = 0$.

158) $x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2 + c^2 = 0$.

159) $\alpha)$ $(x - \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q})(x - \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q})$;
$\beta)$ $(x - 2\frac{1}{4})(x - 3\frac{3}{4})$; $\gamma)$ $(x + 3\frac{1}{2})(x - 4\frac{1}{2})$.

160) Der Ausdruck wird positiv für alle Werte, welche > 11, so wie für alle, welche < 7; negativ für alle Werte, welche > 7 und < 11 sind.

161) Der Ausdruck $\alpha)$ wird positiv sowohl für alle Werte, welche $> -1\frac{1}{3}$, als auch für alle, welche $< -1\frac{3}{4}$ sind; negativ

für alle Werte, welche $< -1\frac{1}{3}$ und $> -1\frac{3}{4}$ sind. Der Ausdruck β) wird für alle Werte von x immer positiv.

162) 3,141 59. 163) $789\frac{11}{12}$. 164) $p - 2q + 3r$.

165) 579 und 135 sind die Wurzeln der ersten, 579 und — 135 die Wurzeln der zweiten Gleichung.

166) $x_1 = \pm \sqrt{q}\ tang\ \frac{1}{2}\lambda, \quad x_2 = \mp \sqrt{q}\ cot\ \frac{1}{2}\lambda.$

167) α) $x_1 = \mp \sqrt{q}\ tang\ \frac{1}{2}\lambda, \quad x_2 = \mp \sqrt{q}\ cot\ \frac{1}{2}\lambda;$

β) $x_1 = \mp \sqrt{q}\ (cos\ \vartheta + sin\ \vartheta \sqrt{-1})$

$= \mp (\frac{1}{2}p + \sqrt{q}\ sin\ \vartheta \sqrt{-1}),$

$x_2 = \mp \sqrt{q}\ (cos\ \vartheta - sin\ \vartheta \sqrt{-1})$

$= \mp (\frac{1}{2}p - \sqrt{q}\ sin\ \vartheta \sqrt{-1}).$

168) $\lambda = 73^0 9' 2'',7$; $x_1 = 1,359\,97, \quad x_2 = -2,470\,18.$

169) $\lambda = 85^0 51' 26'',6$; $x_1 = 2,718\,28, \quad x_2 = -3,141\,59.$

170) α) $\lambda = 43^0 9' 41'',4$; $x_1 = -1,234\,56, \quad x_2 = -7,891\,0$;

β) $\lambda = 73^0 27' 15''$; $x_1 = 3,876\,25, \quad x_2 = 6,963\,2.$

171) $\lambda = 62^0 55' 52'',5$; $x_1 = 7,352\,7$; $x_2 = -2,753\,7.$

172) $\lambda = 73^0 7' 20''$; $x_1 = 1,234\,5, \quad x_2 = 0,678\,9.$

173) $x_1 = \frac{p}{n}\ sin\ \alpha\ tang\ \frac{1}{2}\beta, \quad x_2 = -\frac{p}{n}\ sin\ \alpha\ cot\ \frac{1}{2}\beta.$

174) $\alpha = 2^0 27' 27'',6$; $p^2 = 768\,995, \quad q = 1\,577,90$;

$\beta = 29^0 3' 47''$; $x_1 = 0,087\,18, \quad x_2 = -1,297\,6.$

175) Aus der gegebenen Gleichung ergiebt sich $tang\ \varphi + tang\ \varphi' = m$, $tang\ \varphi \cdot tang\ \varphi' = n$, $tang\ (\varphi + \varphi') = m : [1 - n]$,

$$cos(\varphi - \varphi') = \frac{1 + tang\ \varphi\ tang\ \varphi'}{tang\ \varphi + tang\ \varphi'}\ sin(\varphi + \varphi') = \frac{1+n}{m} sin\ (\varphi + \varphi').$$

Aus $\varphi + \varphi'$ und $\varphi - \varphi'$ lassen sich φ und φ' einzeln und hieraus die Wurzeln $tang\ \varphi$ und $tang\ \varphi'$ bestimmen.

176) $\varphi + \varphi' = 157^0 49' 55'',0, \quad \varphi - \varphi' = 16^0 55' 59'',6$;

$\varphi = 87^0 22' 57'',3, \quad \varphi' = 70^0 26' 57'',7$;

$x_1 = 21,875, \quad x_2 = 2,816.$

177) $\varphi = 123^0 57' 35'',7, \quad \varphi' = 75^0 32' 19'',1$;

$x_1 = -1,484\,8, \quad x_2 = 3,877\,5.$

178) $\varphi = 144^0 22' 1'',3, \quad \varphi' = 15^0 42' 31'',1$;

$x_1 = -0,716\,8, \quad x_2 = 0,281\,25.$

179) $\varphi = 155^0 44' 44'',1, \quad \varphi' = 154^0 53' 6'',6$;

$x_1 = -0,450\,56, \quad x_2 = -0,468\,75.$

180) $\varphi = 70^0 41' 1'',36, \quad \varphi' = -79^0 48' 39'',39$;

$x_1 = 2,852\,952, \quad x_2 = -5,563\,863.$

181) $\vartheta = 39^0 13' 16'',7$; $x = 69,361\,37 \pm 56,612\,72 \sqrt{-1}.$

182) $\vartheta = 30^0 17' 18'',4$; $x = -4,929\,503 \pm 2,879\,236 \sqrt{-1}.$

183) $z = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{2 - b + \frac{1}{4}a^2}$; $x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1}$,
$x = -\frac{1}{4}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 - b + \frac{1}{4}a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}b \mp \frac{1}{4}a\sqrt{2 - b + \frac{1}{4}a^2}}$.

184) $z_1 = 2\frac{1}{2}$, $z_2 = -4$; $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$,
x_3 und $x_4 = -2 \pm \sqrt{3} = -0{,}267\,949$ und $-3{,}732\,051$.

185) $z_1 = 3\frac{1}{3}$, $z_2 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, x_3 u. $x_4 = \pm\sqrt{-1}$.

186) $z_1 = 3\frac{1}{3}$, $z_2 = 1$; $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$,
x_3 und $x_4 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = 0{,}5 \pm 0{,}866\,025\sqrt{-1}$.

187) α) $z_1 = n + \frac{1}{n}$, $z_2 = -2n$; $x_1 = n$, $x_2 = \frac{1}{n}$,
x_3 und $x_4 = -n \pm \sqrt{n^2 - 1}$;
β) x_1 u. $x_2 = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 + a^2} \pm \sqrt{a^2 + 2\sqrt{1 + a^2} - 2}]$,
x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 + a^2} \pm \sqrt{a^2 - 2\sqrt{1 + a^2} - 2}]$.

188) $z = [-a\sqrt{ac} \pm \sqrt{8c^2 - 4abc + a^3c}] : 2c$;
$y = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1}$; aus y und z erhält man x.

189) $z_1 = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$, $x_1 = -1$, $x_2 = -3$; $z_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$,
x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-11}) = -0{,}5 \pm 1{,}658\,31\sqrt{-1}$.

190) $z_1 = 2{,}7\sqrt{2}$, $z_2 = -4{,}2\sqrt{2}$; $y_1 = 2{,}5\sqrt{2}$, $y_2 = 0{,}2\sqrt{2}$;
$x_1 = 5$, $x_2 = 0{,}4$; $y_3 = -2{,}1\sqrt{2} \pm \sqrt{7{,}82}$; x_3 u. x_4
$= -4{,}2 \pm 0{,}2\sqrt{391}$, $x_3 = -0{,}245\,256$, $x_4 = -8{,}154\,744$.

191) $z_1 = \frac{14}{15}\sqrt{5}$, $z_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{5}$; $y_1 = \frac{8}{5}\sqrt{5}$, $y_2 = \frac{1}{3}\sqrt{5}$,
$x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{3}$; $y_3 = -\frac{2}{3}\sqrt{5} \pm \frac{1}{3}\sqrt{11}$, $x = -\frac{10}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{55}$,
$x_3 = -0{,}861\,267$, $x_4 = -5{,}805\,399$.

192) Das Produkt $(x+1)(x^2 - x + 1 + ax)$ wird zu 0, 1) wenn $x + 1 = 0$, 2) wenn $x^2 - x + 1 + ax = 0$ gesetzt wird. Es ist also $x_1 = -1$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}(1 - a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3})$.

193) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$.

194) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

195) $x_1 = -1$, x_2 und $x_3 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

196) Dividiert man die Gleichung durch $x + 1$, so erhält man $x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$,
$z = -\frac{1}{2}(a - 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - b + 1\frac{1}{4}}$; vier Wurzelwerte liefert $x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1}$, $x_5 = -1$.

197) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$, x_4 und $x_5 = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{-15}) = 0{,}25 \pm 0{,}968\,246\sqrt{-1}$.

198) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$, x_4 und $x_5 = \frac{1}{7}(8 \pm \sqrt{15})$,
$x_4 = 1{,}696\,140$, $x_5 = 0{,}589\,574$.

199) $y_1 = -1,\ y_2 = (-a^2 + b \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b - 3b^2}) : 2b;$
$x_1 = -b : a,\ x_2$ u. $x_3 = \frac{1}{2}[b - a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b - 3b^2}] : a.$

200) $x_1 = 2,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = -1.$

201) $x_1 = -\frac{1}{2},\quad x_2 = -1{,}309017,\quad x_3 = -0{,}190983.$

202) $x = \frac{c}{b}y;\ y^5 + \frac{ab}{c}y^4 + \frac{b^3}{c^2}y^3 + \frac{b^3}{c^2}y^2 + \frac{ab}{c}y + 1 = 0.$

Dividiert man durch $y + 1$, so ist:

$$y^4 + \left(\frac{ab}{c} - 1\right)y^3 + \left(\frac{b^3}{c^2} - \frac{ab}{c} + 1\right)y^2 + \left(\frac{ab}{c} - 1\right)y + 1 = 0,$$

$$z = \frac{c - ab \pm \sqrt{(c + ab)^2 + 4(c^2 - b^3)}}{2c};\ x = \frac{c}{2b}(z \pm \sqrt{z^2 - 4}).$$

203) α) $x = 2y;\ z_1 = 2, z_2 = \frac{1}{2};\ y_1$ u. $y_2 = 1 \pm 0,\ y_3 = \frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{-7};$
$x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3$ und $x_4 = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{-7},\ x_5 = -2;$

β) $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5};\ y = \pm\frac{1}{4}[\sqrt{5} \pm \sqrt{-11}];\ x_1$ und $x_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{5} \pm \sqrt{-11}],\quad x_3$ und $x_4 = -\frac{1}{2}[\sqrt{5} \pm \sqrt{-11}].$

204) α) $x_1 = 1,\ x_2 = -1.$ Dividiert man die Gleichung durch $x^2 - 1$, so erhält man: $x^4 + ax^3 + (b+1)x^2 + ax + 1.$ (S. Nr. 183.)

β) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = \frac{1}{2},\ x_5 = 3,\ x_6 = \frac{1}{3};$

γ) $x_1 = -1,\quad x_2$ u. $x_3 = \pm\sqrt{-1},\quad x_4$ u. $x_5 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3},$
x_6 u. $x_7 = -2 \pm \sqrt{3},\ x_6 = -0{,}267949,\ x_7 = -3{,}732051;$

δ) $x_1 = -1,\quad x_2$ u. $x_3 = \pm\sqrt{-1}.$ Setzt man $x + \frac{1}{x} = z,$ so wird $z_1 = 0,\ z_2 = -\frac{1}{2}(a - 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a + 1)^2 + 2 - b}.$

ε) Setzt man $x + \frac{1}{x} = z$, so wird $z^4 + az^3 + (b-4)z^2 + az + 1 = 0$ (Nr. 183). ζ) $x_1 = 1.$ Dividiert man die Gleichung durch $x - 1$, so wird dieselbe auf die vorhergehende zurückgeführt. η) Dividiert man die Gleichung durch $x^2 - 1$, so wird sie auf 204) ε) zurückgeführt.

205) $x_1 = m + n - p,\quad x_2 = m - n + p.$

206) $x_1 = \frac{1}{2}(m + n + p + q),\quad x_2 = \frac{1}{2}[m + n - p - q].$

207) $x_1 = a - b,\quad x_2 = c - a.$

208) $x_1 = (a + b)^2,\quad x_2 = (a - b)^2.$

209) $x_1 = a,\quad x_2 = \frac{1}{a}.$ 210) $x_1 = \frac{a}{b},\quad x_2 = \frac{b}{c}.$

211) $x_1 = a + \frac{1}{a},\quad x_2 = b + \frac{1}{b}.$

212) $x_1 = m + n,\quad x_2 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$

213) $x_1 = \frac{1}{2}(a + b),\quad x_2 = \sqrt{ab}.$

214) $x_1 = 2ab : (a + b)$, $x_2 = \sqrt{ab}$.

215) $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-18 \pm 2\sqrt{77}}$.

216) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}(m + n)$.

217) α) $x_1 = 7$, $x_2 = 3\frac{2}{3}$; β) x_1 u. $x_2 = \frac{1}{2}(-7 \pm \sqrt{3})$.
γ) $x_1 = 0$, x_2 u. $x_3 = \frac{1}{14}(7 \pm \sqrt{-7})$.

218) Man addiere zuerst die von den Enden gleichweit entfernten Quotienten. Aus dem gemeinschaftlichen Faktor $7 + 2x = 0$ erhält man den Wurzelwert $x = -3\frac{1}{2}$. Setzt man $x^2 + 7x = y$, so reduziert sich die Gleichung auf $y^2 + 18y + 90 = 0$. Hiernach erhält man für x die vier Werte: $x = -3\frac{1}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4} \pm 3\sqrt{-1}}$. Ein sechster Wurzelwert endlich ist ∞.

219) $x_1 = \infty$, $x_2 = 2\frac{1}{2}$; die 4 übrigen Wurzelwerte sind: $2\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(5a + 13b + 17c \pm \sqrt{(a - 3b - 2c)^2 + 12ab}) : (a + b + c)}$.

220) $x_1 = \infty$, $x_2 = -\frac{1}{2}(a + b)$,
x_3 und $x_4 = -\frac{1}{2}(a + b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}[(a + b - 2c)^2 + (a - b)^2]}$.

221) Nach zweckmäßiger Vereinigung je zweier Glieder tritt der Faktor $2x + a + b$ heraus. Setzt man $x^2 + x(a + b) = y$, ferner $a(b + c) + c(b - c) = m$, $d(a + b - d) = n$, so wird $y = -\frac{1}{2}(m + n) \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - mn - 3ab(m - ab)}$; $x_1 = \infty$, $x_2 = -\frac{1}{2}(a + b)$, x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2}[-(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 + 4y}]$.

222) $x = \frac{1}{2}[a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4}]$.

223) $x_1 = (m^2 + n^2) : (mn)$, $x_2 = 0$.

224) $x_1 = -\frac{1}{2}a$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2}{3}a$, $x_4 = -\frac{2}{3}a$.

225) $x = \pm \frac{1}{2}(a + b)\sqrt{(8a - b) : (3b)}$.

226) Setzt man $\sqrt[3]{(1 - x) : (1 + x)} = y$, so ist $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$; $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, $x_1 = 0{,}618\,034$, $x_2 = -1{,}618\,034$.

227) Setzt man $[-2a \pm \sqrt{2(a + 1)}] : [a - 1] = p$, so ist $x = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4})$.

228) $x_1 = -1$. Ist $\frac{1}{2}[-4a - 1 \pm \sqrt{20a + 5}] : (a - 1) = p$, so erhält man für x noch die Werte $\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4})$.

229) α) $x_1 = a(1 + n)^2 : (1 + 2n)$, $x_2 = a(1 - n)^2 : (1 - 2n)$.

β) Setzt man $x + \dfrac{1}{x} = z$, so wird $z^2 - \dfrac{2b}{a^2 - b}z - \dfrac{2a^2}{a^2 - b} = 0$.

230) $x = \pm \frac{1}{2}a(m + 1)\sqrt{1 : m}$.

231) $x = a^2 + 8a + 8$.

§ 71.

Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

A. Reine quadratische Gleichungen.

1) Multipliziere ich die Anzahl der Mark, welche ich in der Tasche habe, mit sich selbst, so erhalte ich $132\frac{1}{4}$. Wieviel Mark habe ich bei mir?

2) Eine Zahl zu finden, deren fünfter Teil, mit ihrem siebenten Teile multipliziert, 4235 giebt.

3) Multipliziere ich das $3\frac{4}{7}$fache einer gedachten Zahl mit dem 8,68fachen derselben Zahl, so erhalte ich 5239. Wie heißt die gedachte Zahl?

4) Zwei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnisse $11 : 13$ stehen, und die, miteinander multipliziert, 7007 geben.

5) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Pfirsiche und bezahlt für jedes Stück soviel Pfennige, als er Pfirsiche kauft. Wieviel Stück sind es, wenn er im ganzen 6 ℳ 25 ₰ bezahlen muß?

6) Multipliziere ich den dritten Teil einer Zahl mit dem vierten Teile und das Produkt mit dem fünften Teile derselben Zahl, so erhalte ich den sechsten Teil der Zahl. Wie heißt die Zahl?

7) Drei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnisse $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ stehen, und deren Summe der Quadrate 10309 ausmacht.

8) Ein rechtwinkliges Feld, dessen Länge 3367 *m* und dessen Breite 37 *m* beträgt, hat mit einem anderen, dessen Länge sich zur Breite wie $13 : 7$ verhält, gleichen Inhalt. Wie groß ist des letzteren Länge und Breite?

9) α) Die Zahl a in zwei Faktoren zu zerlegen, die in dem Verhältnisse $p : q$ stehen. β) Drei einander gleiche Zahlen zu finden, deren Summe gleich ihrem Produkte ist.

10) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Kilogramm Salz, 4mal soviel Zucker und 8mal soviel Kaffee, und bezahlt für jedes Kilogramm der drei Waren 40mal soviel Pfennige, als die Anzahl der Kilogramme beträgt, welche er von der Ware nimmt; zusammen bezahlt er 32,40 ℳ. Wieviel Kilogramm Kaffee hat er gekauft?

11) Ein rechtwinkliger Garten hat zur Breite 37 *m*, zur Länge 259 *m*. Die Breite wird um eine gewisse Anzahl Meter vermehrt und die Länge um das Siebenfache der Anzahl vermindert; hierdurch vermindert sich der Inhalt um 63 *qm*. Wie groß ist die Anzahl der Meter, um welche die Breite vermehrt wird?

12) Vermehrt man eine Zahl um 3 und vermindert sie auch um 3, so ist die Summe der Quotienten, die man erhält, wenn man die größere Zahl durch die kleinere und wenn man die kleinere Zahl durch die größere dividiert, gleich $3\frac{1}{4}$. Wie heißt die Zahl?

13) Jemand erhält den Auftrag, Pomeranzen zu kaufen, und zwar 18 Stück, wenn jedes 18 ₰ kostet; sei aber jedes Stück theurer oder wohlfeiler, als 18 ₰, so solle er ebensoviel unter oder über 18 Stück bringen, als jedes mehr oder weniger, als 18 ₰, kostet. Wenn nun im ganzen 3 ℳ 15 ₰ bezahlt werden, wieviel Pomeranzen wurden gekauft?

14) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 18 *a* und für 315 ₰ *b* ₰ gesetzt werden?

15) Mit einer Schnur von einer bestimmten Länge kann ich ein Quadrat umspannen; verkürze ich die Schnur um 8 *m*, so kann ich mit derselben ein anderes Quadrat umspannen, welches $\frac{4}{25}$ des ersten beträgt. Wie lang ist die Schnur, welche das erste Quadrat umspannt?

16) Die Zahl 20 in zwei Teile zu zerlegen, so daß sich die Quadrate der Teile wie 1 : $2\frac{1}{4}$ verhalten.

17) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt um das $\frac{9}{16}$fache größer wird, wenn die Seite sich um 3 *m* verlängert?

18) Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 260 Eier zu Markte und lösen beide gleichviel. „Hätte ich deine Eier gehabt," sagte die erste zur zweiten, „und hätte sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich daraus 7 ℳ 20 ₰ gelöst." „Das mag wohl sein," erwiderte die zweite; „hätte ich aber deine Eier gehabt und sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich gar 9 ℳ 80 ₰ gelöst." Wieviel Eier brachte jede zu Markte?

19) Jemand kauft 133 *kg* einer Ware und verkauft sie mit einem gewissen Prozente Nutzen. Für alles eingelöste Geld kauft er sich von einer zweiten Ware und verkauft dieselbe wieder mit demselben Nutzen, wie zum ersten Male. Hierdurch ist er imstande, mit allem eingelösten Gelde von einer dritten Ware, welche 14 Prozent im Preise höher steht, als die erste, 168 *kg* zu kaufen. Mit wieviel Prozent Nutzen verkauft er die Ware?

20) In einem quadratischen Weingarten, der ringsum von anderen Weingärten umgeben ist, sind die Stöcke rechtwinklig so gesetzt, daß je zwei nebeneinander stehende $1\frac{1}{3}$ *m* voneinander entfernt sind (so daß auf jeden Stock $1\frac{7}{9}$ *qm* Bodenfläche kommen). Derselbe soll so umgepflanzt werden, daß die Stöcke nur $1\frac{1}{4}$ *m* voneinander abstehen (daß also auf jeden Stock $1\frac{9}{16}$ *qm* Oberfläche

kommen). Wenn nun hierzu noch 8640 Stöcke nötig sind, wieviel Meter Länge hat jede Seite des Weingartens?*)

21) In einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete das $3\frac{3}{4}$fache der anderen beträgt, ist die Hypotenuse 1000 *m* lang. Wie groß ist jede der beiden Katheten?

22) Die Länge eines Rechteckes verhält sich zur Breite wie 15 : 8; die Diagonale desselben ist 323 *m*. Wie groß ist die Länge und Breite?

23) Köln, Aachen und Düsseldorf liegen in einem nahezu rechtwinkligen Dreiecke, so daß Köln an der Spitze des rechten Winkels sich befindet. Die Entfernungen von Aachen nach Düsseldorf und von Aachen nach Köln stehen in dem Verhältnisse 19 : 17, und die Entfernung von Köln nach Düsseldorf beträgt $31\frac{7}{8}$ *km*. Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung zwischen Aachen und Köln und die zwischen Aachen und Düsseldorf?

24) Zwei Wanderer gehen zu gleicher Zeit von demselben Orte aus, der eine nach Ost, der andere nach Nord. Der eine legt täglich $4\frac{1}{2}$, der andere täglich 6 Meilen zurück. Nach wieviel Tagen werden beide 30 Meilen voneinander entfernt sein?

25) Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig auf den Schenkeln eines rechten Winkels von dem Scheitelpunkte aus; der eine legt jede Sekunde c, der andere jede Sekunde c' *m* zurück. Nach wieviel Sekunden wird ihre Entfernung d *m* sein?

26) Zwei Körper, deren Entfernung d *m* beträgt, bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels mit gleicher und gleichförmiger Geschwindigkeit nach dem Scheitelpunkte desselben. Der erste geht t Sekunden früher ab, als der zweite, und trifft n Sekunden nach seinem Abgange mit diesem in dem Scheitelpunkte des rechten Winkels zusammen. Wieviel Meter legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

B. Gemischte quadratische Gleichungen.

27) Das Quadrat einer Zahl nebst dem 13fachen derselben Zahl giebt 264. Wie heißt die Zahl?

28) Der Inhalt eines Rechteckes, dessen eine Seite um 7 *m* länger ist, als die andere, beträgt 494 *qm*. Wie lang ist jede Seite?

29) Eine Linie von a *m* Länge in 2 Teile zu teilen, so daß das Rechteck aus den beiden Teilen einem gegebenen Rechtecke von

*) Bei der Auflösung beachte man die Bemerkung zu Nr. 35 in § 33a.

n qm Inhalt gleich wird. Wie heißen die Teile? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

30) Auf der Verlängerung einer Linie von *a cm* Länge einen Punkt zu bestimmen, so daß das Rechteck aus der Entfernung dieses Punktes von den Endpunkten der Linie einem Rechtecke von *n qcm* Inhalt gleich wird.

31) Verlängert man die eine Seite eines Quadrats um 53 *cm*, so beträgt der Inhalt des Rechteckes, welches zur Länge die vergrößerte Seite des Quadrats und zur Breite die Seite des Quadrats hat, 58 590 *qcm*. Wie groß ist die Seite des Quadrats?

32) Vermehre ich den ersten Faktor des Produkts 6 · 52 um eine gewisse Zahl, und vermindere ich den zweiten Faktor um dieselbe Zahl, so erhalte ich zum Produkte der beiden neuen Faktoren das 35fache der Zahl, um welche der erste Faktor vermehrt wurde. Wie heißt die Zahl?

33) Welche Zahl giebt, zu ihrem reciproken Werte addiert, α) 2,9, β) m?

34) Welche Zahl giebt, von ihrem reciproken Werte subtrahiert, α) 6,09, β) n?

35) Eine Linie von *a cm* Länge in zwei ungleiche Teile zu teilen, so daß der eine Teil die mittlere Proportionale zwischen a und dem anderen Teile wird*).

36) Zwei Hausfluren, beide von quadratischer Form, die eine $2\frac{1}{3}$ *m* breiter als die andere, erfordern zusammen zum Belegen 1429 quadratische Platten, deren 9 auf einen Quadratmeter gehen. Wieviel Platten erfordert eine jede derselben?

37) α) Ein Spiegelglas von 99 *cm* Höhe und 66 *cm* Breite soll ringsum mit einem Rahmen von gleicher Breite umgeben werden, so daß der Rahmen mit dem Glase gleiche Oberfläche habe. Wie viel Centimeter muß die Breite des Rahmens haben?

β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 99 und 66 die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden und verlangt wird, daß die Oberfläche des Rahmens das p-fache der Oberfläche des Spiegels werden soll?

38) Zur Beschaffung einer Summe von 336 ℳ sollen die Mitglieder einer Gesellschaft gleichmäßig beitragen. Eine gleiche Summe mußte die Gesellschaft schon früher aufbringen. Weil aber damals 3 Mitglieder weniger da waren, so betrug der Beitrag eines jeden 2 ℳ mehr als jetzt. Wie viele Mitglieder zählt die Gesellschaft?

---

*) Der goldene Schnitt.

39) Hinter einem Hause befindet sich ein umzäunter Garten von 70 *m* Länge und 52½ *m* Breite. Der Hausherr wünscht denselben mit Blumen zu bepflanzen, die Hausfrau dagegen sähe ihn lieber in einen Grasplatz verwandelt. Um die Wünsche eines jeden in gleichem Maße zu befriedigen, erhält der Gärtner den Auftrag, in der Mitte einen rechtwinkligen, überall gleichweit von der Umzäunung entfernten Grasplatz abzustecken, der ebensoviel an Inhalt habe, als der übrigbleibende Teil. Wie lang und wie breit wird derselbe werden?

40) In ein Rechteck, dessen Länge a *cm* und dessen Breite b *cm* beträgt, soll ein anderes eingezeichnet werden, dessen Seiten von denen des ersten gleichweit abstehen, und dessen Inhalt dem n-ten Teile des Inhaltes des übrigbleibenden Teiles gleich ist. Um wieviel stehen die Seiten des zweiten Rechteckes von denen des ersten ab?

41) Ein Krämer kauft für 264 *M* Kaffee und für eine gleiche Summe Zucker und erhält von letzterem 45 *kg* mehr als von ersterem. Er verkauft 14½ *kg* Kaffee und 28½ *kg* Zucker und löst bei 20 Prozent Nutzen im ganzen 93 *M*. Wieviel Kilogramm Kaffee und wieviel Zucker kaufte er?

42) 60 *kg* einer Ware kosten 4 *Fl* weniger, als 60 *kg* einer anderen Ware. Nehme ich von jeder Ware für 8⅞ *Fl*, so erhalte ich von der ersten Ware 8 *kg* mehr, als von der zweiten. Wieviel kostet das Kilogramm jeder Ware?

43) α) Welche Zahl giebt, in n dividiert, dasselbe Resultat, als von n subtrahiert? β) Was ist das für eine zweizifferige Zahl, in der die erste Ziffer rechter Hand doppelt so groß als die zweite ist, und die, durch das doppelte Produkt ihrer Ziffern dividiert, 1 zum Quotienten und 8 zum Reste giebt?

44) Jemand kauft ein Pferd und bezahlt dafür eine gewisse Summe, verkauft es nachher wieder für 432 *M* und gewinnt dann ⅓mal soviel Prozent, als ihm das Pferd Mark gekostet hat. Wie hoch kam ihm das Pferd?

45) Ein Kaufmann kauft eine gewisse Anzahl Kilogramm Ware für 216 *M*. Für dieselbe Summe kauft er ein anderes Mal von derselben Ware, erhält aber, weil unterdessen jedes Kilogramm um ein Mark im Preise gestiegen ist, 3 Kilogramm weniger, als er früherhin erhalten hatte. Wieviel Kilogramm kaufte er zum ersten Male?

46) Bei einem Wagen machen, wenn dieser 120 *m* vorwärts geht, die vorderen Räder 6 Umläufe mehr, als die Hinterräder; würde

man aber den Umfang eines jeden der vier Räder um 1 *m* vergrößern, so würden die Vorderräder auf derselben Strecke nur 4 Umläufe mehr machen, als die Hinterräder. Wie groß ist die Peripherie eines Vorder-, wie groß die eines Hinterrades?

47) Welcher Quotient, dessen Dividend um $2\frac{1}{4}$ [*n*] kleiner ist, als sein Divisor, giebt, zu seinem reciproken Werte addiert, $2\frac{1}{2}$ [*n*]?

48) A und B gaben zu einem Geschäfte zusammen 3400 *M* her, und zwar A auf 12, B auf 16 Monate. Bei der Teilung erhielt A 2070 *M* Kapital samt Gewinn und ebenso B 1920 *M*. Wie groß war eines jeden Einlage?

49) Ein Kaufmann hat für Waren nach einiger Zeit 1056 *Fl* zu zahlen, und zwar den einen Teil der Summe $1\frac{1}{2}$ Monat früher, als den anderen. Mit 19 Prozent jährlichem Diskonto bezahlt er auf der Stelle für die eine Summe 279,18 *Fl*, für die andere 636,79 *Fl*. Welche Summen waren zu bezahlen und nach welcher Zeit?

50) Ein Fabrikant hat einem Kapitalisten nach 7 Monaten 8800 und nach einem Jahre 5940 *M* zurück zu zahlen. Nach wieviel Monaten kann er dem Kapitalisten die ganze Summe von 14 740 *M* zurückbezahlen, wenn für die Summe, die er später bezahlt, die Zinsen zu 5 Prozent für das Jahr vergütet werden und für die Summe, die er früher bezahlt, ein Rabatt zu 5 Prozent auf Hundert für das Jahr abgezogen wird?

51) Jemand hat nach t Jahren das Kapital a und nach t' Jahren das Kapital b zu zahlen. Nach wieviel Jahren kann er die ganze Summe $a + b$ auf einmal bezahlen, wenn für die Summe, die er später bezahlt, die Zinsen zu p Prozent für das Jahr vergütet werden, und für die Summe, die er früher bezahlt, ein Rabatt zu p Prozent auf Hundert für das Jahr abgezogen wird?

52) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Katheten gleich b, ferner die Summe der Hypotenuse und der Höhe auf ihr gleich a. Man soll die drei Seiten und die Höhe bestimmen.

53) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, durch die eine 2 Stunden früher, als durch die andere. Durch beide Röhren zusammen wird der Behälter in $1\frac{7}{8}$ Stunden gefüllt. In wieviel Stunden wird der Behälter voll werden, wenn die Röhren einzeln fließen?

54) Eine Mauer wird von zwei Maurern, von denen der eine $1\frac{1}{2}$ Tag später zu arbeiten anfängt, als der andere, in $5\frac{1}{4}$ Tagen

ausgeführt. Um die Mauer allein zu vollenden, würde der erste 3 Tage weniger gebrauchen, als der zweite. In wieviel Tagen bringt jeder einzeln die Mauer zustande?

55) Die erste, zweite und dritte Klasse einer Schule gaben zu einem wohlthätigen Zwecke Beiträge, jeder Schüler in jeder einzelnen Klasse zwar gleichviel, aber ein Schüler der ersten Klasse soviel, als ein Schüler der zweiten und dritten zusammen. Die erste Klasse, welche 6 Schüler weniger hat, als die zweite, brachte 11,90 *Fl* auf; die zweite Klasse, welche 5 Schüler weniger hat, als die dritte, brachte 9,20 *Fl* zusammen; die dritte Klasse endlich lieferte 8,40 *Fl* Beitrag. Wie läßt sich hiernach die Anzahl der Schüler jeder der drei Klassen berechnen?

56) Die Diagonale eines Rechteckes, dessen Breite um 119 *m* kürzer ist, als die Länge, beträgt 221 *m*. Wie groß ist die Länge, wie groß die Breite des Rechteckes?

57) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 119 und 221 die allgemeinen Zeichen d und h gesetzt werden?

58) α) Der Umfang eines rechtwinkligen Feldes beträgt 1034 *m*; die Entfernung von einer Ecke bis zur gegenüberstehenden anderen beträgt 407 *m*. Wie groß ist die Länge, wie groß die Breite des Feldes? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 1034 und 407 die allgemeinen Zeichen u und d gesetzt werden?

59) Zwei Bäuerinnen, A und B, gehen auf den Markt; die erste mit Eiern, die zweite mit dreimal soviel Äpfeln. Jede hat den Preis ihrer Ware dergestalt festgesetzt, daß, wenn A der B ihre Eier für die Äpfel giebt, A 10 *Mkr* verliert. Aus diesem Grunde behält A noch $\frac{2}{3}$ von den Eiern und läßt sich von B alle Äpfel geben, wobei aber B um 6 *Mkr* zu kurz kommt. B beschließt deshalb, die Eier zu einem höheren Preise zu verkaufen, als A es bestimmt hatte, und indem sie sofort jedes Ei für 3 *Mkr* verkauft, gewinnt sie noch den Preis von 12 Äpfeln hinzu. Wieviel Eier und Äpfel haben A und B gebracht, und welche Preise waren dafür bestimmt?

60) Ein Kurier geht von einem Orte A nach einem Orte B in 14 Stunden; zu gleicher Zeit geht von einem um $18\frac{3}{4}$ *km* mehr rückwärts gelegenen Orte ein zweiter Kurier nach demselben Orte B und sucht, um mit dem ersteren zu gleicher Zeit daselbst zusammenzutreffen, bei je $37\frac{1}{2}$ *km* eine halbe Stunde an Zeit zu gewinnen. Wie weit ist A von B entfernt?

61) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 14, $18\frac{3}{4}$, $37\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen t, s, n und g gesetzt werden?

62) Von zwei Städten, A und B, welche 26 Meilen von einander entfernt sind, gehen zu gleicher Zeit zwei Eilwagen einander entgegen und treffen sich nach $10\frac{1}{2}$ Stunden. Der eine gebraucht zu jeder Meile $\frac{1}{2}$ Stunde mehr, als der andere. Wieviel gebraucht jeder zu einer Meile?

63) Zwei Körper gehen zu gleicher Zeit von zwei Punkten, deren Entfernung e Raumeinheiten beträgt, einander entgegen und treffen sich nach t Sekunden. Wenn nun der eine zu jeder Raumeinheit n Sekunden mehr gebraucht, als der andere, in wieviel Sekunden legt der letztere eine Raumeinheit zurück?

64) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn die beiden Körper, statt gegeneinander zu laufen, sich hintereinander bewegen?

65) Zwei Boten gehen zu gleicher Zeit von zwei Städten, A und B, ab, der erste nach B, der andere nach A, und als sie einander begegnen, hat der erste Bote 90 Kilometer mehr gemacht, als der zweite, und dabei findet sich, daß, wenn jeder dieselbe Geschwindigkeit, welche er vorhin hatte, beibehält, der erste Bote in 9 Tagen nach dem Zusammentreffen in der Stadt B, der zweite in 16 Tagen in der Stadt A eintreffen wird. Wie weit sind A und B voneinander entfernt?

66) Zwei Boten gehen von den beiden Dörfern A und B einander entgegen, und zwar geht der eine zwei Stunden früher ab, als der andere. $2\frac{1}{12}$ Stunden nach Abgang des zweiten treffen beide zusammen und gelangen zu derselben Zeit in den Dörfern B und A an. In wieviel Stunden hat jeder der Boten den Weg abgemacht?

67) α) Zwei Körper laufen von zwei Punkten, A und B, deren wechselseitige Entfernung 910 m beträgt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander. Geht der erste 56 Sekunden früher ab, als der zweite, so treffen sie auf der Mitte des Weges zusammen; gehen beide Körper aber gleichzeitig von A und B ab, so haben sie nach 20 Sekunden eine Entfernung von 550 m. In wieviel Sekunden legt jeder der Körper den Weg von A nach B zurück? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 910, 56, 20 und 550 die allgemeinen Zeichen d, n, t und l gesetzt werden?

68) Von zwei Punkten, deren wechselseitige Entfernung 1800 m beträgt, gehen zwei Körper einander entgegen, der erste 5 Sekunden später, als der zweite, und treffen in der Mitte des Weges zusammen. Wenn nun der erste in jeder Sekunde 6 m mehr abmacht, als der zweite, wieviel Meter legt jeder in einer Sekunde zurück?

69) A und B gehen mit derselben Geschwindigkeit von einem

Orte M nach einem Orte R. A reist früher ab, als B. Beim dritten Meilensteine vor R holt A eine vor ihm hertrabende Herde von Gänsen ein, welche jede Stunde $\frac{1}{4}$ Meile zurücklegt; eine halbe Stunde später stößt er auf eine Herde Schafe, welche jede Stunde $\frac{1}{3}$ Meile zurücklegt. B erreicht die Gänse $2\frac{1}{4}$ Meilen vor R, die Schafe 10 Minuten früher, als er den zweiten Meilenstein vor R erreicht. Es wird gefragt, mit welcher Geschwindigkeit die beiden Fußgänger A und B die Reise zurücklegen.

70) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich von der Spitze aus zwei Punkte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten. Der eine, welcher 22 Sekunden später abgeht, als der andere, legt in jeder Sekunde 7 *m*, der andere in jeder Sekunde 8 *m* zurück. Nach wieviel Sekunden werden beide Körper 275 *m* voneinander entfernt sein?

71) Zwei Körper bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, sich unter einem rechten Winkel durchschneidenden, geraden Linien. Der eine legt jede Sekunde c *m* zurück und erreicht den Durchschnittspunkt beider Linien t Sekunden später, als der andere; der andere macht jede Sekunde c' *m*. Wieviel Sekunden nach der Zeit, wo der erste Körper den Durchschnittspunkt erreicht, wird die gegenseitige Entfernung der beiden d *m* betragen?

72) Zwei Körper bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, sich unter einem rechten Winkel durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspunkte hin. Ihre Entfernungen von dem Durchschnittspunkte sind a und b, und ihre bezüglichen Geschwindigkeiten (d. h. die Anzahl der Raumeinheiten, welche sie in der Zeiteinheit zurücklegen) sind c und c'. Wann wird die gegenseitige Entfernung der beiden Körper gleich d sein? Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, b, c und c' stattfinden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

73) Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, b, c und c' der vorhergehenden Aufgabe stattfinden, wenn die beiden sich bewegenden Körper im Durchschnittspunkte der beiden Linien zusammentreffen sollen?

74) Zwei Körper bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c und c' auf zweien, sich senkrecht durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspunkte, und sind von letzterem bezüglich a und b Raumeinheiten entfernt. Nach wieviel Zeiteinheiten werden sie die kürzeste Entfernung voneinander haben?

75) Zwei Kreise, der erste mit einem Radius von 36 *cm*, der zweite mit einem Radius von 16 *cm*, bewegen sich gleichförmig mit ihren Mittelpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpunkte desselben. Der eine legt jede Sekunde 2 *cm* zurück und ist 38 *cm* vom Scheitelpunkte entfernt, der zweite macht

jede Sekunde 18 *cm* ab und ist 210 *cm* vom Scheitelpunkte entfernt. Wann werden beide Kreise einander berühren, und in welcher Entfernung befinden sich die Mittelpunkte, wenn dieselben einander am nächsten sind?

76) Der Mittelpunkt eines festen Kreises, dessen Radius 1009 *cm* beträgt, befindet sich auf einer horizontalen geraden Linie; in derselben Ebene, gerade über dem Mittelpunkte, in vertikaler Richtung, in einer Entfernung von 50 *cm* befindet sich der Mittelpunkt eines zweiten beweglichen Kreises, der einen Radius von 945 *cm* hat, und der nach vertikaler Richtung abwärts jede Sekunde sich 180 *cm* bewegt, nach horizontaler Richtung aber, also parallel mit der festen Linie, jede Sekunde 2000 *cm* fortschreitet. Nach wieviel Sekunden werden beide Kreise einander α) von außen, β) von innen berühren, und nach wieviel Sekunden einander am nächsten sein?

77) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 1009, 50, 945, 180 und 2000 die allgemeinen Zeichen ϱ, d, r, b und l gesetzt werden?*)

78) Aus jedem von zwei Beuteln, welche eine verschiedene Anzahl von Kugeln enthalten, nimmt A eine Handvoll. Jetzt ist die Anzahl der Kugeln in dem größeren Beutel gleich dem Kubus der Zahl in dem kleineren oder gleich dem Quadrate einer Handvoll Kugeln. A nimmt dann aus dem größeren Beutel soviel Kugeln heraus, daß die Anzahl der übrig bleibenden gleich dem Quadrate der Anzahl der Kugeln in dem kleineren Beutel wird, schüttet jetzt den ganzen Inhalt des größeren in den kleineren und findet, daß die ursprüngliche Anzahl des kleineren um zwei Drittel vermehrt ist. Man soll die Anzahl der Kugeln finden, welche anfangs in jedem Beutel waren, und die Anzahl, welche in einer Handvoll herausgenommen wurden.

79) α) Aus einem mit 360 *l* Weingeist gefüllten Fasse nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetzte das Fehlende durch Wasser. Von der gehörig vermischten Flüssigkeit nehme ich zum zweiten Male ebensoviel Liter heraus, wie zum ersten Male, und noch 84 *l* dazu, und fülle das Faß wieder mit Wasser. Nach der zweiten Mischung enthält die Flüssigkeit ebensoviel Wasser, wie Weingeist. Wieviel Liter wurden zum ersten Male herausgenommen? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 360 und 84 die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden und außerdem angenommen wird, daß in der letzten Flüssigkeit nur $\frac{1}{n}$ der anfänglichen Menge des Weingeistes enthalten ist?

*) Diese Aufgabe findet ihre Anwendung in der Astronomie, bei Berechnung von Sonnen- und Mondfinsternissen.

80) Ein Kapitalist verleiht sein Kapital von 160 000 ℳ zu einem gewissen Prozente auf Zinsen. Am Ende des ersten Jahres nimmt er für seinen Unterhalt 2400 ℳ heraus und vermehrt mit dem Überschusse der Zinsen sein Kapital. Zu demselben Zinsfuße verleiht er im zweiten Jahre sein Kapital und sieht sich nach Abzug von abermals 2400 ℳ im Besitze von 168 987 ℳ. Zu wieviel Prozent hatte er sein Kapital ausstehen?

81) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn das Kapital mit k bezeichnet wird, jährlich b ℳ herausgenommen werden und am Ende von 2 Jahren k' ℳ übrig bleiben?

82) Wie ändert sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn jährlich b ℳ hinzugesetzt werden?

83) Ein Landmann hat a *hl* Weizen ausgesäet; im zweiten Jahre säet er das Geerntete weniger b *hl* und erhält bei gleicher Fruchtbarkeit das c-fache seiner Aussaat nebst d *hl*. Wieviel hat er das erste Mal geerntet?

84) In welche Summanden muß man eine Zahl a so zerlegen, daß das Produkt aus denselben ein Größtes wird, d. h. größer, als das Produkt aus irgend zwei anderen Summanden, in welche sich die Zahl a zerlegen läßt?

85) In welche Faktoren muß die Zahl a zerlegt werden, so daß die Summe derselben ein Minimum wird, d. h., daß die Summe derselben kleiner wird, als die Summe irgend zweier anderen Faktoren, in welche die Zahl a zerlegt werden kann?

86) Welchen Inhalt hat das größte Rechteck, welches man mit einer Schnur von 36 *m* Länge umspannen kann?

87) Welchen Inhalt hat das größte Rechteck, dessen Umfang n *m* beträgt?

88) Die Seite eines Würfels ist um $2\frac{1}{2}$ *cm* länger, als die eines anderen, der $2501\frac{7}{8}$ *ccm* weniger Inhalt hat. Wie groß ist jeder der Würfel?

89) Ein von allen Seiten geschlossener, innen hohler, aus 9 *mm* dickem Eisenbleche verfertigter Würfel wird dadurch, daß er auf allen sechs Seiten mit 5 *mm* dicken Bleiplatten belegt wird, noch einmal so schwer. Wenn man nun weiß, daß zwei gleich große, aus Schmiedeeisen und Blei verfertigte Würfel dem Gewichte nach sich wie 7,8 : 11,4 verhalten, wie läßt sich hieraus die Höhe des aus Eisenblech verfertigten Würfels berechnen?

90) Wie läßt sich die Summe der unendlichen Reihe

$\sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 \ldots)}}}$ bestimmen?

91) Wie groß ist die unendliche Reihe $\sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a \ldots)}}}$?

92) Es ist näherungsweise:
$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 \pm \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$, und zwar um so genauer, je kleiner b gegen a ist. Warum? Es soll $\sqrt[3]{2}$ mit Hülfe dieser Formel berechnet werden.

§ 72.

Auflösungen der Gleichungen in § 71.

1) $11\frac{1}{2}$ *M*. Der zweite Wurzelwert $-11\frac{1}{2}$ ist zu verwerfen.
2) ± 385. 3) ± 13. 4) ± 77 und ± 91
5) 25. 6) $\pm\sqrt{10} = \pm 3,16227766..$ und 0.
7) 78, 52 und 39. 8) Die Länge 481, die Breite 259 *m*.
9) α) $\pm\sqrt{\frac{ap}{q}}$ und $\pm\sqrt{\frac{aq}{p}}$; β) $\pm\sqrt{3}$ und 0. 10) 8 *kg*.
11) 3. Der zweite Wurzelwert -3 bezieht sich darauf, daß man ebenfalls 63 *qm* weniger Inhalt erhält, wenn man die Breite um 3 *m* vermindert und die Länge um 21 *m* vermehrt.
12) 6 und -6. 13) Entweder 15 oder 21 Stück.
14) $a \mp \sqrt{a^2 - b}$. 15) 40 *m*.
16) 8 und 12 und -40 und $+60$.
17) 12 *m*. 18) Die erste 140, die zweite 120 Eier.
19) Mit 20 Prozent Nutzen. Der zweite Wert ist unbrauchbar, denn 220 Prozent Schaden haben hier keine Bedeutung.
20) 224 *m*. 21) Die eine 960, die andere 280 *m*.
22) Die Länge 285, die Breite 152 *m*.
23) Die Entfernung zwischen Aachen und Köln 63,86054, zwischen Aachen und Düsseldorf 71,37355 *km*.
24) Nach 4 Tagen. 25) Nach $d : \sqrt{c^2 + c'^2}$ Sekunden.
26) $\frac{d}{\sqrt{n^2 + (n - t)^2}}$. Der negative Wurzelwert hat keine Bedeutung; er kann sich nicht auf eine entgegengesetzte Richtung beziehen, da unmöglich die Körper im Scheitelpunkte zusammenstoßen können, wenn beide sich nach entgegengesetzten Richtungen bewegen.
27) 11 oder -24. 28) Die eine 26, die andere 19.
29) Der eine Teil ist $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - n}$, der andere $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - n}$.
30) Die Entfernung des Punktes von dem einen Endpunkte ist $-\frac{1}{2}a + \sqrt{n + \frac{1}{4}a^2}$, von dem anderen $\frac{1}{2}a + \sqrt{n + \frac{1}{4}a^2}$ *cm*.

31) 217 *cm*. 32) 24.

33) α) $\frac{2}{5}$ oder $2\frac{1}{2}$; β) $\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - 1}$.

34) α) $\frac{4}{25}$ oder $-6\frac{1}{4}$; β) $-\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + 1}$.

35) Der eine Teil ist $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a = 0{,}618\,034a$, der andere $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})a = 0{,}381\,966a$ *cm*.

36) Die eine 529, die andere 900.

37) α) 16,5 *cm*; β) $\frac{1}{2}[\sqrt{(a+b)^2 + 4abp} - (a+b)]$.

38) 24 Mitglieder. 39) $52\frac{1}{2}$ *m* lang und 35 *m* breit.

40) Um $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 4nab : (n+1)}$ *cm*.

41) 120 *kg* Kaffee und 165 *kg* Zucker.

42) Das *kg* der einen $\frac{7}{30}$, das der anderen $\frac{3}{10}$ Fl.

43) α) $\frac{1}{2}(n \pm \sqrt{n^2 - 4n})$; β) 24. 44) 240 *M*.

45) 27 *kg*. 46) Die Peripherie eines Vorderrades 4 *m*, eines Hinterrades 5 *m*.

47) $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$; allgemein ist der Dividend des Quotienten:

$$\frac{n}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{n+2}{n-2}} - 1\right), \text{ der Divisor } \frac{n}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{n+2}{n-2}} + 1\right).$$

48) Die des A 1800, die des B 1600 *M*.

49) 316,80 Fl nach $7\frac{1}{4}$ Monaten und 739,20 Fl nach $8\frac{3}{4}$ Monaten. Die Gleichung giebt außerdem als Resultat für die Zeit, nach welcher die erste Summe zu zahlen ist, $62\frac{112}{153}$ Monate. Aus diesem zweiten Resultate ergiebt sich für die erste Summe $47\,019\frac{13}{18}$, für die zweite Summe $-45\,963\frac{13}{18}$ Fl; beide Werte sind aber zu verwerfen.

50) Nach 9 Monaten. Der zweite Wurzelwert der Gleichung giebt 412 Monate, ist aber nicht brauchbar.

51) Setzt man $[100(a+b) + ap(t+t')] : [2ap] = M$, ferner $[100(at+bt') + aptt'] : [ap] = N$, so erhält man als Resultat $M \pm \sqrt{M^2 - N}$ Jahre, wo $M^2 - N =$ $[10\,000(a+b)^2 + 200ap(a-b)(t'-t) + a^2p^2(t'-t)^2] : [4a^2p^2]$. Die Wurzelwerte sind zwar beide positiv, jedoch ist in diesem Falle der größere positive Wert $M + \sqrt{M^2 - N}$ zu verwerfen, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt. Eine der Zeiten, t z. B., sei die kleinere; alsdann muß offenbar die gesuchte Zeit kleiner, als t', und größer, als t, sein. Setzt man nun in dem Ausdrucke, der $\sqrt{M^2 - N}$ gleich ist, $(a-b)^2$ an die Stelle von $(a+b)^2$, so erhält man:

$$M + \sqrt{M^2 - N} > \frac{100(a+b) + ap(t+t')}{2bp} + \frac{100(a-b) + ap(t'-t)}{2ap}$$

d. i.: $> (200a + 2apt') : (2ap)$ oder $(100 : p) + t' > t$.

52) Die Höhe $= \sqrt{a^2 - b^2}$, die Hypotenuse $= a - \sqrt{a^2 - b^2}$, die beiden Katheten $= \frac{1}{2}b \mp \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}}$.

53) Durch die eine in 3, durch die andere in 5 Stunden.

54) Der erste in 8, der zweite in 11 Tagen.

55) In der ersten Klasse sind 17, in der zweiten 23 und in der dritten 28 Schüler.

56) Die Länge beträgt 204, die Breite 85 *m*.

57) $\frac{1}{2}(\sqrt{2h^2 - d^2} + d)$ und $\frac{1}{2}(\sqrt{2h^2 - d^2} - d)$.

58) α) Die Länge 385, die Breite 132 *m*;
β) $\frac{1}{4}(u + \sqrt{8d^2 - u^2})$ und $\frac{1}{4}(u - \sqrt{8d^2 - u^2})$ *m*.

59) A 20 Eier, B 60 Äpfel. Ein Ei kostet 2 *Mkr*, ein Apfel $\frac{1}{2}$ *Mkr*.

60) $131\frac{1}{4}$ *km*.   61) $\sqrt{\frac{nts}{g} + \frac{1}{4}s^2} - \frac{1}{2}s$ Kilometer.

62) Der eine $\frac{7}{8}$, der andere $\frac{3}{4}$ Stunden.

63) In $\frac{1}{2}[2t - ne + \sqrt{n^2e^2 + 4t^2}] : e$ Sekunden; der zweite Wurzelwert ist negativ und läßt keine Deutung zu.

64) In $\sqrt{\frac{1}{4}n[4t + ne] : e} - \frac{1}{2}n$ Sekunden. Der zweite Wurzelwert ist unbrauchbar.

65) 630 *km*.   66) Der eine in 7, der andere in 5 Stunden.

67) α) Der eine in 182, der andere in 70 Sekunden. β) Nimmt man an, daß die beiden sich bewegenden Körper die Entfernung l vor ihrem Zusammenstoßen haben, so erhält man für die Zeit, welche der erste Körper gebraucht,

$$[td + n(d - l) + \sqrt{n^2(d - l)^2 + t^2d^2}] : [d - l],$$

für die, welche der zweite gebraucht,

$$[td - n(d - l) + \sqrt{n^2(d - l)^2 + t^2d^2}] : [d - l]$$

Sekunden. Außer diesen beiden Werten erhält man noch die Werte

$$[td + n(d - l) - \sqrt{n^2(d - l)^2 + t^2d^2}] : [d - l] \text{ und}$$

$$[td - n(d - l) - \sqrt{n^2(d - l)^2 + t^2d^2}] : [d - l],$$

von denen der erste positiv, der zweite negativ ist, denen man aber keine Bedeutung geben kann. Nimmt man an, daß beide Körper die Entfernung l nach ihrem Zusammentreffen erlangen, so erhält man für die Zeit, welche der erste Körper gebraucht,

$$[td + n(d + l) + \sqrt{n^2(d + l)^2 + t^2d^2}] : [d + l]$$

Sekunden, und für die, welche der zweite gebraucht,

$$[td - n(d + l) + \sqrt{n^2(d + l)^2 + t^2d^2}] : [d + l]$$

Sekunden. Die beiden anderen Wurzelwerte sind in diesem Falle eben so, wie in dem ersten, zu verwerfen. Im 67. Beispiele ist dieser zweite Fall nicht anwendbar, indem die Körper die Entfernung 550 Meter offenbar vor ihrem Zusammenstoßen erreichen.

68) Der erste 36, der zweite 30 *m*.

69) Jeder der Reisenden legt in einer Stunde entweder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{10}$ Meilen zurück.

70) In 11 Sekunden nach Abgang des ersten. Der zweite Wurzelwert $-35\frac{104}{113}$ deutet an, daß die beiden Körper vor $35\frac{104}{113}$ Sekunden die Entfernung von 275 *m* hatten, wenn man annimmt, daß dieselben mit den angegebenen Geschwindigkeiten sich bewegten, bevor sie die Spitze des rechten Winkels erreichten.

71) Die Auflösung der Gleichungen giebt zwei Resultate, ein positives $\frac{\sqrt{(d^2 - t^2c'^2)(c^2 + c'^2) + t^2c'^4} - tc'^2}{c^2 + c'^2}$ und ein negatives $-\frac{\sqrt{(d^2 - t^2c'^2)(c^2 + c'^2) + t^2c'^4} + tc'^2}{c^2 + c'^2}$. Letzteres bezieht sich auf die vergangene Zeit und giebt an, daß die beiden Körper vor der genannten Zeit die Entfernung d hatten. Die Auflösung ist allgemein nur dann möglich, wenn $d > cc't : \sqrt{c^2 + c'^2}$.

72) Nach $[ac + bc' \pm \sqrt{d^2(c^2 + c'^2) - (ac' - bc)^2}] : [c^2 + c'^2]$ Zeiteinheiten. Soll die Auflösung möglich sein, so muß $d^2(c^2 + c'^2) \geqq (ac' - bc)^2$ sein, oder es darf $d\sqrt{c^2 + c'^2}$ nicht kleiner sein, als die positive Differenz der Produkte ac' und bc. Einer der beiden Wurzelwerte muß immer positiv sein; der andere Wert wird positiv, Null oder negativ sein, je nachdem

$$(ac + bc')^2 \gtreqless d^2(c^2 + c'^2) - (ac' - bc)^2 \text{ oder}$$

$$a^2c^2 + b^2c'^2 \gtreqless d^2(c^2 + c'^2) - a^2c'^2 - b^2c^2, \text{ oder endlich}$$

$\sqrt{a^2 + b^2} \gtreqless d$ ist. Es ist aber $\sqrt{a^2 + b^2}$ offenbar die wechselseitige Entfernung der beiden Punkte zu der Zeit, wo sie die Entfernungen a und b von dem Durchschnittspunkte der beiden Linien haben. Ist also diese Entfernuug größer als d, so ist der zweite Wurzelwert positiv; ist diese Entfernung gleich d, so ist der zweite Wurzelwert 0, wie sich auch aus der Natur der Sache ergiebt; ist aber endlich diese Entfernung kleiner als d, so erhält man ein negatives Resultat, welches sich aber deuten läßt, wenn man nur annimmt, daß die beiden Punkte schon in Bewegung waren, ehe sie die Entfernungen a und b von dem Durchschnittspunkte der Linien erlangten; das negative Resultat bezieht sich in diesem Falle auf die vergangene Zeit.

73) Es muß $d = 0$ sein. Gemäß der Determination der vorhergehenden Aufgabe $d^2(c^2 + c'^2) \geqq (ac' - bc)^2$ muß für den besonderen Fall, daß $d = 0$ ist, $0 = (ac' - bc)^2$, also $ac' = bc$ sein, oder es müssen sich die Geschwindigkeiten der Punkte wie ihre Entfernungen vom Durchschnittspunkte verhalten, wie es sich übrigens

auch aus der Natur der Aufgabe ergiebt. Das Resultat der vorhergehenden Aufgabe ändert sich für diesen besonderen Fall in $b : c'$ oder $a : c$.

74) Da nach Nr. 72 $d\sqrt{c^2 + c'^2}$ nicht kleiner sein darf, als die positive Differenz der beiden Produkte ac' und bc, so ergiebt sich für d als Minimum $\dfrac{bc - ac'}{\sqrt{c^2 + c'^2}}$ oder $\dfrac{ac' - bc}{\sqrt{c^2 + c'^2}}$, je nachdem $ac' \lesseqgtr bc$ ist. Ist $ac' = bc$, so erhält man als Minimum 0, wie in der vorhergehenden Aufgabe. Die Zeit, wo beide Körper das Minimum ihrer Entfernung erreichen, ist also $[ac + bc'] : [c^2 + c'^2]$; diese Zeit ist offenbar der halben Summe der beiden Wurzelwerte der 72. Aufgabe gleich. Heißt also t die Zeit, wo die beiden Körper die Entfernung d zum ersten Male, und t' die Zeit, wo sie die Entfernung d zum zweiten Male haben, so ist $\frac{1}{2}(t + t')$ die Zeit, wo beide Körper das Minimum ihrer Entfernung erreichen. Das Resultat kann auch auf folgende Weise gefunden werden. Es sei d die Entfernung nach x Zeiteinheiten, alsdann ist: $(a - cx)^2 + (b - c'x)^2 = d^2$, daher

$$(c^2 + c'^2)x^2 - 2(ac + bc')x + a^2 + b^2 = d^2, \text{ oder}$$
$$[x(c^2 + c'^2) - (ac + bc')]^2 + (bc - ac')^2 = d^2(c^2 + c'^2);$$

d wird also ein Minimum, wenn $x(c^2 + c'^2) = ac + bc'$, oder $x = [ac + bc'] : [c^2 + c'^2]$.

75) Zum ersten Male werden beide Kreise einander auswärts nach 9 Sekunden, zum zweiten Male einwärts nach 11 Sekunden, zum dritten Male einwärts nach $12\frac{21}{41}$ Sekunden und zum vierten Male auswärts nach $14\frac{21}{41}$ Sekunden berühren. Nach $11\frac{31}{41}$ Sekunden werden beide Kreise einander am nächsten sein; der Abstand der Mittelpunkte beträgt um diese Zeit 14,5769 cm.

76) Vor 0,9705 Sekunden berührten beide Kreise einander zum ersten Male nach außen, und nach 0,9750 Sekunden werden beide Kreise einander zum zweiten Male nach außen berühren. Vor 0,0178 Sekunden berührten beide Kreise einander zum ersten Male nach innen, und nach 0,0222 Sekunden werden beide Kreise einander zum zweiten Male nach innen berühren. Nach 0,0022 Sekunden werden beide Kreise einander am nächsten sein.

77) Nach $[db \pm \sqrt{[(r + \varrho)^2 - d^2][l^2 + b^2] + d^2b^2}] : [l^2 + b^2]$ Sekunden findet die Berührung der beiden Kreise nach außen, und nach $[db \pm \sqrt{[(r - \varrho)^2 - d^2][l^2 + b^2] + d^2b^2}] : [l^2 + b^2]$ Sekunden die Berührung derselben nach innen statt. Ein negativer Wert hat in beiden Fällen Bedeutung und bezieht sich auf die verflossene Zeit. Zwei äußere und zwei innere Berührungen finden statt, wenn $d^2b^2 > [d^2 - (r \pm \varrho)^2][l^2 + b^2]$

oder $(r \pm \varrho)^2 (l^2 + b^2 > d^2 l^2$, oder auch, wenn nur $(r - \varrho)^2 (l^2 + b^2) > d^2 l^2$. Zwei äußere Berührungen und eine innere Berührung finden statt, wenn $(r - \varrho)^2 (l^2 + b^2) = d^2 l^2$. Zwei äußere Berührungen und keine innere Berührung finden statt, wenn $(r + \varrho)^2 (l^2 + b^2) > d^2 l^2$ und $(r - \varrho)^2 (l^2 + b^2) < d^2 l^2$. Bloß eine äußere Berührung findet statt, wenn $(r + \varrho)^2 (l^2 + b^2) = d^2 l^2$. Gar keine Berührung findet endlich statt, wenn $(r + \varrho)^2 (l^2 + b^2) < d^2 l^2$. Beide Kreise werden nach $bd : (l^2 + b^2)$ Sekunden einander am nächsten sein.

78) Der größere Beutel enthielt 72, der kleinere 12 Kugeln; die Handvoll enthielt 8 Kugeln.

79) α) 60 *l*. Einen zweiten Wert giebt die Gleichung, nämlich 576 *l*, der aber offenbar zu verwerfen ist;

β) $a - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{a^2}{n} + \frac{1}{4}b^2}$. Der zweite Wurzelwert ist größer als a, und deshalb nicht zu gebrauchen.

80) Zu $4\frac{1}{4}$ Prozent.

81) Zu $100\,[b - 2k + \sqrt{(k' + b)4k + b^2}] : [2k]$ Prozent.

82) Zu $100\,[-b - 2k + \sqrt{(k' - b)4k + b^2}] : [2k]$ Prozent. Die Auflösung ist nur dann möglich, wenn der Wurzelwert positiv ist, wenn also $4kk' - 4bk + b^2 > (b + 2k)^2$, oder $4kk' - 4bk > 4bk + 4k^2$, oder $k' - k > 2b$ ist. Ist $k' - k = 2b$, so erhält man das Resultat 0, d. h., das Kapital wurde ohne Zinsen verliehen.

83) $\frac{1}{2}(ac + b + \sqrt{(ac - b)^2 + 4ad})$. Der zweite Wurzelwert $\frac{1}{2}(ac + b - \sqrt{(ac - b)^2 + 4ad})$ ist, auch wenn er positiv ist, unbrauchbar; denn zieht man, gemäß Bedingung der Aufgabe, von dem Ertrage nach dem ersten Jahre b *hl* ab, so erhält man für die Aussaat zu Anfange des zweiten Jahres $\frac{1}{2}[(ca - b) - \sqrt{(ca - b)^2 + 4ad}]$, einen Ausdruck, der offenbar negativ ist und deshalb verworfen werden muß.

84) Der eine Teil von a sei $\frac{1}{2}a + x$, der andere $\frac{1}{2}a - x$; das Produkt derselben $\frac{1}{4}a^2 - x^2$ wird ein Maximum, wenn $x = 0$ ist, wenn also beide Teile $\frac{1}{2}a$ sind.

85) In zwei gleiche Faktoren $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$. 86) 81 *qm*.

87) $\frac{1}{16}n^2$. 88) Der eine $7414\frac{7}{8}$, der andere 4913 *ccm*.

89) Die Höhe beträgt 135,74 *mm*. Der zweite aus der Gleichung sich ergebende Wurzelwert 3,17 *mm* ist nicht brauchbar.

90) 2. 91) $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

92) Setzt man $\sqrt[3]{a^2+b} = a + e$, so wird $b = 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, oder mit Vernachlässigung von e^3, wenn e sehr klein ist, $b = 3a^2e + 3ae^2$. Durch Auflösung der quadratischen Gleichung erhält man alsdann $\sqrt[3]{a^3 + b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$; ebenso ist $\sqrt[3]{a^3 - b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$;

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}} = 1{,}26$; $\quad 1{,}26^3 = 2{,}000\,376$;

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2{,}000\,376 - 0{,}000\,376} = 0{,}63 + \sqrt{0{,}3969 - \frac{0{,}000\,376}{3{,}78}}$
$= 0{,}63 + \sqrt{0{,}396\,800\,529\,100\,529\,1} = 1{,}259\,921\,049\,895.$

§ 73.

Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) $x^2 + y^2 = 13,$
$x^2 - y^2 = -10{,}12.$

2) $(13x)^2 + 2y^2 = 177,$
$(2y)^2 - 13x^2 = 3.$

3) $xy = a,$
$\frac{x}{y} = b.$

4) $(x + y) : (x - y) = 193 : 111,$
$19 : \frac{1}{9}x = \frac{1}{8}y : 41.$

5) $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2) = 25 : 7,$
$xy = 48.$

6) $14x^2 - 122y^2 = 100,$
$x = 3y.$

7) $x^2 + xy = a,$
$xy + y^2 = b.$

8) α) $\frac{a}{x^2} - by^2 = (a - b)^3,$
$\frac{b}{x^2} + ay^2 = (a^2 - b^2)(a - b);$

β) $x^2 - \frac{4}{y^2} = 9,$
$\frac{x}{y} + \frac{2}{y^2} = 3.$

9) $2(x + 4)^2 - 5(y - 7)^2 = 75,$
$7(x + 4)^2 + 15(y - 7)^2 = 1075.$

10) $\left(\frac{9}{x}\right)^2 = \left(\frac{25}{y}\right)^2 - 16,$
$\frac{9}{x^2} = \frac{25}{y^2}.$

11) $\left(\frac{24}{x}\right)^2 + (y - 4)^2 = 65,$
$\left(\frac{12}{x}\right)^2 + 9 = (5y - 20)^2.$

12) $(x - 2)\;\;(y - 3) = 1,$
$(x - 2) : (y - 3) = 1.$

13) $x = a\sqrt{x + y},$
$y = b\sqrt{x + y}.$

14) α) $x^2 + y\sqrt{xy} = 336$, $y^2 + x\sqrt{xy} = 112$*); β) $x^2 - y\sqrt{xy} = 336$, $y^2 - x\sqrt{xy} = 112$*).

15) $x + y = s$, $xy = p$**). 16) $x - y = d$, $xy = p$**).

17) α) $x + y = 1{,}25$, $xy = 0{,}375$; β) $x + y = a$, $xy = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$. 18) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, $\frac{10}{xy} = \frac{1}{18}$.

19) $(7 + x)(6 + y) = 80$, $x + y = 5$.

20) $(x^2 + 2y^2)(3x^2 - 4y^2) = 48$, $2x^2 - y^2 = 7$. 21) $6 : x = y : 10$, $x - y = 11$.

22) α) $\frac{1}{742xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7326}$; β) $x(a - x) = y(a - y)$, $xy = a^2$.

23) α) $x - y = \frac{a^2 - b^2}{(a + 1)(b + 1)}$, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{a^2 - b^2}{(a - 1)(b - 1)}$; β) $x - \frac{1}{y} = a$, $y - \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

24) $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$ †). 25) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 100$, $x + y = 14$.

26) α) $xy = a$, $x^2 + y^2 = b$ ††); β) $xy = 1$, $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) : (ab)$.

27) $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = a$, $x^2 + y^2 = b$. 28) $\frac{a(x + y) + b(x - y)}{c(x - y) + d(x + y)} = \frac{s}{t}$, $x^2 + y^2 = m^2$.

29) $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = \sqrt{a}$, $x^2 - y^2 = b^2$. 30) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 3(a^2 + ab)$, $2x^2 + 3xy + y^2 = 3(b^2 + ab)$.

31) $x^3 - y^3 = m(x^2 - xy + y^2)$, $x - y = n$. 32) $12xy = 1$, $x^2 + y^2 = 25x^2y^2$.

33) $12 : x = y : 3$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$. 34) $xy + x = a$, $xy - y = b$.

35) $x^2 - y^2 + x + y = 0{,}375$, $x^2 - y^2 - (x - y) = 0{,}125$.

36) $(3x + 4y)(7x - 2y) + 3x + 4y = 44$, $(3x + 4y)(7x - 2y) - 7x + 2y = 30$.

---

*) Man setze $\sqrt{x} = z\sqrt{y}$.

**) Trigonometrische Lösung s. Heis Trigonometrie VIII. 110 und 111.

†) Man suche zuerst $x - y$ zu bestimmen. Trigonometrische Lösung s. Heis Trigonometrie VIII. 113.

††) Man suche sowohl $x + y$ als $x - y$ zu bestimmen. Trigonometrische Lösung siehe Heis Trigonometrie VIII. 114.

37) α) $xy = a,$ β) $xy = a(x + y),$
$x^2 + y^2 + xy = b;$ $x^2y^2 = b^2(x^2 + y^2).$

38) $xy(a^2 - b^2) = 1,$
$(x^2 + y^2 + xy)(a^2 - b^2)^2 = 3a^2 + b^2.$

39) $x^2 - y^2 = m,$
$y(x + y) = n.$

40) α) $x + y = xy = x^2 + y^2;$ β) $x - y = x : y = x^2 - y^2.$

41) α) $x + y = xy = x^2 - y^2;$
β) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = x - y = x - \sqrt{xy} + y.$

42) α) $ax + by = m,$ β) $ax + by = p,$
$xy = n;$ $cx^2 + dy^2 = q.$

43) α) $\frac{1}{2}(x + y) = \sqrt{mx} + \sqrt{ny} = m + n;$
β) $x + y = a,$ $x^2 + y^2 = bxy.$

44) α) $ax + by = m,$ β) $ax + by = m,$
$cxy + dx + ey = n;$ $cx^2 + dxy + ey^2 + fx + gy = n.$

45) α) $x^2 = ax + by,$ β) $x(bc - xy) = y(xy - ac),$
$y^2 = ay + bx;$ $xy(ay + bx - xy) = abc(x + y - c).$

46) $-x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x - 12y = 4,$
$x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y = 53.$

47) $-5x^2 + 7y^2 + 20x + 13y = 449,$
$3(x - 2)^2 + 4y^2 - 17y = 80.$

48) $x^2 + y^2 + 2xy - 2x(a + b) - 2y(a + b) = -4ab,$
$x^2 + y^2 - 2xy + 2x(a - b) - 2y(a - b) = 4ab.$

49) $x^2 + axy + by^2 = m,$
$x^2 + cxy + dy^2 = n.$

50) α) $x + y = a,$ β) $x - y = a,$
$x^3 + y^3 = b$ *); $x^3 - y^3 = b;$
γ) $ax + by = c,$
$a^3x^3 + na^2bx^2y + nab^2xy^2 + b^3y^3 = d.$

51) $(x^3 + y^3) + xy(x + y) = a,$
$(x^2 + y^2)x^2y^2 = b.$

52) $(x^6 + 1)y = a(y^2 + 1)x^3,$
$(y^6 + 1)x = a(x^2 + 1)y^3.$

53) α) $x^3 = ax + by,$ β) $y\sqrt{y} = 17\sqrt{y} + 4x,$
$y^3 = ay + bx;$ $x^3 = 4\sqrt{y} + 17x.$

54) α) $\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = \frac{3}{4},$
$2x^3 + 6xy^2 = \frac{9}{64}(x^2 - y^2)^3;$
β) $x^3 + y^3 = a,$
$xy = b.$

55) α) $x + y = a,$ β) $x - y = d,$
$x^4 + y^4 = b;$ $x^4 + y^4 = m.$

56) α) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12,$ β) $x + y + \sqrt{x + y} = 12,$
$x^2 + y^2 = 3026;$ $x^3 + y^3 = 189.$

---

*) Man suche zuerst xy zu bestimmen.

57) α) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, $(x+y)^2=2(x-y)^2$; β) $(x-y)^3=\frac{4}{49}(x^3-y^3)$, $7x+1=12y$.

58) α) $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=455$, $x+y=5$; β) $x+y=a$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=b$.

59) α) $x-y=m$, $x^5-y^5=n$; β) $x+y=p$, $x^5+y^5=q$;

γ) $x+y=m$, $x^5+ax^4y+bx^3y^2+bx^2y^3+axy^4+y^5=n$.

60) $(x^4+2bx^2y+a^2y^2)(y^4+2bxy^2+a^2x^2)=4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2$, $x^3+y^3=2cxy$.

61) α) $x^3+y^3=a$, $xy(x+y)=b$; β) $(x^3-y^3)(x^2+y^2)=a$, $(x^3+y^3)(x^2-y^2)=b$.

62) $x^3=(a+b)x^2+(a-b)y^2$, $y^3=(a+b)y^2+(a-b)x^2$. 63) $x(y^4-1)=80(y-1)$, $x^2(y^8-1)=3280(y^2-1)$.

64) α) $x^3+y^3=(x+y)xy=axy$;

β) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{x-y}{y^2}$;

γ) $(x:y)-(y:x)=axy=x-y$.

65) $(x^2-y^2)(x-y)=16xy$, $(x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2$.

66) α) $\frac{17}{\sqrt{x+y}}-7\frac{\sqrt{x+y}}{x}=10\frac{x}{\sqrt{(x+y)^3}}$, $\sqrt{x-y}=y-1$;

β) $\frac{y}{x}-\frac{9\sqrt{x}}{y}-\frac{81}{xy}=(2y+9)\frac{\sqrt{x}}{y}$,

$\frac{\sqrt{y}}{x}+3\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{9}{x\sqrt{y}}+\sqrt{x}$.

67) $x^4+9y^4-6x^2y^2-x^2+3y^2=132$. $y^4-10y^2x+25x^2=1$.

68) α) $ax+by=2(x^2-y^2)$, $\frac{b}{x-y}-\frac{a}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ *); γ) $ax^5+by^5=cx$, $ay^5+bx^5=cy$;

β) $(a+x)^2-m^2=y^2$, $(b-y)^2+n^2=x^2$; δ) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{2}{3}}=3x$, $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}=x$.

*) Anleitung. Man suche aus beiden Gleichungen a und b durch x und y auszudrücken und entwickele aus den für a und b gefundenen Werten die von x und y.

69) α) $a - b = \frac{x^2 - y^2}{(x+1)(y+1)}$, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)}$ *);

β) $\frac{y}{2x} + \frac{2}{3}\,\frac{y - \sqrt{x-1}}{y^2 - 2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$, $\frac{1}{4}y^4 = y^2 x - 1$.

γ) $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 1\frac{1}{2}$, $\sqrt{x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} = -2$.

70) α) $\frac{(2x-1)(2y-1)+1}{x^2-y^2+2y-1} = a + b$, $\frac{y^2-(x-1)^2}{x^2-(y-1)^2} = ab$;

β) $x = y + 2$, $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 6\frac{3}{4}$;

γ) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = m$, $x + y = n$.

71) α) $nx = py = \frac{1}{2}\sqrt{(m+x+y)(m+x-y)(m-x+y)(-m+x+y)}$;

β) $\frac{1+x}{1-y} + \frac{1+y}{1-x} = a$, $\frac{1+x}{1+y} + \frac{1-y}{1-x} = b$;

γ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$;

δ) $xy(5\frac{5}{6} - x - y) = x + y$, $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = 8\frac{1}{3}xy$.

72) α) $x + ay + (y^2 : x) = m$, $x^2 + by^2 + (y^4 : x^2) = n$;

β) $x + ay + (y^2 : x) = m$, $x^3 + by^3 + (y^6 : x^3) = m^3$.

---

73) α) $x(y + z) = m$, $y(z + x) = n$, $z(x + y) = o$;

β) $x(x + y + z) = m$, $y(y + z + x) = n$, $z(z + x + y) = p$.

74) α) $y + z = -(c - a)^2 xyz$, $z + x = -(a - b)^2 xyz$, $x + y = -(b - c)^2 xyz$;

β) $xy + x + y = a - 1$, $yz + y + z = b - 1$, $zx + z + x = c - 1$.

75) α) $x - y = a(n - z)$, $x^2 - y^2 = b(n^2 - z^2)$, $x^3 - y^3 = c(n^3 - z^3)$;

β) $x + y = a$, $z + x = b$, $x^2 = y^2 + z^2$;

γ) $x + y + z = a$, $yz = bx$, $x^2 = y^2 + z^2$;

δ) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 - z^2 = b$, $x^3 + y^3 + z^3 = c$.

76) α) $x + y = u + v$, $xy = uv$, $xv + yu = ayv$, $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b^2$;

*) Vergleiche Beispiel 23) α) dieses Paragraphen.

β) $xy = uz = a,$
$x + y + u + z = b,$
$x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = c;$

γ) $xy = uz = a,$
$x + y + u + z = b,$
$x^3 + y^3 + u^3 + z^3 = c.$

77) $(x - 1)(u - 2) - (y - 3)(z - 4) = 0,$
$(x - 2)(u - 5) - (y - 6)(z - 1) = 0,$
$(x - 3)(u - 2) - (y - 1)(z - 5) = 0,$
$(x - 2)(u - 3) - (y - 4)(z - 6) = 0.$

78) $a^x \cdot a^y : a^5 = a^{13},$
$(a^x)^y = a^{77}.$

79) $(a^{x+2})^{y-2} = (a^2)^{-4},$
$a^{3x-4} : a^{5y-3} = a^{x-7} : a^{3y-10}.$

80) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a:b} = \left(\sqrt[15]{a^2}\right)^4 : \sqrt[y]{b},$
$\sqrt[y]{a^x} = a^2 : \sqrt[y]{a^7}.$

81) $xy = a,$
$x^{\log y} = b.$

82) $\sqrt[x]{y} = 1{,}5,$
$y^x = 32768.$

§ 74.

Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen in § 73.

(Die mit gleichen Ziffern bezeichneten x_1 und y_1, x_2 und y_2 u. s. w. sind zusammengehörende oder simultane Werte.)

1) $x = \pm 1{,}2, \quad y = \pm 3{,}4.$ (Vier Paar Werte.)
2) $x = \pm 1, \quad y = \pm 2.$ (Vier Paar Werte.)
3) $x_1 = \sqrt{ab}, \ y_1 = \sqrt{a:b}; \quad x_2 = -\sqrt{ab}, \ y_2 = -\sqrt{a:b}.$
4) $x_1 = 456, \ y_1 = 123; \quad x_2 = -456, \ y_2 = -123.$
5) $x_1 = 8, \ y_1 = 6; \quad x_2 = -8, \ y_2 = -6;$
$x_3 = 8\sqrt{-1}, \ y_3 = -6\sqrt{-1}; \ x_4 = -8\sqrt{-1}, \ y_4 = 6\sqrt{-1}.$
6) $x_1 = 15, \ y_1 = 5; \ x_2 = -15, \ y_2 = -5.$
7) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{b}{\sqrt{a+b}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{b}{\sqrt{a+b}}.$
8) α) $x = \pm 1 : (a - b), \ y = \pm (a - b).$ (Vier Paar Werte.)
β) $x = \pm \frac{4}{7}\sqrt{21}, \ y = \pm \frac{1}{4}\sqrt{21}.$
9) $x_1 = 6, \ y_1 = 12; \quad x_2 = -14, \ y_2 = 12;$
$x_3 = 6, \ y_3 = 2; \quad x_4 = -14, \ y_4 = 2.$
10) $x = \pm 3, \quad y = \pm 5.$ (Vier Paar Werte.)
11) $x_1 = 3, \ y_1 = 5; \quad x_2 = -3, \ y_2 = 5;$
$x_3 = 3, \ y_3 = 3; \quad x_4 = -3, \ y_4 = 3.$
12) $x_1 = 1, \ y_1 = 2; \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 4.$
13) $x_1 = 0, \ y_1 = 0; \quad x_2 = a(a + b), \ y_2 = b(a + b).$
14) α) $z = +3; \quad y_1 = 2, \ x_1 = (+3)^2 \cdot 2 = 18;$
$y_2 = -2, \quad x_2 = (+3)^2 \cdot (-2) = -18.$
β) $z = -3; \quad y_1 = 2, \ x_1 = (-3)^2 \cdot 2 = 18;$
$y_2 = -2, \quad x_2 = (-3)^2 \cdot (-2) = -18.$
15) x_1 u. $y_2 = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4p}), \ y_1$ u. $x_2 = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p}).$

16) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}.$

17) α) $x_1 = 0{,}5, \quad y_1 = 0{,}75; \quad x_2 = 0{,}75, \quad y_2 = 0{,}5;$
β) x_1 u. $y_2 = \frac{1}{2}(a + b), \quad y_1$ u. $x_2 = \frac{1}{2}(a - b).$

18) $x_1 = 6, \quad y_1 = 30; \quad x_2 = 30, \quad y_2 = 6.$

19) $x_1 = 1, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 2.$

20) $x_1 = \pm 2, \quad y_1 = \pm 1.$ (Vier Paar Werte.)
$\left.\begin{matrix} x_2 = \pm \sqrt{4{,}4} = \pm 2{,}097\,617\,7, \\ y_2 = \pm \sqrt{1{,}8} = \pm 1{,}341\,640\,8. \end{matrix}\right\}$ (Vier Paar Werte.)

21) $x_1 = 15, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = -4, \quad y_2 = -15.$

22) α) $x_1 = \frac{333}{106}, \quad y_1 = \frac{22}{7}; \quad x_2 = -\frac{22}{7}, \quad y_2 = -\frac{333}{106};$
β) $x_1 = y_2 = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{-3}), \quad x_2 = y_1 = \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{-3}),$
$x_3 = y_3 = a, \quad x_4 = y_4 = -a.$

23) α) $x_1 = \frac{a-1}{b+1}, \quad y_1 = \frac{b-1}{a+1}; \quad x_2 = -\frac{b-1}{a+1}, \quad y_2 = -\frac{a-1}{b+1};$
β) x_1 u. $x_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})a, \quad y_1$ u. $y_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\frac{1}{a}.$

24) $x_1 = y_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2b - a^2}), \quad y_1 = x_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2b - a^2}).$

25) $x_1 = 12, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = 10, \quad y_2 = 4.$

26) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}},$
x_3 und $y_4 = -x_1, \quad y_3$ und $x_4 = -y_1;$
β) x_1 und $y_2 = \pm \sqrt{a : b}, \quad y_1$ und $x_2 = \pm \sqrt{b : a}.$

27) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \sqrt{\frac{b(a+2)}{2a}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \sqrt{\frac{b(a-2)}{2a}}.$

28) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{m[(cs - bt) + (at - ds)]}{\sqrt{2(cs - bt)^2 + 2(at - ds)^2}},$
$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{m[(cs - bt) - (at - ds)]}{\sqrt{2(cs - bt)^2 + 2(at - ds)^2}}.$

29) $x = \frac{1}{2}(a \mp 2b), \quad y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \mp 4ab}.$

30) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \mp (a - 2b), \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm (2a - b).$

31) $x = \frac{1}{2}n\left\{1 \pm \sqrt{\frac{n - 3m}{m - 3n}}\right\}, \quad y = \frac{1}{2}n\left\{-1 \pm \sqrt{\frac{n - 3m}{m - 3n}}\right\}.$

32) $x_1 = y_2 = -x_3 = -y_4 = \frac{1}{3},$
$x_2 = y_1 = -x_4 = -y_3 = \frac{1}{4}.$

33) x_1 und $y_2 = 9$, y_1 und $x_2 = 4$,
x_3 und $y_4 = 36$, x_4 und $y_3 = 1$.

34) x und $y = \frac{1}{2}[a - b \pm 1 \pm \sqrt{(a - b + 1)^2 - 4a}]$.

35) $x_1 = x_2 = 0{,}125$, $y_1 = 0{,}625$, $y_2 = 0{,}375$.

36) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 1\frac{7}{17}$, $y_2 = -\frac{1}{17}$.

37) α) x_1 und $y_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{a + b} + \sqrt{b - 3a}]$,
y_1 und $x_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{a + b} - \sqrt{b - 3a}]$,
x_3 und $y_4 = -\frac{1}{2}[\sqrt{a + b} + \sqrt{b - 3a}]$,
y_3 und $x_4 = -\frac{1}{2}[\sqrt{a + b} - \sqrt{b - 3a}]$;

β) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$,
x_2 und $x_3 = ab\,[b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}] : [b^2 - a^2]$,
y_2 und $y_3 = ab\,[b \mp \sqrt{2a^2 - b^2}] : [b^2 - a^2]$.

38) x_1 und $y_2 = 1 : (a - b)$, y_1 und $x_2 = 1 : (a + b)$,
x_3 und $y_4 = -1 : (a + b)$, y_3 und $x_4 = -1 : (a - b)$.

39) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{m + n}{\sqrt{m + 2n}}$, $\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{n}{\sqrt{m + 2n}}$.

40) α) $x_1 = y_1 = 0$, x_2 und $y_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$,
x_3 und $y_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$;

β) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}$, $y_2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

41) α) $x_1 = y_1 = 0$, x_2 und $x_3 = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$,
y_2 und $y_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$;

β) $x_1 = 1$, $y_1 = 0$; $x_2 = 4$, $y_2 = 1$; $x_3 = y_3 = 0$.

42) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4abn}}{2a}$, $\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - 4abn}}{2b}$;

β) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{adp \pm b\sqrt{(a^2d + b^2c)q - cdp^2}}{a^2d + b^2c}$,

$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{bcp \mp a\sqrt{(a^2d + b^2c)q - cdp^2}}{a^2d + b^2c}$.

43) α) x_1 und $x_2 = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$, y_1 und $y_2 = (\sqrt{n} \mp \sqrt{m})^2$;

β) $x = \frac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{\frac{b - 2}{b + 2}}\right)$, $y = \frac{1}{2}a\left(1 \mp \sqrt{\frac{b - 2}{b + 2}}\right)$.

44) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{bd + cm - ae \pm \sqrt{4ac(em - bn) + (bd + cm - ae)^2}}{2ac}$,

$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{ae + cm - bd \mp \sqrt{4bc(dm - an) + (ae + cm - bd)^2}}{2bc}$;

β) Setzt man $2aem - bdm + abg - b^2f = M$, so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{M \pm \sqrt{4(b^2n - em^2 - bgm)(a^2e - abd + b^2c) + M^2}}{2(a^2e - abd + b^2c)};$$

setzt man ferner $2bcm - adm + abf - a^2g = N$, so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{N \mp \sqrt{4(a^2n - cm^2 - afm)(a^2e - abd + b^2c) + N^2}}{2(a^2e - abd + b^2c)}.^{*)}$$

45) α) $x_1 = 0,\quad y_1 = 0;\quad x_2 = a + b,\quad y_2 = a + b,$
x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}[a - b \pm \sqrt{(a - b)(a + 3b)}]$,
y_3 und $y_4 = \frac{1}{2}[a - b \mp \sqrt{(a - b)(a + 3b)}]$;
β) x_1 und $x_2 = \pm\sqrt{ac}$, y_1 und $y_2 = \pm\sqrt{bc}$,
x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}[a + c - b \pm \sqrt{(a + c - b)^2 - 4ac}]$,
y_3 und $y_4 = \frac{1}{2}[b + c - a \mp \sqrt{(b + c - a)^2 - 4bc}]$.

46) $x_1 = 11,\quad y_1 = 3;\quad x_2 = -7\frac{1}{2},\quad y_2 = -3\frac{1}{6}$.

47) $x_1 = 3,\quad x_2 = 1,\quad y_1$ und $y_2 = 7$; x_3 und $x_4 = 2 \pm 7{,}26022\sqrt{-1}$, y_3 und $y_4 = -5\frac{36}{41}$.

48) $x_1 = a + b,\quad y_1 = a - b;\quad x_2 = 0,\quad y_2 = 2a;$
$x_3 = 2b,\quad y_3 = 0;\quad x_4 = b - a,\quad y_4 = a + b.$

49) Setzt man $y = xz$, so erhält man für z die beiden Werte:
$$\frac{cm - an \pm \sqrt{(cm - an)^2 + 4(m - n)(bn - dm)}}{2(bn - dm)},$$ ferner:
$$x = \pm\sqrt{\frac{m}{1 + az + bz^2}},\quad y = \pm z\sqrt{\frac{m}{1 + az + bz^2}}.$$

50) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}\right]$, $\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[a \mp \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}\right]$;

β) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} + \frac{a}{2}$, $\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} - \frac{a}{2}$;

γ) $x = \frac{1}{2a}\left[c \pm \sqrt{\frac{c^3(n + 1) - 4d}{c(n - 3)}}\right]$,
$y = \frac{1}{2b}\left[c \mp \sqrt{\frac{c^3(n + 1) - 4d}{c(n - 3)}}\right]$.

51) Setzt man $xy = z$, so ist $z = (b^2 \pm b\sqrt{a^2b + b^2})^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{2}{3}}$,
$\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix} y_2 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{az^2 \pm \sqrt{a^2z^4 - 4b^2z}}{2b}$.

52) Setzt man $x + \frac{1}{x} = z$, $y + \frac{1}{y} = u$, so wird:

---

*) Die in den Werten für x und y unter den Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke in 44) α und β) sind identisch.

z_1 und $z_2 = \pm\sqrt{3-a}$, u_1 und $u_2 = \mp\sqrt{3-a}$;
z_3 und $z_4 = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3-2a}+\sqrt{3+2a})$,
u_3 und $u_4 = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3-2a}-\sqrt{3+2a})$;
z_5 und $u_5 = 0$; $z_6 = u_6 = \pm\sqrt{3+a}$.

53) α) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = \pm\sqrt{a+b}$; $x_3 = -y_3 = \pm\sqrt{a-b}$;
$x_4 = y_5 = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a-2b}+\sqrt{a+2b})$,
$y_4 = x_5 = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a-2b}-\sqrt{a+2b})$;
β) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = \pm\sqrt{21}$, $y_2 = 21$; $x_3 = \pm\sqrt{13}$, $y_3 = 13$; $x_4 = \pm 4$, $y_4 = 1$; $x_5 = \mp 1$, $y_5 = 16$.

54) α) $x_1 = 3$, $y_1 = -1$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$;
β) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-4b^3})}$, $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2-4b^3})}$.

55) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \text{ und } x_3 \\ x_2 \text{ und } x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[a \pm \sqrt{-3a^2 \mp \sqrt{8(a^4+b)}}]$,
$\left.\begin{matrix} y_1 \text{ und } y_3 \\ y_2 \text{ und } y_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}[a \mp \sqrt{-3a^2 \mp \sqrt{8(a^4+b)}}]$.

56) α) x_1 und $y_2 = (+7)^2 = 49$, y_1 und $x_2 = (+5)^2 = 25$;
x_3 und $y_4 = \pm 176{,}771\,03\sqrt{-1} - 181$,
y_3 und $x_4 = \pm 176{,}771\,03\sqrt{-1} - 181$;
β) x_1 und $y_2 = 5$, y_1 und $x_2 = 4$;
x_3 und $y_4 = 8 + \frac{1}{12}\sqrt{-2505} = 8 + 4{,}170\,83\sqrt{-1}$,
y_3 und $x_4 = 8 - \frac{1}{12}\sqrt{-2505} = 8 - 4{,}170\,83\sqrt{-1}$.

57) α) $x_1 = 0$, $x_2 = x_4 = (\sqrt{2}+1)^2$, $y_2 = (\sqrt{2}+1)^4$, $y_4 = 1$;
$y_0 = 0$, $x_3 = x_5 = (\sqrt{2}-1)^2$, $y_3 = (\sqrt{2}-1)^4$, $y_5 = 1$;
β) $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{13}$, $y_2 = \frac{5}{39}$; $x_3 = y_3 = \frac{1}{5}$.

58) α) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$;
x_3 und $x_4 = 2{,}5 \pm 2{,}929\,732\,6\sqrt{-1}$,
y_3 und $y_4 = 2{,}5 \mp 2{,}929\,732\,6\sqrt{-1}$;
β) $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a^2 \mp 3\sqrt{(a^5+24b):a}}$, (4 Werte)
$y = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{6}\sqrt{-6a^2 \mp 3\sqrt{(a^5+24b):a}}$. (4 Werte.)

59) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \text{ und } x_2 \\ x_3 \text{ und } x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[m \pm \sqrt{-m^2 \pm 2\sqrt{\frac{4n+m^5}{5m}}}\right]$,
$\left.\begin{matrix} y_1 \text{ und } y_2 \\ y_3 \text{ und } y_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left[m \mp \sqrt{-m^2 \pm 2\sqrt{\frac{4n+m^5}{5m}}}\right]$;
β) das Resultat ähnlich wie in α); γ) $xy = \frac{(5-a)m^3 \pm \sqrt{(5-a)^2m^6 + 4m(n-m^5)(b-3a+5)}}{2(b-3a+5)m}$.

für $m = 5$, $n = 5975$, $a = 10$, $b = 20$ ist $x_1 = y_2 = 3$, $y_1 = x_2 = 2$, $x_3 = y_4 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{-51})$, $y_3 = x_4 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{-51})$.

60) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_3$ und $x_3 = y_2$ gleich
$[a^2 - 2bc - 2b^2]^{\frac{1}{3}}[c \pm \sqrt{c^2 - a^2 + 2bc + 2b^2}]^{\frac{1}{3}}$.

61) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix} y_2 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{\sqrt{a + 3b} \pm \sqrt{a - b}}{2\sqrt[6]{a + 3b}}$;

β) setzt man $x : y = z$, so ist $z = \frac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 - 4})$, worin $u = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{(9a - b) : (a - b)})$; mithin
$x = z\sqrt[5]{\frac{1}{2}(a + b) : (z^5 - 1)}$, $y = \sqrt[5]{\frac{1}{2}(a + b) : (z^5 - 1)}$.

62) Setze $y = xz$; dann wird $z_1 = 1$; $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = 2a$; und weiter $z^4 + z^3 + \dfrac{2a}{a - b} z^2 + z + 1 = 0$.

63) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 54$, $y_2 = \frac{1}{9}$,
y_3 und $y_4 = \frac{1}{13}(-8 \pm \sqrt{-105})$.

64) α) $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$, $x_3 = y_3 = \frac{1}{2}a$;
β) $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$,
x_3 und $x_4 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $y_3 = y_4 = \frac{1}{4}$;
γ) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{2}{1 - a}$, $y_2 = \dfrac{2}{1 + a}$.

65) $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_3 = 9$, $x_3 = y_2 = 3$.

66) α) $x_1 = 7$, $y_1 = 3$; $x_2 = \frac{7}{9}$; $y_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = 1$, $y_3 = 0$;
β) $x_1 = 0$, $y_1 = 9$; $x_2 = 4$, $y_2 = 25$.

Die erste Gleichung giebt: $y^2 - 81 = 2(y + 9)x\sqrt{x} = (y + 9)(y - 9)$; hieraus erhält man $y_3 = -9$; die zweite Gleichung giebt hiernach: $x_3 = -\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt{-1} = -2{,}62074\sqrt{-1}$.

67) $x_1 = 1$, $y_1 = \pm 2$; $x_2 = 14$, $y_2 = \pm\sqrt{69}$;
$x_3 = \frac{1}{2}[15 + \sqrt{193}]$, $y_3 = \pm\sqrt{38{,}5 + 2{,}5\sqrt{193}}$;
$x_4 = \frac{1}{2}[15 - \sqrt{193}]$, $y_4 = \pm\sqrt{38{,}5 - 2{,}5\sqrt{193}}$;
$x_5 = \frac{1}{2}[15 + 3\sqrt{29}]$, $y_5 = \pm\sqrt{36{,}5 + 7{,}5\sqrt{29}}$;
$x_6 = \frac{1}{2}[15 - 3\sqrt{29}]$, $y_6 = \pm\sqrt{36{,}5 - 7{,}5\sqrt{29}}$;
$x_7 = \frac{1}{2}[15 \pm \sqrt{285}]$, $y_7 = \pm\sqrt{38{,}5 \pm 2{,}5\sqrt{285}}$.

68) α) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = b^2a : (b^2 - a^2)$, $y_2 = ba^2 : (b^2 - a^2)$;
β) setzt man $a^2 - b^2 = p^2$ und

$(m+n+p)(m+n-p)(m-n+p)(m-n-p) = N^2$,
so ist: $x = \frac{1}{2}[a(m^2-n^2-a^2+b^2) \pm bN] : (a^2-b^2)$,
$y = \frac{1}{2}[b(m^2-n^2+a^2-b^2) \pm aN] : (a^2-b^2)$;

γ) $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}}$, $x_3 = -y_3 = \sqrt[4]{\frac{c}{a-b}}$;

δ) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = 4$, $y_2 = 8$; $x_3 = (-1)^2$, $y_3 = 8$.

69) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1+ab \pm 2a}{1-ab}$, $\left.\begin{matrix} y_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1+ab \pm 2b}{1-ab}$;

β) $x_1 = 1\frac{1}{4}$, $y_1 = \pm 2$; $x_2 = -2\frac{13}{36}$, $y_2 = \frac{5}{6}\sqrt{-1}$; γ) $x = 4\frac{1}{16}$, $y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{14}$.

70) α) $x_1 = (a+1):(ab+1)$, $y_1 = a(b+1):(ab+1)$;
$x_2 = (b+1):(ab+1)$, $y_2 = b(a+1):(ab+1)$;

β) $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -4$;
$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3}{11}} + 1$, $\left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3}{11}} - 1$;

γ) $x = \frac{1}{2}n[1 \pm \sqrt{(m+6 \mp 2\sqrt{4m+9}):m}]$,
$y = \frac{1}{2}n[1 \mp \sqrt{(m+6 \mp 2\sqrt{4m+9}):m}]$.

71) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{p}{n^2-p^2}[p\sqrt{m^2-n^2} \pm n\sqrt{m^2-p^2}]$,
$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{n}{n^2-p^2}[p\sqrt{m^2-n^2} \pm n\sqrt{m^2-p^2}]$;

β) $\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a-b}{a+b}$, $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{ab \pm \sqrt{(a+b-ab)^2+4ab}}{a+b}$;

γ) x_1 u. $y_2 = \pm\frac{1}{2}a(\sqrt{-1}+\sqrt{3})$, y_1 u. $x_2 = \pm\frac{1}{2}a(\sqrt{-1}-\sqrt{3})$;

δ) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ | $x_3 = \frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{1}{3}$ | $x_5 = 3$, $y_5 = \frac{1}{2}$ | $x_7 = 2$, $y_7 = \frac{1}{3}$,
$x_2 = 2$, $y_2 = 3$ | $x_4 = \frac{1}{3}$, $y_4 = \frac{1}{2}$ | $x_6 = \frac{1}{2}$, $y_6 = 3$ | $x_8 = \frac{1}{3}$, $y_8 = 2$.

72) Setzt man sowohl in α) als β) $x:y = z$, $z + \frac{1}{z} = u$, so wird
α) $u = [an \pm m\sqrt{a^2n + (2-b)(m^2-n)}] : [m^2-n]$;
β) $u = [-3(1+a^2) \pm \sqrt{9(1+a^2)^2 + 12a(b-a^3)}] : [6a]$.

73) α) Setzt man $M^2 = \frac{1}{2}(m+n-o)(m-n+o)(-m+n+o)$,
so ist: $x = M : (-m+n+o)$, $y = M : (m-n+o)$,
$z = M : (m+n-o)$.

β) Setzt man $1 : \sqrt{m+n+p} = N$, so ist:
$x = mN$, $y = nN$, $z = pN$.

74) α) $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, x_2 und $x_3 = \pm 1 : (c-a)$,
y_2 u. $y_3 = \pm 1 : (a-b)$, z_2 u. $z_3 = \pm 1 : (b-c)$;

β) $x = -1 + \sqrt{\frac{ac}{b}}$, $y = -1 + \sqrt{\frac{ab}{c}}$, $z = -1 + \sqrt{\frac{bc}{a}}$.

75) α) $z = n \dfrac{a^4 + 2ac - 3b^2 \pm 2\sqrt{3a(a^3 - c)(ac - b^2)}}{a^4 - 4ac + 3b^2}$,

$x = \frac{1}{2}[(b + a^2)n + (b - a^2)z] : a, \quad y = \frac{1}{2}[(b - a^2)n + (b + a^2)z] : a;$

β) $x = a + b \mp \sqrt{2ab}, \quad y = \pm\sqrt{2ab} - b, \quad z = \pm\sqrt{2ab} - a;$

γ) $x = \frac{1}{2}a^2 : (a + b)$, hieraus y und z;

δ) $z = \dfrac{a^3 - 3ab + 2c}{3(a^2 - b)}, \quad x + y = \dfrac{2(a^3 - c)}{3(a^2 - b)},$

$2xy = \dfrac{a^4 + 3b^2 - 4ac}{3(a^2 - b)}$; hieraus erhält man x und y.

76) α) x_1 und $x_2 = u_1$ und $u_2 = \pm \frac{1}{2}ab\sqrt{2 : (a^2 + 4)}$,
y_1 und $y_2 = v_1$ und $v_2 = \pm b\sqrt{2 : (a^2 + 4)}$;

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} v_3 \\ v_4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} v_5 \\ v_6 \end{matrix}\right\} = \pm \tfrac{1}{2}b\sqrt{1 \pm \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 4}},$$

$$\left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y_5 \\ y_6 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} u_5 \\ u_6 \end{matrix}\right\} = \pm \tfrac{1}{2}b\sqrt{1 \mp \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - 4}}.$$

β) und γ) Man setze $x + y = s$, $u + z = t$, u. s. w.

77) Die Finalgleichung in x ist $202x^2 - 861x + 89 = 0$ und die Wurzelwerte $x_1 = 0{,}106$, $y_1 = 5{,}445$, $z_1 = 2{,}720$, $u_1 = 5{,}502$; $x_2 = 4{,}156$, $y_2 = 4{,}822$, $z_2 = 5{,}212$, $u_2 = 2{,}699$.

78) $x_1 = 7, \quad y_1 = 11; \qquad x_2 = 11, \quad y_2 = 7.$

79) $x_1 = 0, \quad y_1 = -2; \qquad x_2 = 2, \quad y_2 = 0.$

80) $x_1 = 3, \quad y_1 = 5; \qquad x_2 = -4\frac{3}{8}, \quad y_2 = 1\frac{5}{16}.$

81) $\log x_1$ und $\log y_2 = \frac{1}{2}(\log a + \sqrt{(\log a)^2 - 4 \log b})$,
$\log y_1$ und $\log x_2 = \frac{1}{2}(\log a - \sqrt{(\log a)^2 - 4 \log b})$.

82) $x_1 = 5{,}063\,86, \qquad y_1 = 7{,}792\,94;$
$x_2 = -5{,}063\,86, \qquad y_2 = 0{,}128\,321.$

§ 75.

Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) Zwei Zahlen zu finden, die miteinander multipliziert, 576, und durcheinander dividiert, $2\frac{1}{4}$ geben.

2) Das Produkt zweier Zahlen ist p, der Quotient q. Wie heißen die Zahlen?

3) Eine bestimmte Anzahl Mark, welche ich besitze, kann ich sowohl in Form eines Quadrats, als auch in Form zweier Quadrate auf den Tisch hinlegen; im ersten Falle kommen an jede Seite 29 ℳ zu liegen, im zweiten Falle enthält das zweite Quadrat im ganzen 41 ℳ mehr, als das erste. Wieviel Mark kommen an jede Seite der beiden kleineren Quadrate zu liegen?

4) Bilde ich ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei gegebenen Linien, so daß dieselben Katheten werden, so erhalte ich zur Hypotenuse 17 *cm*. Konstruiere ich aber ein rechtwinkliges Dreieck, so daß die eine Linie Hypotenuse, die andere Kathete wird, so enthält das über der anderen Kathete beschriebene Quadrat 161 *qcm*. Wie groß sind beide Linien?

5) Zwei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 11 : 13 und geben zur Summe der Quadrate 14210. Wie heißen die Zahlen?

6) Das Produkt aus Summe und Differenz zweier Zahlen ist a, das Verhältnis der Summe der Zahlen zu ihrer Differenz ist dem Verhältnisse $p : q$ gleich. Wie heißen die Zahlen?

7) Jemand hat zwei quadratische Plätze, die er mit Bäumen, und zwar in Form von Quadraten, bepflanzen will. Setzt er auf dem ersten Platze die Bäume $2\frac{1}{2}$, auf dem zweiten $2\frac{1}{4}$ *m* voneinander, so gebraucht er zusammen 11113 Stück; setzt er aber auf dem ersten Platze die Bäume $2\frac{3}{4}$ *m*, auf dem zweiten 3 *m* voneinander, so hat er im ganzen 7816 Stück nötig. Wieviel Meter Länge hat jeder der beiden mit Bäumen zu besetzenden Plätze?*)

8) Ich habe zwei Bretter, beide von gleicher Größe und von quadratischer Form; das eine bedecke ich mit Zweimarkstücken, das andere mit Einmarkstücken und gebrauche hierzu im ganzen 340 Stück. Wenn nun 6 Zweimarkstücke, nebeneinander gelegt, dieselbe Länge geben, wie 7 Einmarkstücke, wieviel Zweimarkstücke liegen an jeder Seite des ersten, wieviel Einmarkstücke an jeder Seite des zweiten Brettes?

9) Der Fußboden meines Zimmers hat $30\frac{1}{3}$, die eine Seitenwand 21, die andere, an diese anstoßende, 13 *qm* Oberfläche. Wie lang, breit und hoch ist das Zimmer?

10) Länge, Breite und Höhe eines rechtwinklig behauenen Steines stehen in dem Verhältnisse 5 : 3 : 1. Die ganze Oberfläche des Steines beträgt 2,0286 *qm*. Welches ist die Länge, Breite und Höhe des Steines?

11) Drei Zahlen anzugeben, so daß das Produkt der ersten und zweiten m, das Produkt der ersten und dritten n, das Produkt der zweiten und dritten p ist.

12) Vier Zahlen anzugeben, so daß die Produkte je dreier von ihnen der Reihe nach m, n, p und q sind.

13) Die Diagonalen dreier aneinander stoßenden Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds sind a, b und c. Welchen Inhalt hat jede der drei Seitenflächen?

---

*) Man vergleiche die Aufgaben 35) in § 33 und 20) in § 71.

14) Die Summe zweier Zahlen ist 50, die Summe der Quadrate derselben 1258. Wie heißen die Zahlen?

15) Zwei kubische Gefäße haben zusammen 407 *ccm* Inhalt. Die Höhe des einen nebst der Höhe des anderen beträgt 11 *cm*. Welchen Inhalt hat jedes der beiden Gefäße?

16) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate einander gleich sind.

17) α) Vermehre ich den Zähler eines gewissen Bruches um 2 und vermindere den Nenner um 2, so erhalte ich den reciproken Wert des Bruches. Vermindere ich aber den Zähler des Bruches um 2, und vermehre ich den Nenner um 2, so erhalte ich zum Quotienten eine Zahl, die, um $1\frac{1}{15}$ vermehrt, dem reciproken Werte des zu suchenden Bruches gleich wird. Wie heißt der Bruch? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 2 und $1\frac{1}{15}$ die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden?

18) Ich kenne eine zweizifferige Zahl von folgender Eigenschaft. Das Produkt aus den beiden Ziffern ist gerade die Hälfte der Zahl. Kehre ich die Ziffern der Zahl um und subtrahiere die gegebene Zahl von der neuen Zahl, so erhalte ich zum Reste das $1\frac{1}{2}$fache des Produktes der beiden gegebenen Ziffern der Zahl. Wie heißt die Zahl?

19) Die Zahl 102 in drei Summanden zu zerlegen, so daß das Produkt aus dem ersten und dritten Summanden dem 102fachen des zweiten Summanden gleich wird, und daß der dritte Summand das $1\frac{1}{2}$fache des ersten wird.

20) Eine Linie von a *cm* Länge in drei Stücke zu teilen, daß dieselben mit der ganzen Linie in Proportion stehen, und zwar so, daß die beiden äußeren Stücke die äußeren Glieder, und das mittlere Stück und die ganze Linie die mittleren Glieder bilden*), und daß außerdem das dritte Stück das $n$fache des ersten Stückes wird.

21) Kehre ich die Ziffern einer gegebenen zweizifferigen Zahl um und multipliziere diese neue Zahl mit der ersten, so erhalte ich zum Produkte 5092. Dividiere ich aber die erste durch die zweite, so erhalte ich zum Quotienten 1 und zum Reste eine einzifferige Zahl**). Wie heißt die gegebene Zahl?

22) Vertausche ich die erste Stelle einer sechszifferigen Zahl mit der vierten, die zweite mit der fünften, die dritte mit der sechsten, so erhalte ich eine zweite sechszifferige Zahl, welche, mit der ersteren multipliziert, 122 448 734 694 giebt, und welche, um die erstere ver-

*) Diese Teilung einer Linie ist in der Geometrie unter dem Namen „harmonische Teilung" bekannt.

**) Man sehe § 28, Nr. 25 nach.

mindert, einen Rest hervorbringt, der dem 5fachen der ersten Zahl gleich kommt. Wie heißt die Zahl?

23) Die Diagonale eines Rechteckes beträgt 20,4 *m*. Vermehrt man die Länge des Rechteckes um 14,0 *m* und vermindert die Breite um 2,4 *m*, so nimmt die Diagonale um 12,4 *m* zu. Wie groß sind Länge und Breite des Rechteckes?

24) Die Diagonale eines Rechteckes von bestimmter Länge und Breite beträgt *a m*. Vermehrt man die Länge um *n*, die Breite um *p m*, so wird die Diagonale *b m* lang. Welche Länge und Breite hat das Rechteck?

25) Auf einer Strecke von 1732,5 *m* macht das Vorderrad eines Wagens 165 Umläufe mehr, als das Hinterrad. Vergrößert man den Umfang eines jeden Rades um 0,75 *m*, so wird auf derselben Strecke das Vorderrad 112 Umläufe mehr machen, als das Hinterrad. Welchen Umfang hat jedes der beiden Räder?

26) Ein Stück Tuch zieht sich bei der Benetzung mit Wasser in der Länge um den 8ten, in der Breite um den 16ten Teil zusammen. Wenn nun ein Stück Tuch dem Inhalte nach um 3,68 *qm*, dem Umfange nach um 3,4 *m* kleiner wird, wie groß sind Länge und Breite des Tuches?

27) Eine vom Feinde belagerte Festung kann sich, der Berechnung nach, wegen Mangels an Nahrungsmitteln nur noch 12 Tage halten. Ziehen 120 Mann ab, und erhält jeder täglich $\frac{5}{16}$ *kg* Brod weniger, so kann die Festung sich 16 Tage lang halten; ebenso lange wird sie sich halten können, wenn 200 Mann abziehen und jeder täglich $\frac{3}{16}$ *kg* Brod weniger erhält. Wie stark ist die Besatzung der Festung, und wieviel Brod erhält jeder täglich?

28) Eine gewisse Anzahl Arbeiter schafft einen Haufen Steine in 8 Stunden von einem Orte zum anderen. Wären der Arbeiter 8 mehr, und trüge jeder bei jedem Gange $2\frac{1}{4}$ *kg* weniger, so würde der Haufen in 7 Stunden fortgeschafft sein. Wären aber der Arbeiter 8 weniger, und trüge jeder bei jedem Gange $5\frac{1}{4}$ *kg* mehr, so würde der Haufe in 9 Stunden fortgeschafft sein. Wieviel Arbeiter sind zum Fortbringen der Steine beschäftigt, und wieviel trägt jeder von ihnen?

29) Die mehrjährigen Zinsen eines zu 5 Prozent ausgeliehenen Kapitals betragen mit dem Kapitale 2700 *M*. Die Zinsen eines um 600 *M* kleineren Kapitals betragen, wenn es $7\frac{1}{2}$ Jahre länger aussteht, als das erstere, zu 5 Prozent mit dem Kapitale ebenfalls 2700 *M*. Wie groß ist das erste Kapital, und wie lange hat dasselbe ausgestanden?

30) Zwei Knaben laufen von der Spitze des rechten Winkels eines dreieckigen Feldes aus in entgegengesetzten Richtungen längs den Seiten mit Geschwindigkeiten, die sich wie 13 : 11 verhalten.

Sie begegnen einander zum ersten Male auf der Mitte der Gegenseite und zum zweiten Male 20 *m* vom Ausgangspunkte. Die Längen der drei Seiten des Feldes sollen berechnet werden.

31) Bacchus fand den Silen neben einem vollen Weinfasse schlafend; er benutzte die Gelegenheit und trank während zweier Drittel der Zeit, welche Silen gebraucht hätte, um das ganze Faß zu leeren. Nachdem Silen erwacht war, trank er den von Bacchus übrig gelassenen Rest. Hätten beide zugleich angefangen zu trinken, so wären sie um 2 Stunden früher fertig geworden; Bacchus hätte aber alsdann nur halb soviel getrunken, als er vorher dem Silen übrig gelassen hatte. In welcher Zeit hätte jeder allein das Faß geleert?

32) Ein Behälter, der bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist, kann durch eine von zwei Röhren in einer bestimmten Zeit gefüllt und durch die zweite in einer anderen Zeit ausgeleert werden. Läßt man beide Röhren 12 Stunden offen, so wird der Behälter ausgeleert. Macht man die Öffnungen beider Röhren kleiner, so daß die eine zur Füllung, die andere zur Ausleerung eine Stunde mehr gebraucht, so wird bei gleichzeitiger Öffnung beider Röhren der Behälter in $15\frac{3}{4}$ Stunden leer. In welcher Zeit wird der leere Behälter durch die erste Röhre allein gefüllt, in welcher Zeit der volle Behälter durch die zweite Röhre allein ausgeleert werden?

33) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 12 und $15\frac{3}{4}$ die allgemeinen Zeichen t und u gesetzt werden?

34) Ein rechtwinkliges Feld hat zur Länge 119, zur Breite 19 *m*. Wieviel muß man der Breite zusetzen und wieviel von der Länge wegnehmen, wenn der Inhalt des Rechteckes derselbe bleiben und der Umfang um 24 *m* zunehmen soll?

35) Ein Rechteck, dessen eine Seite 23 und dessen andere Seite 18 *m* lang ist, soll durch zwei rechtwinklig sich durchschneidende Linien in vier Rechtecke zerlegt werden, daß der Inhalt eines der Rechtecke 90 *qm* enthält, und daß die eine Seite des demselben gegenüberstehenden Rechteckes, welche der Seite von 23 *m* Länge parallel ist, zu der anderen in dem Verhältnisse 2 : 3 stehe. Wie groß sind die beiden Seiten des letzteren Rechteckes?

36) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, α) wenn für 23, 18, 90, 2 und 3 die allgemeinen Zeichen m, n, p, r und s gesetzt werden; β) wenn statt des Inhaltes p des einen Rechteckes die Diagonale desselben $= d$ *m* bekannt ist?

37) Auf dem Personenzuge einer Eisenbahn haben für die Strecke von dem Orte A nach dem Orte B in der zweiten Wagenklasse 64 Personen mehr, als in der ersten, und in der dritten 166 Personen mehr, als in der zweiten Wagenklasse, Billets genommen. Der Ertrag für die gelösten Billets belief sich im ganzen

auf 669 ℳ 60 ₰, und zwar für die zweite Klasse 163 ℳ 20 ₰ mehr, als für die erste, und 40 ℳ 80 ₰ weniger, als für die dritte Klasse. Jedes Billet in der ersten Klasse kostet so viel, als ein Billet in der zweiten und dritten Wagenklasse zusammen. Wieviel betrug hiernach 1) die Personenzahl in jeder der drei Wagenklassen, 2) der Preis des Billets in jeder Wagenklasse?

38) Zwei Punkte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpunkte, von dem der eine um 50, der andere um $136\frac{1}{4}$ *m* entfernt ist. Nach 7 Sekunden beträgt die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte 85 und nach 9 Sekunden 68 *m*. Welche Geschwindigkeiten haben beide Punkte?

39) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 50, $136\frac{1}{4}$, 7, 85, 9 und 68 a, b, t, d, u und e gesetzt werden?

40) Zwei Punkte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, unter einem rechten Winkel sich durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspunkte hin, von welchem der eine a *m*, der andere b *m* entfernt ist. Nach t Sekunden haben sie die Entfernung d *m*, und nach t' ($> t$) Sekunden erlangen sie ihre kürzeste Entfernung. Welche Geschwindigkeiten haben beide Punkte?

41) Zwei Punkte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, unter einem rechten Winkel sich durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspunkte hin, von welchem der eine a, der andere b *m* entfernt ist. Nach t Sekunden haben beide Punkte die Entfernung d *m* und stehen am nächsten beisammen. Welche Geschwindigkeiten haben beide Punkte?*)

42) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich von der Spitze aus zwei Punkte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, und zwar geht der erste n Sekunden früher ab, als der zweite. In t Sekunden nach Abgang des zweiten beträgt die wechselseitige Entfernung beider Punkte d und in t' Sekunden nach Abgang des zweiten d' *m*. Wieviel Meter legt jeder Punkt in einer Sekunde zurück?

43) Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds beträgt 192 *qcm*; die Länge desselben übertrifft die Summe der Breite und Höhe um 5 *cm*, und die von einer Ecke zur gegenüberstehenden gezogene Linie (die Diagonale des Parallelepipeds) mißt 13 *cm*. Wie lassen sich aus diesen Angaben Länge, Breite und Höhe des Parallelepipeds berechnen?

44) Wie groß sind Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkligen Parallelepipeds, wenn die Diagonale a *cm*, die Oberfläche b *qcm*

*) Siehe § 71, Aufgabe 74.

enthält, und wenn die Länge die Summe der Breite und der Höhe um c *cm* übertrifft?

45) Ein rechtwinkliges Feld, dessen Länge 317 und dessen Breite 119 *m* beträgt, soll durch zwei, mit den Seiten parallel laufende Linien in vier rechtwinklige Teile geteilt werden, und zwar so, daß der in der einen Ecke liegende Teil 8370, der in der anderen, gegenüberstehenden Ecke liegende Teil aber 10 374 *qm* enthält. Wie groß sind Länge und Breite eines jeden dieser beiden gegenüberstehenden Rechtecke?

46) Bekanntlich ließ Joseph in Ägypten Vorratshäuser bauen, um darin den Überfluß der sieben fetten Jahre für die folgenden mageren aufzubewahren. Ein Hieroglyphen-Dokument*), welches ein Reisender bei einem abessinischen Gelehrten in Ober-Ägypten gefunden haben will, giebt folgenden Aufschluß über die Größe der Kornhäuser. Längs einem Arme des Nils hatte Joseph auf einem steinernen Damme vier Gebäude in einer Reihe bauen lassen, so daß die Entfernung des zweiten vom ersten, des dritten vom zweiten, sowie die des vierten vom dritten 41 Fuß, die Entfernung der äußersten Grenze des ersten von der äußersten Grenze des vierten 600 Fuß war. Bei 6 Fuß dicken Mauern hatten die inneren Räume die Form eines Würfels, jedoch von ungleicher Größe, so nämlich, daß das Längenverhältnis des ersten und zweiten dem des dritten und vierten gleich war. Die Fußböden aller vier zusammen bedeckten 9265 marmorne Fliesen von $2\frac{1}{4}$ Fuß Länge und 2 Fuß Breite, und die gefüllten Räume hatten einen Inhalt von 239 811 □. (Das Zeichen □ deutet auf ein ägyptisches Kornmaß von 21 Kubikfuß.) α) Welche Länge hatte hiernach jede Vorratskammer? β) Wenn bei der Kornspende nach 356 Tagen der kleinste Speicher geleert war, wie lange würde der Vorrat der drei übrigen bei gleichmäßiger Verteilung noch ausreichen?

47) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden inneren Glieder a, die Summe der beiden äußeren Glieder b und die Summe der Quadrate aller Glieder c. Wie heißt die Proportion?

48) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußeren oder inneren Glieder a, die Summe aller vier Glieder b und die Summe ihrer Quadrate c. Wie heißt die Proportion?

49) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußeren Glieder a, die Summe aller Glieder b und die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der äußeren und der Summe der Quadrate der inneren Glieder c. Welches ist die Proportion?

*) Dieses Beispiel ist dem „Hamburger Beobachter“ 1821, Nr. 20, entnommen. Das historische Faktum möchte wohl in Zweifel zu ziehen sein, weil zur damaligen Zeit hieroglyphische Dokumente noch nicht entziffert werden konnten.

50) Es werden drei Zahlen in stetiger Proportion gesucht, so daß ihre Summe a und die Summe ihrer Quadrate b ist.

51) In einer stetigen Proportion ist die Summe aller drei Glieder a, und der Rest, welchen man erhält, wenn man von der Summe der Quadrate der äußeren Glieder das Quadrat des mittleren Gliedes abzieht, b. Wie heißt die Proportion?

52) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der inneren Glieder a, die Summe der äußeren Glieder b, die Summe der Kuben aller vier Glieder c. Welches ist die Proportion?

53) In einer geometrischen Proportion ist die Summe aller Glieder a, die Summe ihrer Quadrate b, die Summe ihrer Kuben c. Welche Proportion ist es?

54) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußeren Glieder a, die Summe aller Glieder b und die Summe ihrer Kuben c. Wie heißt die Proportion?

55) α) Eine dreizifferige Zahl hat zur Quersumme 16. Kehrt man die Ziffern des Zahl um, so erhält man eine zweite Zahl, die um 69 • kleiner ist, als die erstere, wo • an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht. Multipliziert man die erste Zahl mit der zweiten, so erhält man zum Produkte 1.5038*), wo • ebenfalls an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht. Wie heißt die dreizifferige Zahl?

β) Was ist das für eine zweizifferige Zahl, die, durch das Produkt ihrer Ziffern dividiert, 3 zum Quotienten giebt und, um 18 vermehrt, ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung erscheinen läßt?

56) Von vier Zahlen, die in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, $x : y = y : z = z : u$, ist die Summe der ersten und vierten Zahl a, der zweiten und dritten b. Wie heißen die Zahlen?

57) Die reellen Werte für x und y zu finden, so daß $(x + y\sqrt{-1})^2 = a + b\sqrt{-1}$. Beispiel: $(x + y\sqrt{-1})^2 = -5 + 12\sqrt{-1}$.

§ 76.

Auflösungen der Aufgaben in § 75.

1) 36 und 16, oder auch -36 und -16.

2) $\sqrt{pq}$ und $\sqrt{p : q}$, oder auch $-\sqrt{pq}$ und $-\sqrt{p : q}$.

3) An der einen 21, an der anderen 20 M. 4) 15 cm und 8 cm.

5) 77 und 91, oder auch -77 und -91.

6) $\pm \frac{1}{2}(p + q)\sqrt{a : (pq)}$ und $\pm \frac{1}{2}(p - q)\sqrt{a : (pq)}$.

7) Der eine $192\frac{1}{2}$, der andere 162 m.

8) Auf dem ersten liegen in jeder Reihe 12 Zweimarkstücke, auf dem zweiten in jeder Reihe 14 Einmarkstücke.

9) 7 m lang, $4\frac{1}{2}$ m breit und 3 m hoch. 10) 105, 63 und 21 cm.

*) Über die ausgelassenen Stellen vergleiche man § 28, Nr. 25 und 26.

11) $\sqrt{mn : p}$, $\sqrt{mp : n}$ und $\sqrt{np : m}$.

12) Die Zahlen sind $\sqrt[3]{\frac{mnp}{q^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{mnq}{p^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{mpq}{n^2}}$ und $\sqrt[3]{\frac{npq}{m^2}}$.

13) Die Flächen, welche a, b und c zur Diagonale haben, sind bezüglich $\frac{1}{2}\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$.

14) 27 und 23. 15) Das eine 343, das andere 64 *ccm*.

16) x_1 und $x_2 = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$, y_1 und $y_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$; $x_3 = y_3 = 0$

17) $\alpha)\ \frac{x_1}{y_1} = \frac{5}{7}$, $\frac{x_2}{y_2} = \frac{-1{,}5}{0{,}5}$; $\beta)\ \frac{x}{y} = \frac{(a:b)[2 - b \pm \sqrt{4 - 2b + b^2}]}{(a:b)[2 \pm \sqrt{4 - 2b + b^2}]}$.

18) 36; ein zweiter Wurzelwert würde 00 geben.

19) Die Summanden sind 34, 17 u. 51, auch —204, 612 u. —306.

20) Das erste Stück ist $\frac{am}{2n}[\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n - 1]$,
das zweite $\frac{a}{2n}[n^2 + 4n + 1 - (n + 1)\sqrt{n^2 + 6n + 1}]$,
das dritte $\frac{1}{2}a[\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n - 1]$ Centimeter.

21) 76. 22) 142 857. 23) 18 und 9,6 *m*.

24) Setzt man zur Abkürzung: $M = b^2 - a^2 - n^2 - p^2$, so ist $[Mn \mp p\sqrt{4a^2(p^2 + n^2) - M^2}] : [2(p^2 + n^2)]$ Meter die Länge und $[Mp \pm n\sqrt{4a^2(p^2 + n^2) - M^2}] : [2(p^2 + n^2)]$ Meter die Breite.

25) Das Vorderrad 3 *m*, das Hinterrad 4,2 *m*.

26) Die Länge 12,8, die Breite 1,6 *m*.

27) Die Besatzung der Festung ist 1200 Mann stark, und jeder derselben erhält täglich $1\frac{7}{8}$ *kg* Brod. Die beiden anderen aus der Gleichung sich ergebenden Werte, 80 für die Stärke der Besatzung und $\frac{1}{8}$ *kg* für die tägliche Ration, sind zu verwerfen.

28) Der Arbeiter sind 28, und jeder trägt $22\frac{1}{2}$ *kg* Steine; oder 36, und jeder trägt $38\frac{1}{2}$ *kg* Steine.

29) Das Kapital beträgt 2400 *M* und stand $2\frac{1}{2}$ Jahre.

30) 60, 80 und 100 *m*. 31) Bacchus in 6, Silen in 3 Stunden.

32) α) in 8, β) in 6 Stunden.

33) $\frac{4t + 1 + \sqrt{16tu + 1}}{4u - 4t - 2}$ und $\frac{4t - 1 + \sqrt{16tu + 1}}{4u - 4t + 2}$.

34) Man muß von der Länge 102 *m* wegnehmen und zu der Breite 114 *m* hinzusetzen. 35) 8 *m* und 12 *m*.

36) $r[mr + ns \pm \sqrt{(r^2 + s^2)d^2 - (ms - nr)^2}] : [r^2 + s^2]$ und
$s[mr + ns \pm \sqrt{(r^2 + s^2)d^2 - (ms - nr)^2}] : [r^2 + s^2]$ *m*.

37) 1) 24, 88 und 254 Personen; 2) 4,20 *M*, 3 *M*, 1,20 *M*.

38) 2 und $8\frac{1}{2}$, oder $3\frac{81455}{84529}$ und $7\frac{131987}{169088}$ *m*.

39) $b\,\frac{a^2tN \pm \sqrt{(a^2 + b^2)[d^2 - a^2 - (b - atN)^2] + a^4t^2N^2}}{t(a^2 + b^2)}$

und $a\,\frac{b^2tN \pm \sqrt{(a^2+b^2)[d^2-a^2-(b-atN)^2]+a^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}$ Meter,
wenn $N = [(a^2+b^2)(u^2-t^2) - d^2u^2 + e^2t^2] : [2abtu(u-t)]$.

40) Gemäß Lösung der 74ten Aufgabe in § 71 liegt die Zeit, wo die Punkte die kürzeste Entfernung erlangen, in der Mitte zwischen den Zeiten, wo die Punkte zwei gleiche Entfernungen voneinander haben. Haben also die Punkte nach t Sekunden die Entfernung d und nach t' Sekunden die kürzeste Entfernung, so müssen sie offenbar nach $t' + (t' - t)$ oder nach $2t' - t$ Sekunden ebenfalls die Entfernung d haben. Die Aufgabe wird demnach auf die 39te zurückgeführt. Setzt man $t'(a^2+b^2-d^2) : [abt(2t'-t)] = N$, so erhält man für die Geschwindigkeiten beider Körper:

$$b\,\frac{a^2tN \pm \sqrt{(a^2+b^2)[d^2-a^2-(b-atN)^2]+a^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)} \text{ und}$$

$$a\,\frac{b^2tN \mp \sqrt{(a^2+b^2)[d^2-a^2-(b-atN)^2]+a^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)} \text{ Meter.}$$

41) $[a(a^2+b^2-d^2) - db\sqrt{a^2+b^2-d^2}] : [t(a^2+b^2)]$ und $[b(a^2+b^2-d^2) + da\sqrt{a^2+b^2-d^2}] : [t(a^2+b^2)]$ Meter.

42) Der erste $\sqrt{[d^2t'^2 - d'^2t^2] : [t'^2(t+n)^2 - t^2(t'+n)^2]}$, der zweite $\sqrt{[d'^2(t+n)^2 - d^2(t'+n)^2] : [t'^2(t+n)^2 - t^2(t'+n)^2]}$ Meter. Es muß zugleich $d(t'+n) \lesseqgtr d'(t+n)$ und $t \lesseqgtr t'$ sein.

43) 12, 4 und 3, oder 12, 3 und 4 *cm*.

44) Die Länge beträgt: $\frac{1}{2}(c + \sqrt{a^2+b})$, die Breite und Höhe: $\frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2+b} - c \pm \sqrt{5a^2 - 3c^2 - 3b - 2c\sqrt{a^2+b}}\right)$ *cm* oder umgekehrt.

45) Die Länge des einen Rechteckes beträgt 135, die Breite 62; die Länge des anderen, gegenüberstehenden 182, die Breite 57 *m*. Ebenso genügen für das erste Rechteck $165\frac{19}{119}$ und $50\frac{215}{317}$, für das zweite Rechteck $151\frac{108}{119}$ und $68\frac{102}{317}$ *m*.

46) α) Die Summe der inneren Längen der vier Gebäude (429 Fuß) sei $= a$, die Summe der inneren Flächen (46 325 Quadratfuß) sei $= b$, und die Summe der inneren körperlichen Räume (5 036 031 Kubikfuß) $= c$. Es seien ferner die Länge des ersten Würfels x, des zweiten xz, des dritten y, des vierten yz; alsdann ist:

$$(x + y)(1 + z) = a \quad (1),$$
$$(x^2 + y^2)(1 + z^2) = b \quad (2),$$
$$(x^3 + y^3)(1 + z^3) = c \quad (3).$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+z} + \sqrt{\frac{2b}{1+z^2} + \frac{a^2}{(1+z)^2}}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+z} - \sqrt{\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}}\right).$$

Hieraus wird mit Hülfe von (3):

$$z^4+\frac{3ab+a^3-4c}{3ab-a^3-2c}z^3-\frac{2a^3+4c}{3ab-a^3-2c}z^2+\frac{3ab+a^3-4c}{3ab-a^3-2c}z+1=0.$$

Durch Einsetzen der Werte von a, b und c wird:

$$z^4-\tfrac{23005}{5712}z^3+\tfrac{69173}{11424}z^2-\tfrac{23005}{5712}z+1=0,$$

$$z_1=\tfrac{7}{6},\ z_2=\tfrac{6}{7},\ z_3=\tfrac{17}{16},\ z_4=\tfrac{16}{17}.$$

Hieraus erhält man die gesuchten Längen 102, 119, 96 und 112 Fuß in verschiedenen Reihenfolgen;

β) $1670\tfrac{9775}{24576}$ Tage.

47) $\tfrac{1}{2}(b\pm\sqrt{c-a^2}):\tfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{c-b^2})=$
$\tfrac{1}{2}(a\mp\sqrt{c-b^2}):\tfrac{1}{2}(b\mp\sqrt{c-a^2})$.

48) Setzt man $\pm\sqrt{8a+2c-b^2}=M$, so ist die gesuchte Proportion:
$\tfrac{1}{4}(b+M+\sqrt{2c-8a+2bM}):\tfrac{1}{4}(b-M-\sqrt{2c-8a-2bM})=$
$\tfrac{1}{4}(b-M+\sqrt{2c-8a-2bM}):\tfrac{1}{4}(b+M-\sqrt{2c-8a+2bM})$.

49) $$\frac{b^2+c-\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}:\frac{b^2-c-\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}=$$
$$\frac{b^2-c+\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}:\frac{b^2+c+\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}.$$

50) Die Zahlen sind: $[a^2+b-\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}]:[4a]$, $[a^2-b]:[2a]$ und $[a^2+b+\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}:[4a]$.

51) Das mittlere Glied $m=\tfrac{1}{2}[-a\pm\sqrt{3a^2-2b}]$, die äußeren Glieder: $\tfrac{1}{2}[a-m\pm\sqrt{a^2-2am-3m^2}]$.

52) Heißt das Produkt der inneren oder äußeren Glieder p, so ist: $p=(a^3+b^3-c):[3(a+b)]$, und die Proportion ist:
$\tfrac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-4p}):\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4p})=$
$\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4p}):\tfrac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4p})$.

53) Heißt das Produkt der inneren oder äußeren Glieder p und die Differenz zwischen den Summen der beiden äußeren und der beiden inneren d, so ist:

$p=(a^3-3ab+2c):(6a)$, $d=\pm\sqrt{(a^3-6ab+8c):(3a)}$,
und die verlangte Proportion:
$\tfrac{1}{4}[a+d-\sqrt{(a+d)^2-16p}]:\tfrac{1}{4}[a-d-\sqrt{(a-d)^2-16p}]=$
$\tfrac{1}{4}[a-d+\sqrt{(a-d)^2-16p}]:\tfrac{1}{4}[a+d+\sqrt{(a+d)^2-16p}]$.

54) Setzt man der Kürze wegen $\pm\sqrt{[4c+12ab-b^3]:[3b]}=M$, so ist die gesuchte Proportion:
$\tfrac{1}{4}(b+M-\sqrt{(b+M)^2-16a}):\tfrac{1}{4}(b-M-\sqrt{(b-M)^2-16a})=$
$\tfrac{1}{4}(b-M+\sqrt{(b-M)^2-16a}):\tfrac{1}{4}(b+M+\sqrt{(b+M)^2-16a})$.

55) α) 871; β) 24. 56) Setzt man $\sqrt{(a-b):(a+3b)}=n$,

so ist: $y = \frac{1}{2}b(1 \pm n)$, $z = \frac{1}{2}b(1 \mp n)$,
$x = \frac{1}{8}(a + 3b)(1 \pm n)^3$, $u = \frac{1}{8}(a + 3b)(1 \mp n)^3$.

57) $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)}$, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$. Für den besonderen Fall ist $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.

C. Diophantische Gleichungen und Kongruenzen.

§ 77a.

I. Diophantische Gleichungen*).

Folgende Gleichungen sollen für ganze positive Werte der unbekannten Größen aufgelöst werden**).

1) $x + y = 10$. 2) $x + y + z = 6$. 3) $2x + 3y = 25$.
4) $5x + 7y + 4 = 56$. 5) $y = 13 + \frac{4}{13}(15 - x)$.
6) $123x + 567y = 5028$. 7) $2373 = 13x + 24y$.
8) $3875x + 2973y = 122362$. 9) $3x + 5y = 10$.
10) $5x + 8y = 29$. 11) $16x + 4y = 1830$.
12) $17x + 53y - 123 = 441 - 19x + 15y$.
13) $3x + 5y + 7z = 67$.
14) $x + 3y + 5z = 44$, $3x + 5y + 7z = 68$.
15) $x + 2y + 3z = 50$, $4x - 5y - 6z = -66$.
16) $x + y - 4z = -19$, $3x + 7y - 8z = 3$.
17) $x + y + 2z = 17$, $x + 3y + 4z = 28$.
18) $x - y = 17$. 19) $8x = 11y$.
20) $91x = 221y$. 21) $5x = 7y = 9z$.
22) $12x = 15y = 20z$. 23) $391x = 493y = 667z$.
24) $3x = 5y + 1$. 25) $17x = 11y + 86$.
26) $89x - 144y = 1$. 27) $11x - 13y = 36y - 3x - 133$.
28) $\frac{73x + 17}{19} = \frac{58y - 56}{21}$. 29) $8x + 3y - 2z = 8$, $7x + 2y - z = 8$.
30) $29y = 8x - 4$, $45z = 17x - 7$.
31) $x + 2y + 3z = 14$, $2x + 3y + 4t = 24$, $3x + 4z + 5t = 35$.

---

*) Diophanti arithmeticorum libri VI. Diophantus lebte nach Abulfarag um 360 n. Chr. in Alexandrien.

**) Eine besondere Methode zur Auflösung der diophantischen Gleichungen besteht in der Anwendung der Zahlen-Kongruenzen (§ 78. 12), der Kettenbrüche (§ 87) und der Kettenreihen (§ 83. 33). Die Methode des Indiers Aryabhatta (geb. 476 n. Chr.) besteht in dem Aufsuchen des gemeinschaftlichen Teilers der Koeffizienten der beiden Unbekannten (vergl. Euler. Algebra, II. § 227)

§ 77b.

Auflösung der Gleichungen in § 77a.

2)

$x =$	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4,
$y =$	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1,
$z =$	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1.

3)

$x =$	2	5	8	11,
$y =$	7	5	3	1.

4)

$x =$	2	9,
$y =$	6	1.

5)

$x =$	2	15	28	41	54,
$y =$	17	13	9	5	1.

6) $x = 4$, $y = 8$.

7)

$x =$	9	33	57	81	105	129	153	177,
$y =$	94	81	68	55	42	29	16	3.

8) $x = 17$, $y = 19$.

9) Will man den Wert 0 mitrechnen, so genügen nur $x = 0$, $y = 2$. 10) $x = 1$, $y = 3$. 11) Aufl. unmöglich.

12) $x = 3$, $y = 12$.

13)

$x =$	15	10	5	16	11	6	1	2	7	12	3	8	4	9,		
$y =$	3	6	9	1	4	7	10	8	5	2	6	3	4	1,		
$z =$	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5,		

$x =$	5	1	2,
$y =$	2	3	1,
$z =$	6	7	8.

14)

$x =$	1	2	3,
$y =$	6	4	2,
$z =$	5	6	7.

15) $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

16)

$x =$	1	6	11	16	21	26	31	36,
$y =$	8	7	6	5	4	3	2	1,
$z =$	7	8	9	10	11	12	13	14.

17) Aufl. unmöglich. 19) $x = 11n$, $y = 8n$.

20) $x = 17$, $y = 7$; allgemein $x = 17n$, $y = 7n$, wo n jede beliebige positive ganze Zahl bedeutet. 24) $x = 2 + 5n$, $y = 1 + 3n$. 25) $x = 7 + 11n$, $y = 3 + 17n$. 26) $x = 89 + 144n$, $y = 55 + 89n$. 27) $x = 1$, $y = 3$; allgemein $x = 1 + 7n$, $y = 3 + 2n$. 28) $x = 145$, $y = 203$; allgemein $x = 1102n + 145$, $y = 1533n + 203$. 29) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; $x = 0$, $y = 8$, $z = 8$. 30) $x = 1001$, $y = 276$, $z = 378$. 31) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$.

§ 78.

II. Zahlen-Kongruenzen*).

Zwei ganze Zahlen a und b, deren Differenz durch eine dritte ganze Zahl c ohne Rest teilbar ist, heißen nach Gauß **kongruent**; c selbst heißt der Modul. Jede der beiden Zahlen a und b heißt das **Residuum** der anderen. Das Zeichen der Kongruenz ist $a \equiv b \pmod{c}$, d. i. $(a - b) : c = n$, wo a,

*) Disquisitiones arithmeticae auctore D. Carolo Friderico Gauss. Lipsiae 1801. — Prinzipien der Arithmetik von Dr. Fr. Crelle. Hannover 1863. Grundlehren der Zahlentheorie von Gust. Krivan. Wien 1862. Zahlen-Kongruenzen von Fr. Anderle im Progr. des k. k. Gymnasiums in Znaim 1866.

b, c und n ganze Zahlen sind, und zwar a und b positive oder negative; z. B. $15 \equiv 7$ (mod 4), $-9 \equiv 16$ (mod 5). Das Residuum irgend einer ganzen Zahl a nach dem Modul m kann dargestellt werden unter der Form $a + km$, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Es ist also $a + km \equiv a$ ($mod\ m$).

1) Satz: Sind m aufeinander folgende Zahlen, a, $a + 1$, $a + 2 \ldots\ldots\ldots a + (m - 1)$, gegeben und eine andere Zahl A, so wird eine von jenen m Zahlen dieser Zahl A nach dem Modul m kongruent sein, und zwar nur eine. Warum?

Zusatz: Eine' jede Zahl hat in Bezug auf den Modul m sowohl in der Reihe $0, 1, 2 \ldots (m - 1)$, als auch in der Reihe $0, -1, -2 \ldots -(m - 1)$ ein Residuum; es giebt also zu einer jeden Zahl zwei kleinste Residuen. Welches ist in Bezug auf den Modul 13 das kleinste positive oder negative Residuum der Zahlen 37, 83, 117, 283?

2) Satz: Zwei Zahlen, nach demselben Modul einer dritten kongruent, sind auch unter sich kongruent. Warum?

3) Ist $A \equiv a$, $B \equiv b$ ($mod\ m$), so ist $A \pm B \equiv a \pm b$ ($mod\ m$); ferner: $Ak \equiv ak$, $AB \equiv ab$, $A^2 \equiv a^2$, $A^p \equiv a^p$ ($mod\ m$). Warum?

4) Zu beweisen, daß $a^p - b^p$ durch $a - b$ ohne Rest teilbar ist. (S. § 35, Nr. 15.)

Anleitung zum Beweise: $a \equiv b$ (mod [$a - b$]), also $a^p \equiv b^p$ (mod [$a - b$]).

Zusatz: Zu beweisen, daß $a^{2p} - b^{2p}$ und $a^{2p+1} + b^{2p+1}$ ohne Rest durch $a + b$ teilbar ist. (S. § 35, Nr. 16.)

5) Die Sätze über Teilbarkeit der Zahlen durch 9 und 11 mit Hülfe der Kongruenzen zu beweisen. (S. § 28, Nr. 13 ff.)

6) Die Neunerprobe und die Elferprobe bei der Multiplikation zweier Zahlen mit Hülfe der Kongruenzen zu beweisen. (S. § 28, Nr. 32 und 34.)

7) Wenn von den sieben Wochentagen Sonntag mit 1, Montag mit 2, Dienstag mit 3 u. s. w. bezeichnet wird und Januar 1. den Wochentag 1 hat, welchen Wochentag haben Februar 1., März 1. u. s. w. α) im Gemeinjahre, β) im Schaltjahre?

8) 1801 war der 1. Januar ein Donnerstag [also $\equiv 5$ (mod 7)]; welchen Wochentag haben 1802 Januar 1., Februar 1., November 1., Mai 24., December 25.?

9) Welchen Wochentag haben 1803, 1804, 1805, 1871 Januar 1., welchen 1806 Febr. 18., 1846 Juni 16., 1871 Juni 16.?

10) Der 1. Januar des Jahres 1 n. Chr. war ein Sonnabend; wie läßt sich hieraus der Wochentag des 28. Januar 814 (des Sterbetages Karls d. Gr.) berechnen? Antw.: Sonnabend.

11) Wenn g die goldene Zahl, s den Sonnenzirkel, r die Römerzinszahl eines Jahres n bedeutet, so ist:

$\alpha)\ n+1 \equiv g\ (mod\ 19),\ \beta)\ n+9 \equiv s\ (mod\ 28),\ \gamma)\ n+3 \equiv r\ (mod\ 15)$. Wie groß sind hiernach g, s und r für das Jahr 1871?

Antw.: 10, 4 und 14.

12) Die Kongruenz $ax \equiv b\ (mod\ m)$ aufzulösen.

Die Auflösung wird auf die Auflösung der unbestimmten Gleichung $ax - b = my$ zurückgeführt. Beispiele: $\alpha)$ $13x \equiv 5\ (mod\ 7)$, Aufl.: $x \equiv 2\ (mod\ 7)$; $\beta)$ $53x \equiv 8\ (mod\ 37)$, Aufl.: $x \equiv 19\ (mod\ 37)$.

13) Die kleinsten Residuen x und y zu bestimmen, wenn $\alpha)$ $7235^{1000} \equiv x\ (mod\ 7)$, $\beta)$ $387^{999} \equiv y\ (mod\ 23)$.

Antw.: $\alpha)$ $x = 4$; $\beta)$ $y = 10$.

§ 79.

Aufgaben als Anwendungen der diophantischen Gleichungen.

1) 71 in zwei Zahlen zu zerlegen, von denen die eine durch 5, die andere durch 8 ohne Rest sich teilen läßt.

2) 131 in zwei Teile zu zerlegen, so daß der eine Teil, durch 7 dividiert, zum Reste 3, und der andere, durch 11 dividiert, zum Reste 5 läßt.

3) Eine bestimmte Anzahl Flaschen Mosel- und Rheinwein hat 31 ℳ 40 ₰ gekostet. Jede Flasche Moselwein kostet 1 ℳ 20 ₰, jede Flasche Rheinwein 2 ℳ 60 ₰. Wieviel Flaschen von jeder Weinsorte waren es?

4) Jemand kauft 124 Stück Vieh, nämlich Schweine, Ziegen und Schafe, für 2400 ℳ. Ein Schwein kostet 27, eine Ziege 19 und ein Schaf $7\frac{1}{2}$ ℳ. Wieviel Stück von jeder Gattung sind es?

5) Jemand will eine Schuld von 198 ℳ 80 ₰ in Zwanzigfrankenstücken und in Dukaten bezahlen. Wieviel hat er von jeder Geldsorte nötig, wenn das Zwanzigfrankenstück zu 16 ℳ 25 ₰, der Dukaten zu 9 ℳ 45 ₰ gerechnet wird?

6) Jemand kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 282, für einen Ochsen aber 198 ℳ, und es findet sich, daß die Ochsen überhaupt 36 ℳ mehr gekostet haben, als die Pferde. Wieviel Ochsen und Pferde sind es gewesen?

7) Den Bruch $\frac{143}{117}$ in die Summe zweier Brüche zu verwandeln, deren Nenner 9 und 13 sind.

8) $\alpha)$ Die Peripherie eines Kreises kann man sowohl in 6, als auch in 5 gleiche Teile teilen. Wie bestimmt man mit Hülfe dieser Teile $\frac{1}{15}$ der Peripherie?

$\beta)$ Man ist imstande, die Peripherie eines Kreises mit Hülfe

einer elementar-geometrischen Konstruktion in 3, 5 und in 17*) gleiche Teile zu teilen. Wie bestimmt man mit Hülfe dieser Teile $\frac{1}{51}$, $\frac{1}{85}$ und $\frac{1}{255}$ der Peripherie eines Kreises?

9) In einer dreizifferigen Zahl beträgt die Ziffer auf der äußersten Stelle links den achten Teil der aus den beiden anderen Ziffern gebildeten Zahl und die Ziffer auf der äußersten Stelle rechts ebenfalls den achten Teil der aus den beiden anderen Ziffern gebildeten Zahl. Wie heißt die dreizifferige Zahl?

10) Hätte ich 8mal soviel Eier, als ich jetzt habe, spricht eine Bäuerin zur anderen, und du 7mal soviel, als du jetzt hast, und gäbe ich dir alsdann ein Ei, so hätten wir beide gleichviel Eier. Wieviel Eier hatte jede der Bäuerinnen?

11) Jemand will einem Kaufmanne eine Schuld von 131 ℳ 20 ₰ bezahlen. Der erste hat nur Zwanzigfrankenstücke zu 16 ℳ 20 ₰, der andere nur Dukaten zu 9 ℳ 40 ₰. Wieviel Zwanzigfrankenstücke hat der Schuldner dem Kaufmann zu bezahlen, und wieviel Dukaten hat der Kaufmann dem Schuldner zurückzugeben?

12) Ein gezahntes Rad mit 17 Zähnen greift in die Zahnlücken eines anderen Rades von 13 Zähnen ein. Wieviel Umdrehungen wird jedes der Räder machen müssen, bis jeder Zahn des ersten Rades wieder in dieselben Zahnlücken des zweiten Rades eingreift?

13) Die Zähne eines gezahnten Rades, welches mit einem anderen in Verbindung steht, sind der Ordnung nach mit den Zahlen 1, 2, 3 bis 35 bezeichnet; ebenso sind die Zahnlücken des zweiten Rades nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3 bis 47 bezeichnet. Wenn nun der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweiten Rades eingreift, wieviel Umdrehungen wird jedes der Räder gemacht haben, wenn der erste Zahn des ersten Rades in die achte Zahnlücke des zweiten Rades eingreift?

14) Wenn ein gezahntes Rad 27, ein anderes 35 Zähne hat, wird alsdann nach und nach jeder Zahn des ersten Rades in jede Zahnlücke des zweiten Rades kommen? Wird dieses auch geschehen, wenn das erste Rad 28, das zweite 35 Zähne hat? Von welcher Art muß die Anzahl der Zähne bei zwei ineinander greifenden Rädern sein, wenn alle Zähne des einen nach und nach in alle Zahnlücken des anderen Rades gelangen sollen?

---

*) Der berühmte Mathematiker Gauß zeigte zuerst in dem 1801 erschienenen Werke: »Disquisitiones arithmeticae« (VII., 353), daß ein reguläres Vieleck von siebzehn Seiten, oder überhaupt von $2^n + 1$ Seiten blos mit Hülfe einer geraden Linie und eines Kreises sich konstruieren lasse, wenn $2^n + 1$ eine Primzahl ist, also auch ein Vieleck von 257 Seiten. Ueber die Konstruktion des reg. Siebzehnecks sehe man Heis, Lehrbuch der Trigonometrie VIII., 132

15) Welche Zahl giebt, durch 4 dividiert, 1, und durch 5 dividiert, 3 zum Reste?

16) Welche Zahl giebt, durch 37 dividiert, 11, und durch 10 dividiert, 0 zum Reste?

17) Welche Zahl läßt, durch 3, 5 und 7 dividiert, nach der Reihe die Reste 2, 2 und 5?*)

18) Welche Zahl läßt, durch 4, 10 und 24 dividiert, nacheinander die Reste 1, 7 und 9?

19) Welche Zahl giebt, durch 3, 5, 7 und 11 dividiert, die Reste 1, 4, 1 und 9?

20) Ein Gärtner hat weniger als 1000 Stück Bäume. Pflanzt er dieselben in Reihen, so daß in jede Reihe 37 kommen, so bleiben ihm 8 Stück übrig; pflanzt er sie aber in Reihen, so daß in jede Reihe 43 kommen, so bleiben ihm 11 Stück übrig. Wieviel Bäume sind es?

21) Welche Zahl giebt, durch 28 dividiert, den Rest 20, durch 19 dividiert, den Rest 12, und, durch 15 dividiert, den Rest 10?

22) Unter goldener Zahl eines Jahres versteht man den Rest, den die um 1 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 19 übrig läßt; unter Sonnenzirkel versteht man den Rest, den die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 übrig läßt; und unter Römer-Zinszahl den Rest, den die um 3 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 15 übrig läßt. Welches Jahr hat nun zur goldenen Zahl 14, zum Sonnenzirkel 26 und zur Römer-Zinszahl 10?

23) Welches Jahr nach oder vor Christi Geburt hat zur goldenen Zahl 19, zum Sonnenzirkel 28, zur Römer-Zinszahl 15?**)

24) Man soll 17 in drei ganze Zahlen zerlegen, die so beschaffen sind, daß, wenn man die erste mit 5, die zweite mit 4 und die dritte mit 7 multipliziert, die Summe dieser drei Produkte 80 sei. Wie heißen die Zahlen?

25) Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück, verkauft eine Gans für 3 *M*, zwei Hühner für 3,15 *M*, eine Ente für 1,05 *M* und eine Taube für 60 ₰ und hat insgesamt 106,05 *M* daraus gelöst. Wieviel Stück hat sie von jeder Gattung?

26) Ein Münzmeister hat dreierlei Silber: das erste hat den Gehalt 500, das zweite den Gehalt 900, das dritte den Gehalt 700. Nun braucht er 20 *kg* von dem Gehalte 780; wie viel ganze Kilogramm Silber muß er von jeder Sorte nehmen? (S. die Bemerkung zu § 63, Nr. 216.)

---

*) Matthiessen, Über das Restproblem. Crelle's Journ. 91. Bd. S. 254.

**) Diese Aufgabe findet ihre Anwendung in der Chronologie. Auf die Auflösung derselben stützt sich die Bestimmung des Anfanges der von Joseph Scaliger eingeführten Julianischen Periode, welche einen Zeitraum von $19 \cdot 28 \cdot 15 = 7980$ Jahren umfaßt.

27) Dreißig Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehrten zusammen für 232 *M*; ein Mann bezahlte 14 *M*, eine Frau $5\frac{1}{2}$ *M* und ein Kind 1 *M*. Wieviel Männer, Frauen und Kinder waren es?

28) α) Einer alten chinesischen Arithmetik, Ta yen lei schu benannt*), welche 717 nach Chr. von Yih Hing verfaßt sein soll, ist folgendes Beispiel entnommen: Es wird angezeigt, daß 3 Reisfässer, deren jedes gleichviel Reis enthält, von Dieben zum Teil geleert worden sind. Man wußte nicht, wieviel Reis im ganzen sich darin befand, jedoch weniger als 1000 Ho (chinesisches kleines Maß), aber es ergab sich, daß in dem einen Fasse noch 1 Ho übrig gelassen war, in dem zweiten noch 11 Ho und in dem dritten noch 1 Ho. Als man der Diebe habhaft wurde, gestand A, daß er mit einer Schaufel mehrere Male aus dem ersten Fasse den Reis in einen Sack gefüllt habe; B, daß er in der Eile einen hölzernen Schuh ergriffen und diesen mehrere Male aus dem zweiten Fasse voll geschöpft, und C, daß er eine Schüssel mehrere Male aus dem dritten Fasse gefüllt habe. Diese drei Gefäße, deren sich die Diebe bedienten, sind zur Stelle und es ergiebt sich, daß die Schaufel 11 Ho, der Holzschuh 17 Ho und die Schüssel 12 Ho enthalten. Wieviel Reis befand sich in jedem Fasse?

β) In einer Rechnung steht der folgende Posten: • 1 *kg* à 2, • 8 *M* = • 98,38 *M*. Da, wo • steht, ist die Ziffer undeutlich und verwischt. Wie heißen die verwischten Ziffern?

29) α) Zwei ganze Zahlen zu suchen, deren Summe und Produkt zusammen 191 ausmachen. β) Zwei ganze Zahlen anzugeben, deren Produkt das sechsfache ihrer Summe ist.

30) Zwei positive ganze Zahlen zu suchen, α) deren Differenz, β) deren Summe ihrem Quotienten gleich ist.

31) Zwei ganze positive Zahlen zu suchen, deren Summe dem 24fachen der Summe ihrer reciproken Werte gleich ist.

32) Einen Bruch von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man entweder 1 zu demselben addiert, oder auch 1 davon subtrahiert, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

33) Einen Bruch von solcher Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man denselben entweder zu 1 addiert, oder von 1 subtrahiert, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

34) Drei ganze Zahlen anzugeben, so daß die Summe der Quadrate der beiden ersten dem Quadrate der dritten Zahl gleich ist.

Bemerkung. Eine der beiden ersten ganzen Zahlen ist immer durch 3, und eine der drei Zahlen durch 5 teilbar. Warum?

34) Die Summe zweier Quadrate $a^2 + b^2$ in die Summe zweier anderen Quadrate zu verwandeln.

*) Biernatzki, über die Arithmetik der Chinesen, in Crelle's Journ. 52. Bd. S. 76.

36) Welchen Wert kann man der unbestimmten Größe x beilegen, wenn die Formel $a^2x^2 + b$ ein vollkommenes Quadrat werden soll?

37) Wenn a und b Rationalzahlen sind, welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, wenn die Formel $a^2x^2 + by^2$ ein vollkommenes Quadrat sein soll?

38) Welchen Wert kann man für x annehmen, wenn $a^2x^2 + bx + c$ ein vollkommenes Quadrat werden soll?

39) Wenn a, b und c drei Rationalzahlen bedeuten, welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, damit die Formel $a^2x^2 + bxy + cy^2$ ein vollkommenes Quadrat werde?

40) Welchen Wert kann man der x geben, um die Formel $ax^2 + bx + c^2$ zu einem vollkommenen Quadrate zu machen?

41) Zwei Zahlen zu finden von der Beschaffenheit: α) daß ihre Summe gleich der Summe ihrer Kubikzahlen; β) daß ihr Unterschied gleich dem Unterschiede ihrer Kubikzahlen werde.

42) Für welche ganze Zahlen ist: $xy = 2u$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$?

43) Man soll zwei ganze Zahlen x und y finden, von der Beschaffenheit, daß das harmonische Mittel (s. § 63, 201 β) zwischen ihnen einer gegebenen ganzen Zahl n gleich werde.

44) Für welche ganze oder gebrochene Zahlen ist $x^y = y^x$?

§ 80.

Auflösung der Aufgaben in § 79.

1) 15 und 56, oder 55 und 16. 2) 115 und 16, oder 38 und 93. 3) 24 Flaschen Mosel- und 1 Flasche Rheinwein, oder 11 Fl. Mosel- und 7 Fl. Rheinwein. 4) 17, 99, 8; oder 40, 60, 24; oder 63, 21, 40. 5) 7 Fünffrankenstücke und 9 Dukaten.

6) Die Anzahl der Ochsen $13 + 47n$, die der Pferde $9 + 33n$, wo n jede beliebige positive ganze Zahl bedeutet. 7) $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{13}$.

8) α) Heißt die Peripherie des Kreises p, so ist $\frac{1}{15}p = \frac{2}{5}p - \frac{2}{6}p$, oder $\frac{1}{15}p = \frac{4}{6}p - \frac{3}{5}p$; β) heißt die Peripherie des Kreises p, so ist: $\frac{1}{85}p = \frac{7}{17}p - \frac{2}{5}p$, oder auch $= \frac{3}{5}p - \frac{10}{17}p$; $\frac{1}{51}p = \frac{6}{17}p - \frac{1}{3}p$, oder auch $= \frac{2}{3}p - \frac{11}{17}p$; endlich ist $\frac{1}{255}p = \frac{8}{17}p + \frac{1}{3}p - \frac{4}{5}p$, oder $= \frac{1}{3}p + \frac{1}{5}p - \frac{9}{17}p$, oder $\frac{8}{17}p + \frac{1}{5}p - \frac{2}{3}p$.

9) Entweder 324 oder 648. Stellt man die Aufgabe allgemein, indem man n statt 8 nimmt, so ergiebt sich nach einigen leichten Untersuchungen, daß nur noch für $n = 11$ die Lösung der Aufgabe möglich ist. Man erhält nämlich, wenn man 000 unberücksichtigt läßt, die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999.

10) Die eine 2, 9, 16, oder überhaupt $2 + 7n$; die andere 2, 10, 18, oder überhaupt $2 + 8n$. 11) Der Schuldner giebt 11 Zwanzigfrankenstücke und erhält 5 Dukaten zurück.

12) Nach 13 Umdrehungen des ersten oder 17 Umdrehungen des zweiten Rades; überhaupt nach $13n$ Umdrehungen des ersten oder $17n$ Umdrehungen des zweiten Rades. 13) Das erste 19, das zweite 14; überhaupt das erste $19 + 47n$, das zweite $14 + 35n$.

14) Die Zahl der Zähne des einen und die der Zähne des andern Rades müssen relative Primzahlen sein.

15) Jede Zahl von der Form $13 + 20n$. 16) Jede Zahl von der Form $270 + 370n$. 17) $47 + 105n$. 18) $57 + 120n$.

19) $64 + 1155n$. 20) 785. 21) $1000 + 7980n$. 22) 1837.

23) Das Jahr 3267 nach Christi Geburt, und das Jahr 4714 chronologisch oder 4713 astronomisch vor Christi Geburt.

24) $x = 9, 6, 3$; $y = 7, 9, 11$; $z = 1, 2, 3$.

25) Heißt die Anzahl der Gänse x, die der Hühner y, die der Enten z, die der Tauben u, so erhält man $x = m$, $y = 2 - 2m + 6n$, $z = 130 - (m + 13n)$, $u = 2m + 7n - 56$, wo m und n ganze positive Zahlen bedeuten und so zu nehmen sind, daß $m + 13n < 130$, $2m + 7n > 56$ und $m - 3n < 1$. Die möglichen Werte für n und m sind: 1) $n = 5$, $m = 11$ bis 15; 2) $n = 6$, $m = 8$ bis 18; 3) $n = 7$, $m = 4$ bis 21; 4) $n = 8$, $m = 1$ bis 24; 5) $n = 9$, $m = 1$ bis 12. Hieraus ergeben sich für x, y, z und u 70 voneinander verschiedene Werte: 1) 11 Gänse, 10 Hühner, 54 Enten, 1 Taube; 2) 12 Gänse, 8 Hühner, 53 Enten, 3 Tauben; 3) 13 Gänse, 6 Hühner, 52 Enten, 5 Tauben; 4) 14 Gänse, 4 Hühner, 51 Enten, 7 Tauben; 5) 15 Gänse, 2 Hühner, 50 Enten, 9 Tauben; u. s. w.

26) 1) 1, 9, 10; 2) 2, 10, 8; 3) 3, 11, 6; 4) 4, 12, 4; 5) 5, 13, 2. 27) 10 Männer, 16 Frauen und 4 Kinder.

28) α) 793 Ho; β) 91 kg à 2,18 M = 198,38 M.

29) α) 1 und 95, 2 und 63, 3 und 47, 5 und 31, 7 und 23, 11 und 15; β) 7 und 42, 8 und 24, 9 und 18, 10 und 15, 12 und 12.

30) α) 4 und 2 sind die einzigen ganzen Zahlen; β) Auflösung nicht möglich. 31) 1 und 24, 2 und 12, 3 und 8, 4 und 6.

32) Der gesuchte Bruch ist von der Form $(q^4 + 4) : [4q^2]$, wo für q beliebige ganze oder gebrochene Zahlen gesetzt werden können. Beispiele sind: $\frac{5}{4}$, $\frac{65}{16}$, $\frac{85}{36}$ u. s. w.

33) Der gesuchte Bruch ist von der Form $4n(n^2 - 1) : (n^2 + 1)^2$, wo für n beliebige ganze Zahlen oder unechte Brüche gesetzt werden können. Beispiele sind: $\frac{24}{25}$, $\frac{120}{169}$ u. s. w.

34) 3, 4 und 5; 5, 12 und 13; 8, 15 und 17; 7, 24 und 25; 20, 21 und 29; 9, 40 und 41; 12, 35 und 37; 11, 60 und 61; 28, 45 und 53; 33, 56 und 65 u. s. w. Bezeichnen p und q zwei willkürliche ganze Zahlen, so sind die verlangten Zahlen: $p^2 - q^2$, $2pq$ und $p^2 + q^2$, oder $n(p^2 - q^2)$, $2npq$, $n(p^2 + q^2)$.

35) Das eine Quadrat ist $\left(\frac{2an + b(n^2 - 1)}{n^2 + 1}\right)^2$, das andere $\left(\frac{2bn - a(n^2 - 1)}{n^2 + 1}\right)^2$, wo n eine beliebige rationale Zahl bezeichnet.

Zusatz. Allgemein ist: $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

36) $x = (b - m^2) : (2am)$. 37) $y = 2anx : (b - n^2)$, wo für x und n beliebige Rationalzahlen gesetzt werden können.

38) $x = (c - n^2) : (2an - b)$.

39 $x = m(n^2 - c)$, $y = m(b - 2an)$. 40) $x = \frac{2nc - b}{a - n^2}$.

41) $\alpha)\ \frac{2n-1}{n^2-n+1}$ u. $\frac{n^2-1}{n^2-n+1}$; $\beta)\ \frac{2n+1}{n^2+n+1}$ u. $\frac{n^2-1}{n^2+n+1}$.

42) $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $u = 6$.

43) Es muß (§ 64, 201 β) $n(x + y) = 2xy$ sein. Setzt man $y = kn$, so wird $x = \frac{k}{2k-1}n$. Die Auflösungen werden ganzzahlig, für $2k - 1 = \frac{q}{p}$, wo q und p Teiler von n sind, ausgenommen wenn der eine von ihnen den Faktor 2 ebenso oft enthält, als n selbst und der andere ungerade ist. Außerdem ist der Bruch $\frac{q}{p}$ immer auf die kleinste Form zu bringen. Man erhält $y = \frac{p+q}{2p}n$, $x = \frac{p+q}{2q}n$. Beispiel: $n = 105$; zusammengehörige Werte sind:
$x =$ 53, 54, 56, 57, 60, 63, 65, 70, 75, 77, 84, 90;
$y =$ 5565, 1890, 840, 665, 420, 315, 273, 210, 175, 165, 140, 126.

44) Setzt man $y = mx$, so wird $x = \sqrt[m-1]{m}$, $y = m\sqrt[m-1]{m}$. Für m gleich 1 wird $x = y$; für $m = 2$ erhält man $x = 2$, $y = 4$. Für alle übrigen in ganzen Zahlen ausgedrückten Werte von m erhält man für x und y keine in ganzen Zahlen ausgedrückten Werte; für $m = 3$ zum Beispiel erhält man: $1{,}73205^{5{,}19615} = 5{,}19615^{1{,}73205}$. Setzt man aber $m = 1 + \frac{1}{n}$, so ist $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Beispiele: $x_1 = \frac{9}{4}$, $y_1 = \frac{27}{8}$; $x_2 = \frac{64}{27}$, $y_2 = \frac{256}{81}$; $x_3 = \frac{625}{256}$, $y_3 = \frac{3125}{1024}$ u. s. w.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen, Kettenbrüche und Teilbruchreihen.

A. Progressionen.

§ 81.

1) Arithmetische Progressionen.

Das Anfangsglied heiße a, das Endglied t, der Stellenzeiger, Index (Anzahl der Glieder), n*), die Differenz d und die Summe aller Glieder s.

$$\text{I.} \quad t = a + (n - 1)d.$$
$$\text{II.} \quad s = \tfrac{1}{2}n(a + t) = \tfrac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]^{**}).$$

1) Was versteht man unter einer arithmetischen Progression oder Reihe?***)

2) Was versteht man unter einer zunehmenden, was unter einer abnehmenden arithmetischen Progression?

3) α) Wie heißt die Summe der ersten 1000 Zahlen? β) Wie groß ist die Summe einer arithmetischen Reihe, wenn das erste Glied 6, das letzte 2833 und die Anzahl der Glieder 38 ist? Aufl.: α) 500500; β) 53941.

4) t und s zu bestimmen, wenn $a = 17$, $d = 5\frac{1}{2}$ und $n = 79$. Aufl.: $t = 446$, $s = 18\,288\frac{1}{2}$.

5) Ebenso t und s, wenn α) $a = 29\frac{3}{4}$, $d = 7\frac{1}{4}$ und $n = 711$; β) $a = -151\frac{1}{3}$, $d = 1\frac{5}{6}$ und $n = 53$. Aufl.: α) $t = 5177\frac{1}{4}$; $s = 1\,851\,088\frac{1}{2}$; β) $t = -56$, $s = -5494\frac{1}{3}$.

6) t und s zu bestimmen, wenn α) $a = 28\frac{1}{2}$, $d = -5\frac{3}{7}$ und $n = 47$; β) $a = -7\frac{3}{4}$, $d = -\frac{5}{12}$ und $n = 73$.
Aufl.: α) $t = -221\frac{3}{14}$, $s = -4528\frac{11}{14}$;
β) $t = -37\frac{3}{4}$, $s = -1660\frac{3}{4}$.

---

*) Von einer negativen Anzahl der Glieder kann man wohl nicht sprechen; betrachtet man aber die Reihe:

$$\overset{-n}{a - (n + 1)d},\ \overset{-(n-1)}{a - nd},\ \ldots \overset{-1}{a - 2d},\ \overset{0}{a - d},\ \overset{1}{a},\ \overset{2}{a + d},\ \ldots \overset{n}{a + (n - 1)d},$$

und betrachtet man das Glied a als das Anfangsglied mit dem Stellenzeiger 1, so erhält $a + d$ den Stellenzeiger 2, $a + 2d$ den Stellenzeiger 3, $a + (n - 1)d$ den Stellenzeiger n. Rückwärts gerechnet hat $a - d$ den Stellenzeiger 0, $a - 2d$ den Stellenzeiger -1, $a - 3d$ den Stellenzeiger -2 u. s. w., $a - (n + 1)d$ den Stellenzeiger $-n$. Vom ersten Gliede bis zum Gliede mit dem Stellenzeiger n (eingeschlossen) sind n Glieder, vom Anfangsgliede bis zum Gliede mit dem Stellenzeiger $-n$ (eingeschlossen) sind dagegen $n + 2$ Glieder.

**) Diese Formel heißt die Summenformel oder das summatorische Glied der arithmetischen Progression.

***) Die Franzosen nennen die arithmetischen Reihen auch Progressions par différence, sowie die geometrischen Progressions par quotient.

7) t zu bestimmen, wenn entweder 1) a, d und n, oder 2) a, d und s, oder 3) a, n und s, oder 4) d, n und s gegeben sind.
Aufl.: 1) $a + (n - 1)d$; 2) $-\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2ds + (a - \frac{1}{2}d)^2}$;
3) $(2s : n) - a$; 4) $(s : n) + \frac{1}{2}(n - 1)d$.

8) s zu bestimmen, wenn entweder 1) a, d und n, oder 2) a, d und t, oder 3) a, n und t, oder 4) d, n und t gegeben sind.
Aufl.: 1) $\frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$; 2) $\frac{1}{2}(t + a)[d + t - a] : d$;
3) $\frac{1}{2}n(a + t)$; 4) $\frac{1}{2}n[2t - (n - 1)d]$.

9) d zu bestimmen, wenn entweder 1) a, n und t, oder 2) a, n und s, oder 3) a, t und s, oder 4) n, t und s gegeben sind.
Aufl.: 1) $(t - a) : (n - 1)$; 2) $2(s - an) : [n(n - 1)]$;
3) $(t + a)(t - a) : (2s - t - a)$; 4) $2(nt - s) : [n(n - 1)]$.

10) n zu bestimmen, wenn entweder 1) a, d und t, oder 2) a, d und s, oder 3) a, t und s, oder 4) d, t und s gegeben sind.
Aufl.: 1) $(t - a) : d + 1$; 1) $[-2a + d \pm \sqrt{8sd + (2a - d)^2}] : (2d)$;
3) $2s : (a + t)$; 4) $[2t + d \pm \sqrt{(2t + d)^2 - 8sd}] : (2d)$.

11) a zu bestimmen, wenn entweder 1) d, n und t, oder 2) d, n und s, oder 3) d, t und s, oder 4) n, t und s bekannt sind.
Aufl.: 1) $t - (n - 1)d$; 2) $(s : n) - \frac{1}{2}(n - 1)d$;
3) $\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(t + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds}$; 4) $(2s : n) - t$.

12) α) Wie groß ist das Anfangsglied und die Summe der Glieder, wenn das letzte Glied 24, die Differenz $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 22 ist? β) Wie heißt das letzte Glied und die Anzahl der Glieder einer Progression, wenn das erste Glied -6, die Differenz $\frac{3}{4}$ und die Summe der Glieder $146\frac{1}{4}$ ist?
Aufl.: α) $a = 9$, $s = 363$; β) $t = 15\frac{3}{4}$, $n = 30$.

Bemerkung. Die beiden anderen Werte, welche sich aus der Gleichung ergeben, $t = -16\frac{1}{2}$ und $n = -13$, sind zu verwerfen. Nimmt man Rücksicht auf die Bedeutung negativer Stellenzeiger, indem man von -6 mit der Differenz $\frac{3}{4}$ rückwärts geht, so erhält man die Glieder: $-16\frac{1}{2}$, $-15\frac{3}{4}$, -15, $-14\frac{1}{4}$, $-13\frac{1}{2}$, $-12\frac{3}{4}$, -12, $-11\frac{1}{4}$, $-10\frac{1}{2}$, $-9\frac{3}{4}$, -9, $-8\frac{1}{4}$, $-7\frac{1}{2}$, $-6\frac{3}{4}$, -6, deren Summe offenbar nicht $146\frac{1}{4}$ ist, obgleich dennoch auf diese Reihe die Summationsformel $s = \frac{1}{2}n(a + t)$ paßt, wenn $n = -13$, $a = -6$, $t = -16\frac{1}{2}$ gesetzt wird; es ist nämlich: $\frac{1}{2}(-13)(-22\frac{1}{2}) = +146\frac{1}{4}$.

13) Die Anzahl und die Summe der Glieder zu finden, wenn das erste Glied $= -\frac{3}{4}$, die Differenz $= -\frac{7}{8}$ und das letzte Glied $= -21\frac{3}{4}$ ist. Aufl.: $n = 25$, $s = -281\frac{1}{4}$.

14) Die Differenz der Glieder und das letzte Glied zu finden, wenn das erste Glied $= 8\frac{1}{4}$, die Anzahl der Glieder $= 147$ und die Summe der Glieder $= 15\,967\frac{7}{8}$. A.: $d = 1\frac{3}{8}$, $t = 209$.

15) Die Anzahl der Glieder und das Anfangsglied zu finden, wenn die Differenz der Glieder $= 0{,}27$, das letzte Glied $= 18{,}53$ und die Summe der Glieder $= 628{,}43$.
Aufl.: $n_1 = 58$, $a_1 = 3{,}14$ oder $n_2 = 80\frac{7}{27}$, $a_2 = -2{,}87$. Letztere Werte sind nicht brauchbar, indem der Bruch $\frac{7}{27}$ sich nicht deuten läßt.

16) Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen?
Antw.: n^2.

17) α) Das Anfangs- und das Endglied einer arithmetischen Progression zu finden, wenn die Differenz $8\frac{2}{3}$, die Anzahl der Glieder 58 und die Summe der Glieder $14026\frac{1}{3}$ ist.
Aufl.: $a = -5\frac{1}{6}$, $t = 488\frac{5}{6}$.

β) Das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe sei 5, das Endglied 23, die Summe 392. Wie groß ist die Anzahl der Glieder, wie groß die Differenz? Aufl.: $n = 28$, $d = \frac{2}{3}$.

18) α) Das 7te Glied einer arithmetischen Progression ist -6, das 37te $15\frac{3}{4}$, die Anzahl der Glieder 55. Wie groß ist die Differenz, das Anfangsglied, das Endglied, die Summe aller Glieder?
Aufl.: $d = \frac{29}{40}$, $a = -10\frac{7}{20}$, $t = 28\frac{4}{5}$, $s = 507\frac{3}{8}$.

β) Das $p$te Glied einer arithmetischen Progression ist r, das $q$te Glied u und die Anzahl der Glieder n. Wie groß ist die Differenz, wie groß ist die Summe der Glieder, wie groß das erste, wie groß das letzte Glied?

Aufl.: $d = \frac{u-r}{q-p}$, $\quad s = \frac{2(qr - pu) + (n+1)(u-r)}{q-p} \cdot \frac{n}{2}$,

$a = \frac{r(q-1) - u(p-1)}{q-p}$, $\quad t = \frac{u(n-p) - r(n-q)}{q-p}$.

19) α) Zwischen 7 und 13 sollen 8 Glieder so eingeschaltet (interpoliert) werden, daß eine arithmetische Reihe gebildet wird. Wie heißen die eingeschalteten Glieder?
Antw.: $7\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, 9, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{1}{3}$, 11, $11\frac{2}{3}$, $12\frac{1}{3}$.

β) Zwischen a und b sollen n Glieder einer arithmetischen Reihe interpoliert werden; wie heißt das $r$te der eingeschalteten Glieder?
Aufl.: $a + r\,[(b - a) : (n + 1)]$.

20) Das 19te Glied einer Progression nebst dem 43sten, nebst dem 57sten Gliede macht zusammen 827, das 27ste Glied nebst dem 58sten, nebst dem 69sten, nebst dem 73sten macht zusammen 1581. Wie heißt das erste Glied, wie die Differenz der Progression?
Aufl.: $a = 5$, $d = 7$.

21) Von zwei arithmetischen Reihen, welche gleiche Anfangsglieder besitzen, hat die erste zum letzten Gliede 39 und zur Summe aller Glieder 207, die zweite zum letzten Gliede 124, zur Summe 917. Wie groß ist bei beiden Reihen die Anzahl der Glieder? (Diophantische Gleichung.) Antw.: 9 und 14; $a = 7$.

22) Von zwei arithmetischen Reihen, welche gleiche Endglieder besitzen, hat die eine zum Anfangsgliede 9 und zur Summe 25, die andere zum Anfangsgliede 8 und zur Summe 36. Wie groß ist in beiden Reihen die Anzahl der Glieder? (Diophantische Gleichung.)
Aufl.: Entweder ist die Anzahl der Glieder der ersten Reihe 2 und die der zweiten Reihe 3, oder die Anzahl der Glieder in beiden Reihen ist 5 und 8, oder 10 und 18, oder 14 und 28, oder 20 und 48, oder 25 und 72, oder 26 und 78, oder 30 und 108 u. s. w. Im ersten Falle heißen die Reihen selbst 9, 16 und 8, 12, 16; im zweiten Falle 9, 7, 5, 3, 1 und 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1; im dritten Falle 9, $7\frac{5}{9}$, $6\frac{1}{9}$, $4\frac{2}{3}$, $3\frac{2}{9}$, $1\frac{7}{9}$, $\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{9}$, $-2\frac{5}{9}$. -4 und 8, $7\frac{5}{17}$, $6\frac{10}{17}$ . . . . , $-3\frac{5}{17}$, -4.

23) Mehrere Zahlen bilden eine harmonische Progression, wenn ihre reciproken Werte eine arithmetische Progression bilden. Die Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{14}$, ebenso die Zahlen $1\frac{7}{9}$, $2\frac{2}{7}$, $3\frac{1}{5}$, $5\frac{1}{3}$, 16 bilden eine harmonische Progression. Es soll α) zwischen die beiden Zahlen 3 und 9, β) zwischen die Zahlen a und b ein harmonisches Glied eingeschaltet werden; ferner sollen γ) zwischen die Zahlen $2\frac{1}{2}$ und $5\frac{3}{4}$ und δ) zwischen m und n zwei, drei oder vier harmonische Glieder eingeschaltet werden.

§ 82.

Aufgaben als Anwendungen der arithmetischen Progressionen.

1) α) Ich habe gerade soviel Nüsse, um daraus ein volles gleichseitiges Dreieck bilden zu können. Nun gewinne ich noch ebensoviel dazu und versuche aus allen ein volles Quadrat zu bilden, welches in einer Seite ebensoviel Nüsse hat, als zuvor in der Seite des Dreiecks enthalten waren, finde aber, daß mir noch 20 Nüsse übrig bleiben. Wieviel Nüsse hatte ich anfangs?

β) Ein Herr mietet einen Bedienten und verspricht ihm an Lohn für das erste Jahr nur 105 *M*, für jedes folgende Jahr aber immer 5 *M* mehr, als für das vorhergehende. Wieviel wird der Bediente das 11te Jahr nach dem Antritte seines Dienstes und wieviel für alle 11 Jahre überhaupt erhalten?

Aufl.: α) 210; β) für das 11te Jahr 155 *M*, für alle 11 Jahre zusammen 1430 *M*.

2) Einen artesischen Brunnen von 500 *m* Tiefe zu bohren, zahlt man für den ersten Meter 3,24 *M*, für jeden folgenden 5 *ℌ* mehr. Wieviel zahlt man für den letzten Meter? wieviel für den ganzen Brunnen?

Antw.: Für den letzten Meter 28 *M* 19 *ℌ*, für den ganzen Brunnen 7857 *M* 50 *ℌ*.

3) Es setzt jemand 1 *Fl* in die Lotterie, und weil er nicht gewinnt, so setzt er das zweite Mal 2 *Fl*, das dritte Mal 3 *Fl* und so immer einen Gulden mehr. Wenn nun die Lotterie den Einsatz des Gewinnenden 14fach bezahlt, so fragt es sich: bei welchem Spiele erhält er all sein eingesetztes Geld durch einen einzigen Treffer zurück? Antw.: Beim 27sten Spiele.

4) Die Chronik von Nürnberg berichtet vom Jahre 1541 bei Gelegenheit der Anwesenheit Kaiser Karls V. folgendes: „Am 17. Februar schenkte man der Röm. Kais. Majestät einen gulden Scheuren (einen großen Becher), darinnen hundert Stück Guldes waren, also daß das erste einen Goldgulden, das andere zween, das dritte drei, und also fort hinaus bis auf das hundertste, welches hundert Goldgulden galt.“ Wieviel Goldgulden machten diese an Wert zusammen? Antw.: 5050.

5) Wenn 8600 *M* zu $4\frac{1}{2}$ Prozent auf einfache Zinsen ausgethan und am Ende jeden Jahres 200 *M* zugelegt werden, wieviel betragen die Zinsen in 17 Jahren zusammen?
Antw.: 7803 *M*.

6) Bei einem Wettrennen wurden die Prämien für die Reiter so bestimmt, daß jeder folgende 45 *M* weniger erhielt, als der vorhergehende. Der erste erhielt 360, und alle übrigen zusammen 990 *M*. Wieviel Reiter waren es? Antw.: 5.

7) Nach einem Gesetze der Physik durchfällt ein Körper, abgesehen von dem Widerstande der Luft, in der ersten Sekunde 4,904 *m*, in der zweiten 9,808 *m* mehr u. s. w., in jeder folgenden Sekunde 9,808 *m* mehr, als in der vorhergehenden. In wieviel Sekunden wird ein Körper einen Raum von 397,224 *m* durchfallen?
Antw.: In 9 Sekunden.

8) Nach einem Gesetze der Physik nimmt die Geschwindigkeit eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers immerfort ab, und zwar beträgt die Abnahme am Ende der ersten Sekunde 9,808, am Ende der zweiten Sekunde $2 \cdot 9{,}808$ u. s. w., der $n$ten Sekunde $n \cdot 9{,}808$ *m*. Während der ersten Sekunde legt der steigende Körper 4,904 *m* weniger zurück, als er zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft nicht auf denselben wirkte, in jeder folgenden Sekunde aber 9,808 *m* weniger, als in der vorhergehenden. Wenn nun ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit von 313,856 *m* senkrecht in die Höhe geworfen wird, wie lange und wie hoch wird er steigen und nach wieviel Sekunden wieder den Boden erreichen?
Antw.: Er wird 32 Sekunden lang steigen, eine Höhe von 5021,696 *m* erreichen und nach 32 Sekunden wieder am Boden anlangen.

9) Ein Körper fällt von einer Höhe herab; zu gleicher Zeit wird ein anderer Körper von einem Punkte, der 795 *m* in vertikaler Richtung unter jenem liegt, senkrecht in die Höhe geschossen. Wenn nun der letztere eine anfängliche Geschwindigkeit von 318 *m* hat, nach wieviel Sekunden werden beide zusammenstoßen? Antw. Nach $2\frac{1}{2}$ Sek.

10) Von zwei Städten, welche um 165 engl. Meilen voneinander entfernt sind, brechen gleichzeitig A und B gegeneinander auf, um sich zu begegnen. A macht den ersten Tag 1 Meile, den zweiten Tag 2 Meilen u. s. w.; B legt den ersten Tag 20, den zweiten Tag 18, den dritten Tag 16 Meilen u. s. w. zurück. Wann werden sie sich begegnen? Antw.: Nach 10 Tagen.

11) Unter 28 Soldaten, die eine Schanze zuerst erstürmt haben, soll eine Summe Geldes so verteilt werden, daß jeder folgende immer gleichviel weniger erhält, als der vorhergehende, und es erhalten der fünfte und der zwölfte Mann zusammen 30 *M*, und der sechzehnte und der siebente zusammen 27 *M*. Wieviel erhält jeder von diesen besonders, und wie groß ist die unter die 28 Mann verteilte Summe? Antw.: Der fünfte $16\frac{3}{4}$, der zwölfte $13\frac{1}{4}$,

der sechzehnte $11\frac{1}{4}$, der siebente $15\frac{3}{4}$ ℳ. Die verteilte Summe war 336 ℳ.

12) Den neuesten Untersuchungen gemäß nimmt die Temperatur des Erdkörpers um so mehr zu, je mehr man sich seinem Mittelpunkte nähert. Wenn nun die Wärme bei einer Tiefe von 62,77 *m* $9{,}5^0$ Réaumur beträgt, und für je 36,09 *m*, die man dem Mittelpunkte der Erde sich nähert, die Temperatur-Erhöhung 1^0 Réaumur ausmacht, bei welcher Tiefe wird man die Wärme des kochenden Wassers $= 80^0$, bei welcher die Hitze des schmelzenden Bleies $= 283{,}2^0$ Réaumur antreffen? Welche Temperatur würde, wenn das Gesetz für die Zunahme bis zum Mittelpunkte der Erde stattfindet, dieser Mittelpunkt haben? (Der Halbmesser der Erde beträgt 6377400 *m*.)

Antw.: In einer Tiefe von 2607,35 *m* ist die Hitze des kochenden Wassers, in einer Tiefe von 9941,5 *m* die des schmelzenden Bleies. Im Mittelpunkte der Erde würde eine Hitze von 176700,5 Grad sein.

13) Ein Schiff mit 175 Passagieren hatte hinreichendes Wasser für die Reise. Nach 30 Tagen wurden in Folge des Skorbuts täglich 3 Mann hinweggerafft. Ein Sturm verzögerte die Fahrt um drei Wochen. Das Schiff erreichte den Hafen, als eben das Wasser ausgegangen war. Wie lange dauerte die Fahrt? A.: 79 Tage.

14) α) Wenn in der Gleichung $7x + 3 = y$ statt x nach und nach die eine arithmetische Progression bildenden Werte 3, 5, 7, 9 u. s. w. gesetzt werden, so bilden auch die hieraus sich ergebenden Werte von y eine arithmetische Reihe. Warum?

β) Wenn in der Gleichung $ax + b = y$ für x nach und nach die Werte c, $c + d$, $c + 2d$, $c + 3d$ u. s. w., die in arithmetischer Progression stehen, gesetzt werden, so bilden die hieraus sich ergebenden Werte von y ebenfalls eine arithmetische Progression. Warum? Wie heißt die Differenz dieser Reihe?

Bemerkung. Anwendung macht man von diesem Satze in der sogenannten Regel vom falschen Satze (règle de fausse position)*). Setzt man in $ax + b = c$ statt x nach und nach die Werte α, α', α'', α''' u. s. w., die in einer arithmetischen Progression stehen, so erhält man für $ax + b$ Werte, die im allgemeinen von c verschieden sind. Die Unterschiede der Werte $c - (ax + b)$, die man die Fehler der Gleichung nennt, bilden ebenfalls eine arithmetische Progression φ, φ', φ'', φ''' u. s. w. Ist man nun imstande, mit Hülfe zweier Glieder φ, φ' das Glied ψ der Reihe zu bestimmen, welches $= 0$ wird, so ergiebt sich aus diesem der entsprechende Wert in der Reihe α, α', α'' u. s. w., d. h. der Wurzelwert der Gleichung. Setzt man $\alpha' = \alpha + \delta$, $\alpha'' = \alpha + 2\delta$, $\alpha''' = \alpha + 3\delta$ u. s. w., so wird $\varphi = c - (a\alpha + b)$, $\varphi' = \varphi - a\delta$, $\varphi'' = \varphi - 2a\delta$ u. s. w. Setzt man $\psi = 0 = \varphi - na\delta$, so wird $n = \frac{\varphi}{a\delta} = \frac{\varphi}{\varphi - \varphi'}$. Der Wurzelwert der Gleichung ist also:

$$\alpha + \frac{\varphi\delta}{\varphi - \varphi'} = \frac{\alpha'\varphi - \alpha\varphi'}{\varphi - \varphi'}.$$

*) Indische Methode nach Abram ben Ezra, liber augmenti et diminutionis.

15) Die **Differenzen** der Quadratzahlen der aufeinander folgenden Zahlen bilden eine **arithmetische Reihe**. Warum?

16) Die Differenzen der Quadrate der Glieder einer arithmetischen Reihe*) bilden eine **arithmetische** Reihe. Warum?

17) Die Differenzen der Differenzen (**zweiten Differenzen**) der Kuben der natürlichen Zahlen bilden eine **arithmetische** Reihe, oder die **dritten** Differenzen sind sämtlich einander gleich. Warum?

18) Setzt man in der Function von x vom dritten Grade $ax^3 + bx^2 + cx + d$ für x nach und nach die Glieder einer arithmetischen Reihe, so sind die **dritten Differenzen** dieser neuen Reihe **konstant**. Warum?

19) Wenn man die erste ungerade Zahl nimmt, dann die Summe der 2ten und 3ten, der 4ten, 5ten und 6ten, der 7ten, 8ten, 9ten und 10ten u. s. w. ungeraden Zahlen bildet, so erhält man die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen nach der Reihe. Es ist nämlich $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, $5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$. Warum findet dieser Satz allgemein statt? **Antw.**: Die **ersten** Glieder der Reihen sind der Ordnung nach: $1 \cdot 0 + 1$, $2 \cdot 1 + 1$, $3 \cdot 2 + 1$, $4 \cdot 3 + 1$, $5 \cdot 4 + 1, \ldots n(n-1) + 1$. Die arithmetische Reihe ist allgemein $[n(n-1) + 1] + [n(n-1) + 3] \ldots . + [n(n-1) + 2n - 1] = n^3$.

20) Mittels des vorhergehenden Satzes soll die Reihe der Kubikzahlen $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots . + n^3$ summiert werden. **Antw.**: $[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$.

21) Die dreifache Summe der Quadratzahlen von 1 bis n^2, oder $3Sn^2$ läßt sich durch folgende n-gliedrige arithmetische Progression darstellen:

$$(n^2 + 2) + (n^2 + 5) + (n^2 + 8) \ldots + (n^2 + [3n - 1]).$$

Es ist nämlich $3 \cdot 1^2 = 1^2 + 2$; $3(1^2 + 2^2) = 6 + 9$; $3(1^2 + 2^2 + 3^2) = 11 + 14 + 17$; $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = = 3S4^2 = 18 + 21 + 24 + 27$ u. s. w. Wie läßt sich dieser Satz beweisen?

Aufl.: Gesetzt, der Satz gelte für $3Sn^2$, so gilt er auch für $3S(n+1)^2$; es ist nämlich:

$[(n+1)^2 + 2] + [(n+1)^2 + 5] \ldots + [(n+1)^2 + 3n - 1] + [(n+1)^2 + 3(n+1) - 1] = 3Sn^2 + 3(n+1)^2 = 3S(n+1)^2$. Da der Satz für $n = 1$ gilt, so gilt er auch für $n = 2$, $n = 3$ u. s. w., also allgemein.

22) Welchen Ausdruck erhält man für Sn^2?

Aufl.: $Sn^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

*) Diese Reihe heißt in Bezug auf die Differenzreihe die Hauptreihe

§ 83.

2) Geometrische Progressionen.

Das Anfangsglied heiße a, das Endglied t, die Anzahl der Glieder n, der Exponent (das Verhältnis) e und die Summe aller Glieder s; alsdann ist:

$$\text{I.} \quad t = a \cdot e^{n-1};$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{a(1 - e^n)}{1 - e}.$$

1) Was versteht man unter einer geometrischen Progression?

2) Das Anfangsglied einer geometrischen Progression sei 1, der Exponent 2, die Anzahl der Glieder 13. Wie groß ist das letzte Glied, wie groß die Summe der Glieder?

Antw.: Das letzte Glied ist 4096, die Summe der Glieder 8191.

3) t und s zu bestimmen, α) wenn $a = 7$, $e = 3$, $n = 11$; β) wenn $a = 1024$, $e = 5$, $n = 8$; γ) wenn $a = 8\frac{1}{2}$, $e = 2\frac{1}{2}$, $n = 11$; δ) wenn $a = 5\frac{1}{4}$, $e = 0{,}25$, $n = 6$.

Aufl.: α) 413 343 und 620 011; β) 80 000 000 und 99 999 744; γ) $81\,062\frac{649}{2048}$ und $135\,098\frac{399}{2048}$; δ) $\frac{21}{4096}$ und $6\frac{4089}{4096}$.

4) t und s zu bestimmen, α) wenn $a = 4096$, $e = 0{,}375$, $n = 5$; β) wenn $a = 3$, $e = -4$, $n = 7$; γ) wenn $a = -7$, $e = -3\frac{1}{2}$, $n = 6$.

Antw.: α) 81 und 6505; β) 12 288 und 9831; γ) $3676\frac{17}{32}$ und $2857\frac{31}{32}$.

5) Was wird aus der Formel II., wenn $n = \infty$ und $e < 1$?

Antw.: $a : (1 - e)$.

6) Wie groß ist s, wenn α) $a = 1$, $e = \frac{1}{2}$, $n = \infty$; β) $a = 1$, $e = \frac{1}{3}$, $n = \infty$? Antw.: α) 2; β) $1\frac{1}{2}$.

7) s für $a = 11$, $e = \frac{2}{9}$, $n = \infty$ zu bestimmen. Aufl.: $14\frac{1}{7}$.

8) s für $a = 1$, $e = -\frac{1}{2}$, $n = \infty$ zu bestimmen. Aufl.: $\frac{2}{3}$.

9) t 1) aus a, e und s, 2) aus e, n und s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $[a + (e - 1)s] : e$; 2) $(e - 1)se^{n-1} : (e^n - 1)$.

10) s 1) aus a, n und t, 2) aus e, n und t zu bestimmen.

Antw.: 1) $\dfrac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$; 2) $\dfrac{t(e^n - 1)}{(e - 1)e^{n-1}}$.

11) a 1) aus e, n und t, 2) aus e, n und s, 3) aus e, t und s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\dfrac{t}{e^{n-1}}$; 2) $\dfrac{(e-1)s}{e^n - 1}$; 3) $et - (e - 1)s$.

12) e 1) aus a, n und t, 2) aus a, t und s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\sqrt[n-1]{t : a}$; 2) $(s - a) : (s - t)$.

13) n 1) aus a, e und t, 2) aus a, e und s, 3) aus a, t und s, 4) aus e, t und s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\frac{\log t - \log a}{\log e} + 1$; 2) $\frac{\log [a + (e-1)s] - \log a}{\log e}$;

3) $\frac{\log t - \log a}{\log (s-a) - \log (s-t)} + 1$; 4) $\frac{\log t - \log [et - (e-1)s]}{\log e} + 1$.

14) Welche Gleichungen sind aufzulösen, wenn man 1) e, 2) t aus a, n und s, 3) e und 4) a aus n, t und s bestimmen will?

Aufl.: 1) Die Gleichung des $(n-1)$ten Grades

$e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots + 1 - \frac{s}{a} = 0$, welche sich auch unter der Form $\frac{e^n - 1}{e - 1} - \frac{s}{a} = 0$ darstellen läßt, giebt für e den gesuchten Wert. Setzt man $\sqrt[n-1]{t : a} = y$, so giebt die Gleichung vom $(n-1)$ten Grade $\frac{y^n - 1}{y - 1} - \frac{s}{a} = 0$ den verlangten Wert. 3) Die Gleichung des $(n-1)$ten Grades $\frac{e^n - 1}{e - 1} - \frac{s}{t} e^{n-1} = 0$, oder $e^{n-1}\left(1 - \frac{s}{t}\right) + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots + e + 1 = 0$. 4) Siehe 2*).

15) $a = 6$, $e = \frac{3}{4}$, $s = 19\frac{373}{512}$; wie groß t und n?
Antw.: $t = 1\frac{217}{512}$, $n = 6$.

16) $e = 7$, $n = 7$, $s = 411\,771$; wie groß t und a?
Antw.: $t = 352\,947$, $a = 3$.

17) $a = \frac{1}{8}$, $t = 1024$, $n = 14$; wie groß s und e?
Antw.: $s = 2047\frac{7}{8}$, $e = 2$.

18) Wie groß ist e, wenn α) $a = 20$, $n = 3$, $s = 95$; β) $n = 3$, $t = 600$, $s = 834$?
Antw.: α) $1\frac{1}{2}$ oder $-2\frac{1}{2}$. Die Progression ist alsdann entweder 20, 30, 45, oder 20, -50, 125. β) $3\frac{1}{3}$ oder $-\frac{10}{13}$.

19) $a = 40$, $e = \frac{3}{7}$, $s. = 70$; wie groß n und t?
Antw. $n = \infty$, $t = 0$.

20) Lassen sich e und s bestimmen, wenn $a = 9$, $t = 7$ und $n = \infty$? Antw.: $e = 1$, $s = \infty$.

21) $e = \frac{7}{8}$, $t = 9\,642{,}580\,2$, $s = 33\,741{,}580\,7$; wie groß n und a?
Antw.: $n = 25$, $a = 3$.

---

*) Würde man in der Auflösung zu 1) die ganze Gleichung mit $e - 1$ multiplizieren, so erhielte man zur Bestimmung von e die Gleichung des $n$ten Grades: $e^n - \frac{s}{a} e + \frac{s-a}{a} = 0$, unter welcher Form sie in den Lehrbüchern angegeben wird. Diese Gleichung verlangt aber eben durch diese Multiplikation einen Wurzelwert für e, welcher ihr nicht zugehört, nämlich den Wurzelwert $e = 1$, der nur in dem besonderen Falle, wo $na = s$, passen würde. Die Gleichung des $n$ten Grades ist deshalb zu verwerfen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die in den Lehrbüchern angegebenen Gleichungen zur Beantwortung der Fragen 2), 3) und 4). (Grunerts Archiv VI. 105.)

22) Von n Gliedern einer geometrischen Progression heißt das erste p, das zweite q. Wie heißt das $n$te Glied, und wie groß ist die Summe der n Glieder? Wie groß ist die Summe der Glieder, wenn $n = \infty$ und $p > q$?

Antw.: $p(q:p)^{n-1}$; $p^2[(q:p)^n - 1] : (q-p)$; $p^2 : (p-q)$.

23) α) Welcher Zahl ist die Summe der Reihe $6 - 12 + 24 - 48 + 96$ u. s. w. gleich, wenn die Anzahl der Glieder 37 ist und die einzelnen Glieder abwechselnd verschiedene Vorzeichen haben? β) Welchem Ausdrucke ist die Summe der unbegrenzten geometrischen Reihe $m - n + (n^2 : m) - (n^3 : m^2)$ u. s. w. gleich, wenn $n < m$ ist?

Antw.: α) 274 877 906 946; β) $m^2 : (m + n)$.

24) Das $g$te Glied einer Progression heißt m, das $h$te Glied r. Wie groß ist das erste, wie groß das $n$te Glied, und wie groß ist die Summe der Glieder vom $g$ten bis zum $h$ten?

25) Welchen Brüchen sind die unbegrenzten periodischen Decimalbrüche 0,111 11 ... (Periode 1), 0,378 378 ..... (Periode 378), 0,285 714 285 714 ..... (Periode 285 714), 0,013 698 630 1369863...... (Periode 013 698 63), 0,201 923 076 923 076.. (Per. 923 076) gleich?

Antw.: $\frac{1}{9}$, $\frac{14}{37}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{21}{104}$.

26) Welcher Zahl ist die unendliche Reihe $\frac{1}{8} + \frac{4}{8^2} + \frac{6}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{1}{8^5} + \frac{4}{8^6} + \frac{6}{8^7} + \frac{3}{8^8} + \frac{1}{8^9}$ u. s. w. gleich, wenn die Zähler der Brüche 1, 4, 6, 3 periodisch wiederkehren und die Nenner nach ganzen Potenzen von 8 fortschreiten? Antw.: $\frac{1}{5}$.

Bemerkung. Solche Reihen, in welche sich alle Brüche verwandeln lassen, wenn man für den Nenner des ersten Gliedes (Basis genannt) eine beliebige Zahl annimmt, heißen Kettenreihen*).

27) Die Summe folgender periodischen Kettenreihen zu bestimmen: α) $\frac{1}{11} + \frac{3}{11^2} + \frac{5}{11^3} + \frac{7}{11^4} + \frac{9}{11^5} + \ldots$ (Periode der Zähler 1, 3, 5, 7, 9); β) $\frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{2}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \frac{4}{5^7} + \ldots$ (Periode der Zähler 1, 4, 3, 0, 2); γ) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{3}{7^5} + \frac{4}{7^6} \ldots$ (Periode der Zähler 3, 4); δ) $\frac{1}{13} + \frac{2}{13^2} + \frac{3}{13^3} + \frac{5}{13^5} + \frac{8}{13^8} + \frac{10}{13^{10}} + \frac{5}{13^{12}} + \frac{8}{13^{15}} + \frac{10}{13^{17}} + \frac{5}{13^{19}} + \frac{8}{13^{22}} + \frac{10}{13^{24}} + \ldots$

Aufl.: α) $\frac{778}{6442}$; β) $\frac{601}{1562}$; γ) $\frac{457}{2352}$; δ) $\frac{1242606399 5}{1378558489652}$.

*) S. Theorie der Kettenreihen von N. Druckenmüller. Trier, 1837.

28) α) Welchem Ausdrucke ist die unbegrenzte periodische Kettenreihe $\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{a}{n^3}+\frac{b}{n^4}+\ldots$ gleich, wenn die Periode der Zähler a, b ist und alle Brüche echte sind? β) welchem die unbegrenzte periodische Kettenreihe $\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\frac{a}{n^5}+\frac{b}{n^6}+\ldots$?

Antw.: α) $\frac{an+b}{n^2-1}$; β) $\frac{an^3+bn^2+cn+d}{n^4-1}$.

29) Welchem Ausdrucke ist die unbegrenzte periodische Kettenreihe: $\left(\frac{a}{n}+\frac{a^2}{n^2}+\frac{a^3}{n^3}\cdots+\frac{a^m}{n^m}\right)+\left(\frac{a}{n^{m+1}}+\frac{a^2}{n^{m+2}}+\frac{a^3}{n^{m+3}}\cdots+\frac{a^m}{n^{2m}}\right)+\left(\frac{a}{n^{2m+1}}\cdots\frac{a^m}{n^{3m}}\right)+\cdots$ gleich? Antw.: $\frac{a(a^m-n^m)}{(a-n)(n^m-1)}$.

30) Wie wird bei einer gegebenen Basis ein Bruch in eine Kettenreihe verwandelt? Welcher Kettenreihe ist der Bruch $\frac{5}{7}$ gleich, wenn die Basis 9 ist?

Aufl.: $\frac{5}{7}=\frac{6}{9}+\frac{3}{9^2}+\frac{7}{9^3}+\frac{6}{9^4}+\frac{3}{9^5}+\frac{7}{9^6}+\frac{6}{9^7}$ u. s. w.

31) Folgende Brüche in Kettenreihen zu verwandeln: $\frac{3}{7}$ (Basis 4), $\frac{27}{312}$ (Basis 5), $\frac{29}{63}$ (Basis 7), $\frac{45}{64}$ (Basis 16).

32) Wieviel voneinander verschiedene Reste können bei der Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe entstehen?

33) Warum müssen, wenn Nenner und Zähler des Bruches zur Basis Primzahlen sind, die Zähler der Kettenreihe eine Periode bilden, die gleich zu Anfange beginnt?

Bemerkung. Auf die Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe gründet sich eine Methode der Auflösung unbestimmter Gleichungen vom ersten Grade. Es sei:

$$10y = 37x + 11.$$

Verwandelt man $\frac{11}{37}$ in eine Kettenreihe, deren Basis 10 ist, so gelangt man bei dem dritten Reste zu 11, dem Zähler des Bruches $\frac{11}{37}$. Man erhält nämlich nacheinander:

$$10\cdot 11 = 37\cdot 2 + 36,$$
$$10\cdot 36 = 37\cdot 9 + 27,$$
$$10\cdot 27 = 37\cdot 7 + 11;\ \text{also}\ x = 7,\ y = 27.$$

Beispiele; $13x = 7y + 5$; $6x = 19y + 7$.

34) In einer geometrischen Progression von vier Gliedern ist die Summe aller Glieder gleich a, die Summe ihrer Quadrate gleich b. Welche Progression ist es?

Aufl.: Bezeichnet s die halbe Summe, d die halbe Differenz der beiden mittleren Glieder, so ist:

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 2a^2(a^2-b)}}{4a} \text{ und } d = s\sqrt{\frac{a-4s}{a+4s}}.$$

35) Zwischen a und b sollen zwei mittlere geometrische Proportionalen eingeschaltet werden. Wie heißen dieselben?

36) Zwischen a und b drei mittlere geometrische Proportionalen zu interpolieren.

37) Die Summe $x^9 + x^8y + x^7y^2 + x^6y^3 \ldots + y^9$ zu bilden.

38) Ebenso die Summe von: $p\sqrt[4]{p^3} - p\sqrt{p}\sqrt[4]{q} + p\sqrt[4]{p}\sqrt{q} - p\sqrt[4]{q^3} + q\sqrt[4]{p^3} - q\sqrt[4]{q}\sqrt{p} + q\sqrt{q}\sqrt[4]{p} - q\sqrt[4]{q^3}$.

Antw.: $[p^2 - q^2] : [\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q}]$.

39) Das erste Glied einer aus fünf Gliedern bestehenden geometrischen Progression ist x^2, das zweite $x\sqrt{xy}$; wie heißen die drei anderen Glieder, und wem ist die Summe dieser Glieder gleich?

40) Das erste Glied einer aus sieben Gliedern bestehenden geometrischen Progression ist p^2, der Exponent $\sqrt[3]{q:p}$; wie heißt die Progression, und welches ist die Summe der Glieder?

Antw.: Die Summe der Glieder ist: $[q^2\sqrt[3]{q} - p^2\sqrt[3]{p}] : [\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}]$.

§ 84.

Aufgaben als Anwendungen der geometrischen Progressionen. Zinseszinsen- und Renten-Rechnung.

1) α) Ein König in Indien, Namens Shehram, verlangte von dem Erfinder des Schachspiels, Sessa Ebn Daher, daß er sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskomme, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viel Körner, als für das vorhergehende, gerechnet werde. Als zusammengezählt wurde, fand man, zum Erstaunen des Königs, eine ungeheure Summe. Welche?

Antw.: 18 446 744 073 709 551 615 Körner.

Bemerkung. Zur Berechnung obiger Summe Körner in Hektoliter mögen folgende Angaben dienen: Nach einem im Jahre 1302 unter Eduard's I. Regierung abgefaßten Gesetze soll 1 Sterling (englisches Geld) so schwer sein, als 32 wohl ausgetrocknete Weizenkörner. Da 20 Sterlinge = 1 Unze, 12 Unzen = 1 Pfund Troy-Gewicht = 373,24 Gramm, so gehen auf 1 Kilogr. 20 576 Weizenkörner, und da 1 Hektoliter guten Weizens 72¾ Kilogr. wiegt, so enthält 1 Hektoliter demnach 1 496 904 Körner. Obige Summe giebt somit 12 323 264 600 609 Hektoliter. Denkt man sich hiermit alles feste Land der Erde (134 836 242 Quadratkilom.) gleichförmig bedeckt, so wird die Höhe der aufgeschichteten Weizenkörner 9,14 Millimeter betragen.

β) Wenn ein Mensch zwanzig Jahre hindurch jegliches Jahr durch sein Beispiel oder absichtlich nicht mehr als einen einzigen Mitmenschen von heiligen Pflichten irre führte, und jeder dieser unglückseligen Verführten jährlich so wiederum nur einen einzigen

und dieser abermals nur einen einzigen auf den Abweg zum Unrechte brächte, so beträgt die Anzahl dieser Verführten, die alle jenen ersten gewissenlosen Frevler zum Stammvater ihres Fluches haben, nach zwanzig Jahren wieviel? (Einsiedel, speculum pastorum. München 1858.) Antw.: 1 048 575.

2) Jemand setzt bei einem Hazardspiele zum ersten Male 1 *M*, verliert und nimmt sich vor, so lange seinen Einsatz zu verdreifachen, bis ihm das Glück günstig werde. Nach neun unglücklichen Spielen sieht er sich genöthigt, aufzuhören, indem ihm von der mitgebrachten Barschaft nur noch 2 *M* übrig bleiben. Wieviel setzte er zum 9ten Male aufs Spiel, und wieviel betrug sein mitgebrachtes Geld? Antw.: Zum 9ten Male setzte er 6561 *M* ein, und sein mitgebrachtes Geld betrug 9843 *M*.

3) Ein anderer Spieler versuchte auf ähnliche Weise sein Glück und nahm sich vor, jedesmal den doppelten Einsatz zu wagen, wenn ihm das Glück ungünstig sei, dagegen nur die Hälfte des vorhergehenden Einsatzes zu wagen, wenn ihm das Glück günstig sei. Zuerst verliert er achtmal, dann gewinnt er fünfmal hintereinander, und zwar jedesmal das 13fache seines Einsatzes (d. h. er erhält das 12fache seines Einsatzes und den Einsatz dazu). Da er dem Glücke nicht weiter traut, so geht er mit seinem Gewinne von 5607 Fl nach Hause. Wieviel setzte er zum ersten Male ein? A.: 1 Fl.

4) Angenommen, daß bei gänzlicher Schonung die vorhandenen Hasen eines Jagd-Reviers sich jährlich um das Dreifache vervielfältigt hätten, und jetzt deren 5096 vorhanden wären, wieviel Hasen würden vor 5 Jahren dagewesen sein, wenn man die Brut der mehr als einjährigen Hasen außer Rechnung läßt? Antw.: 14.

5) Jemand säet zwei Hektoliter Weizen und will mehrere Jahre hindurch die ganze Ernte als Aussaat für das folgende Jahr benutzen, und zwar so lange, bis die Ernte ihm mehr als 30 000 Hektoliter einbringt. Nach wieviel Jahren wird sein Wunsch erfüllt sein, wenn jedes Jahr die Fruchtbarkeit sich gleich bleibt und die Ernte das Siebenfache der Aussaat beträgt?

Antw.: Nach 5 Jahren, wo er 33 614 Hektoliter einerntet.

6) Von einem Punkte, der auf dem Schenkel eines Winkels von $\frac{1}{3}$ Rechten liegt, wird auf den anderen Schenkel eine Senkrechte gefällt, und hierauf aus dem Fußpunkte des Perpendikels auf den ersten Schenkel, alsdann wieder aus dem Fußpunkte des letzteren Perpendikels auf den zweiten Schenkel eine Senkrechte gezogen u. s. w. bis ins Unendliche. Wenn nun die erste Senkrechte eine Länge von m *mm* hat, wieviel beträgt die Summe der unendlichen Zahl senkrechter Linien? Antw.: $2m$ *mm*.

7) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Winkel ein beliebiger ist und die erste Senkrechte a, die zweite b *mm* lang ist? Antw.: $a^2 : (a - b)$.

8) Wie heißt die Auflösung der 6ten Aufgabe, wenn der Winkel $= \alpha$ und die erste Senkrechte $= m$ ist? Antw.: $m : (2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2)$.

9) Eine Linie von gegebener Länge a liegt auf dem einen Schenkel eines Winkels α und wird auf den zweiten Schenkel projiziert; hierauf wird die Projektion auf den ersten Schenkel und alsdann die zweite Projektion wieder auf den zweiten Schenkel projiziert u. s. w. bis ins Unendliche. Wie groß wird die Summe der Linie a samt allen ihren Projektionen sein?

10) Von dreien geraden Linien durchschneiden sich die erste und zweite unter dem spitzen Winkel α, die zweite und dritte unter dem spitzen Winkel β, die dritte und erste unter dem spitzen Winkel γ. Ein Stück der ersten geraden Linie von gegebener Länge m wird auf die zweite projiziert, die Projektion auf die dritte Linie, die zweite Projektion auf die erste Linie, die dritte Projektion auf die zweite Linie projiziert u. s. w. bis ins Unendliche. Wie groß ist die Summe der Linie m samt allen ihren Projektionen?

Antw.: $m(1 + \cos\alpha + \cos\alpha \cos\beta) : (1 - \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$.

11) Konstruiert man auf den beiden Seiten eines Dreieckes als Grundlinien zwei Dreiecke, von denen jedes an Inhalt $\frac{1}{8}$ des Inhaltes des ersten Dreieckes beträgt; konstruiert man alsdann über den außenliegenden Seiten der neuen Dreiecke als Grundlinien Dreiecke, welche ebenfalls an Inhalt $\frac{1}{8}$ des Inhaltes dieser Dreiecke betragen u. s. w. fort bis ins Unendliche, wie groß ist alsdann die Summe aller dieser neu entstandenen Dreiecke nebst dem Inhalte des ersten Dreieckes?*) Antw.: $\frac{4}{3}$ des Inhaltes des ersten Dreieckes.

12) Zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ sollen 11 Glieder nach dem Gesetze einer geometrischen Progression eingeschaltet werden. Wie heißen die Glieder?**)

Antw.: 0,943 873; 0,890 895; 0,840 895; 0,793 700; 0,749 153; 0,707 106; 0,667 419; 0,629 960; 0,594 603; 0,561 231; 0,529 731.

13) Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von 1 Stadium vor ihm hergeht, mit zwölfmal größerer Geschwindigkeit. Kommt Achilles an der Stelle an, wo die Schildkröte zu Anfang sich befand, so ist diese um $\frac{1}{12}$ Stadium weiter; durchläuft Achilles diese kleine Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadium, so wird die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadium weiter sein u. s. w. Es wird also wohl Achilles die Schildkröte *nie erreichen*, obschon er sich derselben immer nähert?***)

---

*) Anwendung bei der Bestimmung des Inhaltes eines Parabelsegmentes.

**) Diese Aufgabe ist von besonderer Anwendung in der Akustik. Bezeichnet man den Grundton mit 1, so ist dessen Oktave in Bezug auf die Dauer jeder der Vibrationen, die sie macht, gleich $\frac{1}{2}$. Die 11 zwischen jenen beiden Tönen liegenden halben Töne müssen bei der *gleichschwebenden Temperatur*, bei der jeder folgende Ton um *gleichviel* höher ist, als der vorhergehende, obigen Zahlenwerten entsprechen. Ist also c = 1, $\bar{c} = \frac{1}{2}$, so ist cis oder des = 0,943 873, d = 0,890 895 u. s. w.

***) Das bekannte Sophisma des Zeno.

Zinseszinsen- und Renten-Rechnung.

Die Logarithmen der Zahlen 1,01 u. s. w. bis auf 10 Decimalstellen.

log 1,01	= 0,004 321 373 8	*log* 1,04	= 0,017 033 339 3.
» 1,02	= 0,008 600 171 8	» 1,0425	= 0,018 076 063 6.
» 1,025	= 0,010 723 865 4	» 1,045	= 0,019 116 290 4.
» 1,0275	= 0,011 781 830 5	» 1,0475	= 0,020 154 031 6.
» 1,03	= 0,012 837 224 7	» 1,05	= 0,021 189 299 1.
» 1,0325	= 0,013 890 060 3	» 1,055	= 0,023 252 459 6.
» 1,35	= 0,014 940 349 8	» 1,06	= 0,025 305 865 3.
» 1,0375	= 0,015 988 105 4		

14) Ein Kapital von 1200 *M* steht auf Zinseszinsen zu 4 Prozent. Was wird daraus nach 36 Jahren? A.: 4924,70 *M*.

15) Zu Norwich in England starb im Jahre 1724 ein Richter, welcher in seinem Testamente 400 £ vermachte mit der Bestimmung, daß diese Summe 60 Jahre lang zu 5 Prozent verzinst und nach Ablauf dieser Zeit von dem Ertrage eine Schule für 120 Zöglinge errichtet werden solle. Zu welcher Summe war das Kapital im Jahre 1784 angewachsen? Antw. 7471,67 £.

16) Was wird aus einem Kapitale von 2400 *Fl* zum Zinsfuße $4\frac{1}{2}$ nach 27 Jahren? Antw.: $8401\frac{1}{4}$ *Fl*.

17) Ein Kapital k steht auf Zinseszinsen zum Zinsfuße p.. Was wird aus demselben nach n Jahren? Antw.: $k(1 + 0{,}01p)^n$.

18) Ein Wald, der $13\,490\frac{1}{2}$ *cbm* Holz enthält, vermehrt sich jährlich um $2\frac{1}{4}$ Prozent. Wieviel *cbm* wird derselbe nach 80 Jahren liefern? Antw.: 80 001 *cbm*.

19) Was würde aus einem Pfennige (à $\frac{1}{100}$ Reichsmark), der um Christi Geburt auf Zinseszinsen a) zu 4, b) zu 5 Prozent gelegt worden wäre, Ende des Jahres 1875 geworden sein?

Antw.: a) 865 986 Quadrillionen *M* oder genau:

865 986 626 476 236 508 270 156 786 660,24 *M*.

Die genaue Ausrechnung geschieht mit Hülfe der natürlichen Logarithmen nach der in den »Tables portatives de Logarithmes par François Callet« Seite 108 und 110 angegebenen Anweisung. Setzt man $x = 1{,}04^{1875} : 100$ *M*, so ist, wenn lx den natürlichen Logarithmus bezeichnet: $lx = 1875\, l\, 1{,}04 - l\, 100 =$

$$68{,}933666\ 976414\ 339136\ 715698\ 161481\ 072459\ 8.$$

Die letztere Zahl ist aber $= l99 + l9 + l41 + l463 + l2^9 + l10^{14} + l999\,997 + ly$, wo

$$ly = -\,0{,}000\,000\ 056762\ 933506\ 988734\ 855232\ 550331\ 8.$$

Berechnet man y nach der Formel

$$y = 1 + ly + \frac{1}{1.2}(ly)^2 + \frac{1}{1.2.3}(ly)^3 + \ldots,$$

so erhält man:

$$y = 0{,}999999\ 943237\ 068104\ 026544\ 822195\ 12263,$$

demnach ist $x =$

$$99 \,.\, 9 \,.\, 41 \,.\, 463 \,.\, 512 \,.\, 999\,997 \,.\, 100\,000\,000\,000\,000 \,.\, y$$
$$= 865\,986\ 626476\ 236508\ 270156\ 786660{,}238333.$$

b) Bei 5% Zinsen erhält man genau:
53 695 236 076 014 489 752 466 593 034 515 466 398,33 ℳ.

Es ist nämlich $lx = 1875\, l1{,}05 - l100 =$
$86{,}876\,387\,631\,696\,914\,379\,541\,025\,009\,065\,006\,474\,748\,417\,803$
$= l16 + l94 + l51 + l7 + l10^{14} + l1\,000\,021^{2} + l1\,000\,003 + ly,$
$ly = 0{,}000\,000\;370\,043\;522\,097\;405\,313\;700\,203\;051\,526\;279\,348\;8,$
$y = 1{,}000\,000\;370\,043\;590\,563\;517\,881\;973\,536\;337\,166\;477\,465\;6.$

Bemerkung. Die Oberfläche der Erde hat ungefähr 509 950 777 971 040,71 qm. Denkt man sich die ganze Oberfläche mit aneinandergelegten Zwanzigmarkstücken bedeckt, deren 2280,89 Stück auf einen Quadratmeter gehen, so würden 1 163 141 629 966 367 045 Stück hierzu erforderlich sein. Um die oben unter a) genannte Summe, zu welcher ein zu 4% auf Zinseszinsen ausgethaner Pfennig in 1875 Jahren anwächst, aufzunehmen, müßte die Erde eine 37 226 190 001 fache Oberfläche oder einen 192 931 fachen Durchmesser, die Sonne einen 1776 fachen Durchmesser haben. Um die unter b) genannte Summe aber aufzunehmen, müßte die Erde eine 46 163 970 657 268 212 900 fache Oberfläche oder einen 6 794 407 307-fachen Durchmesser, die Sonne einen 62 638 585 fachen Durchmesser haben.

Bestände die ganze Erde, deren Inhalt 1 082 842 181 273 546 297 519 cbm beträgt, aus Gold von dem Gehalte 900 der Zwanzigmarkstücke, deren 2 143 096 auf einen Kubikmeter gehen, so würden zur Summe a) 37 316,8 solcher Erdkugeln erforderlich sein oder eine Kugel von 33,4 fachem Erddurchmesser. Zur Summe b) dagegen würden 23 138 Millionen Kugeln von der Größe der Erde, oder eine Kugel von 2849½ fachem Erddurchmesser oder 26 fachem Sonnendurchmesser erforderlich sein.

20) Im Jahre 1624 kostete ein Stück Rheinwein im Bremer Ratskeller 300 Thlr. Gold. Wie hoch würde sich im Jahre 1879, also nach Verlauf von 255 Jahren, α) der Preis des Stückes, 8 Ohm haltend, belaufen, wenn 10% (5% Zinsen und 5% Leckage) Zins auf Zins und 100 Thlr. Gold gleich 330 ℳ gerechnet werden? β) Wie hoch der Preis einer Flasche à $\frac{1}{180}$ Ohm? γ) eines Glases à $\frac{1}{8}$ Flasche? δ) eines Tropfens à $\frac{1}{1000}$ Glas?

Antw.: α) 35 544 600 000 000 ℳ;
β) 24 683 750 000 ℳ;
γ) 3 085 469 000 ℳ;
δ) 3 085 469 ℳ.

21) α) Aus einem Gefäße, welches 20 l reinen Weingeist enthält, werden drei Liter herausgenommen und durch 3 l Wasser ersetzt. Nachdem das Wasser mit dem Weingeiste sich vermischt, werden zum zweiten Male 3 l der Flüssigkeit herausgenommen und wieder 3 l Wasser hinzugegossen, und so fort 24 mal hintereinander. Wieviel bleibt von der ursprünglichen Flüssigkeit im Gefäße zurück? Antw.: 0,404 654 l.

β) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 20, 3 und 24 die allgemeinen Zeichen a, b und n gesetzt werden?
Antw.: $a[(a-b):a]^{n}$ Liter.

22) Mit 76 g Silber werden 20 g Kupfer zusammengeschmolzen. Von der Mischung werden 20 g weggenommen und durch 20 g Kupfer ersetzt. Wieviel Silber wird zuletzt noch in dem Gemische enthalten sein, wenn man dieses Verfahren 24 mal hintereinander wiederholt? Antw.: 0,279 146 g.

23) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 76, 20, 24 die allgemeinen Zahlzeichen a, b, n gesetzt werden?
Antw.: $a[a : (a - b)]^n$.

24) Ein Tabaksfabrikant hat zweierlei Sorten Tabak; von der einen Sorte kostet das Kilogramm 4, von der anderen 2 *M*. Aus beiden Sorten will er 11 Mittelsorten durch Vermengung darstellen. Zu dem Zwecke mengt er 9 Teile der guten Sorte mit zwei der schlechten, hierauf wieder 9 Teile der neuen Sorte mit zwei Teilen der schlechten und so fort 11mal hintereinander. Zu welchem Preise kann er die 11te Mittelsorte verkaufen? Antw.: Zu 2 *M* 20 *ℛ*.

25) Was wird aus einem Kapital von 2400 *Fl* nach 27 Jahren zu 4¾ pCt., wenn die Zinsen halbjährig gerechnet werden?
Antw.: 8524¼ *Fl*.

26) α) Was wird aus einem Kapitale von 68000 *M* zu 5 Prozent auf Zinseszinsen nach 6½ Jahren?

β) Wie heißt das Resultat der 17ten Aufgabe, wenn n keine ganze Zahl bedeutet, sondern von der Form $a + \frac{b}{c}$ ist, wo a eine ganze Zahl oder Null, $\frac{b}{c}$ aber einen echten Bruch bezeichnet?

Antw.: α) 93404,7 *M*; β) $k\left(1 + \frac{1}{100}p\right)^a\left(1 + \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{100}p\right)$.

27) Ein Sparkasse lehnt von jemanden 1500 *Fl* zu 3 pCt. und leiht dieses Kapital wieder zu 5 pCt. aus. Wie hoch beläuft sich der Gewinn der Sparkasse am Ende des zehnten Jahres, wenn Zinseszinsen gerechnet werden? Antw.: 427,47 *Fl*.

28) Nach 7 Jahren hat jemand 3600 *M* zu zahlen. Wieviel kann er jetzt bezahlen, wenn der Diskonto 3½ pCt. beträgt und die Zinseszinsen berücksichtigt werden? Antw.: 2829,57 *M*.

29) Ein Kapitalist, der bei mehreren Fabrikanten ein Kapital von 3¾ pCt. jährlich auf Zinsen stehen hatte, ließ sich alle Vierteljahre die Zinsen bezahlen und vermehrte durch dieselben sein Kapital. Hierdurch wuchs dasselbe nach 9 Jahren zu 83954,2 *M* an. Wie groß war das ausgeliehene Kapital? A.: 60000 *M*.

30) Ein Walddistrikt, der sich jährlich um 4¾ Prozent seines jedesmaligen Holzbestandes vermehrt, ist zu 12000 *cbm* Holz vermessen. Wieviel enthielt derselbe vor 12 Jahren? A.: 6876 *cbm*.

31) Welches ist der bare Wert eines nach n Jahren zu bezahlenden Kapitals k' beim Zinsfuße p? Antw.: $k' : (1 + 0{,}01p)^n$.

32) α) Zu wieviel Prozent steht ein Kapital k, welches nach n Jahren mit den Zinseszinsen k' wird?

β) Zu wieviel Prozent steht ein Kapital von 18796 *M*, welches nach 10 Jahren zu 29189,6 *M* anwächst?

γ) Ein Wucherer leiht einem Bedrängten 600 *M* und läßt sich dafür einen Schuldbrief über 800 *M* ausstellen, zahlbar nach 3 Jahren ohne Zinsen. Wieviel Prozent nahm der Menschenfreund?

Antw.: α) $100\left(\sqrt[n]{k' : k} - 1\right)$; β) 4½; γ) 10,064 Prozent.

33) Die Bevölkerung einer Stadt, welche 32500 Einwohner zählte, hat in 24 Jahren um 33566 Seelen zugenommen. Wieviel beträgt der jährliche Zuwachs auf 100 Seelen? Antw.: 3.

34) In einem Gefäße befinden sich 180 *l* Weingeist; eine bestimmte Menge Wasser wird hinzugesetzt und mit dem Weingeiste vermischt und hierauf ebensoviel aus der Mischung geschöpft, als vorhin Wasser zugesetzt wurde. Wenn diese Operation 25mal hintereinander vollzogen wird und zuletzt nur noch der 113te Teil des ursprünglichen Weingeistes übrig bleibt, wieviel Liter Wasser wurden jedesmal hinzugesetzt? Antw.: 37,468 *l*.

35) α) Nach Rickmann betrug die Bevölkerung Englands im Jahre 1760 6479730, im Jahre 1800 9187176 und im Jahre 1830 13840751 Seelen. Ist die Zunahme der Bevölkerung in diesen Zeiten eine regelmäßige oder nicht?

Antw.: Im ersten Zeitraume 1760—1800 betrug die Zunahme 0,876, im zweiten 1800—1830 1,375 Prozent.

β) Wenn die Bevölkerung eines Landes innerhalb 9 Jahren von 208700 auf 318500 Seelen angewachsen ist, wie stark wird die Bevölkerung, wenn sie in demselben Maße zunimmt, 15 Jahre nach diesen 9 Jahren sein? Antw.: 644299 Seelen.

36) Zu wieviel Prozent muß ein Kapital stehen, wenn es nach 15 Jahren sich verdoppeln soll? Antw.: Zu 4,73 Prozent.

37) Jakob kam mit 69 Personen nach Ägypten, so daß also zusammen 70 waren. Beim Auszug aus Ägypten nach 430 Jahren zählte man 660000 Menschen; wie stark mußte die jährliche Zunahme der Bevölkerung gewesen sein, wenn man annimmt, daß von 50 Menschen 3 im Durchschnitte jährlich mit Tode abgegangen sind?

Antw.: 2,151 Prozent und auf 12 Menschen mußte jährlich einer geboren werden.

38) Wie lange stand ein Kapital von 12388 *Fl*, wenn es bei $3\frac{1}{2}$ Prozent Zinsen zu 22232 *Fl* 45 *Kr* angewachsen ist?

Antw.: 17 Jahre.

39) In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, welches α) zu 3, β) zu 4, γ) zu $4\frac{1}{2}$, δ) zu 5 Prozent aussteht?

Antw.: α) In 23,45, β) in 17,67, γ) in 15,75, δ) in 14,21 Jahren.

40) α) In wieviel Jahren wird ein Kapital von 2739 *Fl* ebenso groß sein, als ein Kapital von 3815 *Fl* in 7 Jahren, wenn der Zinsfuß bei beiden $3\frac{3}{4}$ beträgt? Antw.: In 16 Jahren.

β) Nach wieviel Jahren wird ein Kapital von 8443 *M* zu 4 Prozent ebensoviel wert sein, als 9000 *M* zu 6 Prozent nach 9 Jahren? Antw.: Nach 15 Jahren.

41) Die von Frankreich im Jahre 1871 an die verbündeten Deutschen zu zahlende Kriegsschuld betrug 5 Milliarden (5000000000) *Frc*.

Um welche Zeit hätte diese enorme Summe mittels eines einzigen auf Zinseszinsen ausgelegten Centime abgetragen werden können, wenn der Zinsfuß α) 4, β) $4\frac{1}{2}$, γ) 5 Prozent beträgt?

Antw.: α) Im Jahre 1184 (unter Ludwig VII. von Frankreich, zur Zeit des zweiten Kreuzzuges); β) im J. 1259 (zur Zeit Ludwig IX.); γ) im J. 1319 (zur Zeit Ludwig X.).

42) Nach wieviel Jahren wird ein Kapital k den Wert k' erhalten, wenn der Zinsfuß p beträgt?

Antw.: Nach $(log\ k' - log\ k) : (log\ (1 + 0{,}01p)$ Jahren.

43) 278 *kg* blauer Farbe werden mit 213 *kg* gelber Farbe vermischt; 278 *kg* der Mischung werden hierauf zum zweiten Male mit 213 *kg* gelber Farbe vermischt u. s. w. fort. Wieviel Mal muß die Mischung vorgenommen werden, wenn zuletzt nur der hundertste Teil der blauen Farbe in der Mischung übrig bleiben soll?

Antw.: Ungefähr 8mal.

44) Vor wieviel Jahren war ein Kapital von $5326\frac{1}{2}$ *M*, welches zu 4 Prozent auf Zinseszinsen stand, 5000 *M* wert?

Antw.: Vor $1\frac{219}{360}$ Jahren und nicht vor 1,613 (nahe $1\frac{221}{360}$) Jahren.

45) Vor wieviel Jahren hatte ein Kapital, welches zu 4 Prozent aussteht, nur den dritten Teil seines jetzigen Wertes?

Antw.: Vor 28 Jahren und $\frac{1}{10}$ Monat.

46) Jemand leiht ein Kapital auf Zinseszinsen zu p Prozent und verleiht dasselbe zu p' Prozent. Nach n Jahren giebt er das Kapital wieder zurück und gewinnt m *M*. Wieviel betrug dasselbe?

Antw.: $m : [(1 + 0{,}01p')^n - (1 + 0{,}01p)^n]$ *M*.

47) Ein Kapital von 16000 *Fl* ist auf Zinseszinsen zu 5 Prozent jährlich ausgeliehen; die Verwaltungskosten betragen für jedes Jahr 1 Prozent des vergrößerten Kapitals und werden am Ende des Jahres abgerechnet. Zu welcher Summe wird das Kapital in 20 Jahren anwachsen? Antw.: Zu 34722,424 *Fl*.

48) α) Jemand hat ein Kapital k zu p Prozent auf Zinsen ausstehen, setzt jedes Jahr die Zinsen hinzu und gebraucht zu seinem Unterhalte jährlich die Summe u. Wie groß wird sein Kapital nach n Jahren sein?

Antw.: $k(1 + 0{,}01p)^n - \frac{100}{p} u [(1 + 0{,}01p)^n - 1]$

$$= \left(k - \frac{100}{p} u\right) (1 + 0{,}01p)^n + \frac{100}{p} u.$$

Bemerkung. Aufgaben von dieser Art lassen sich entweder durch Summierung einer geometrischen Reihe, oder auf folgende Weise lösen. Man denke sich, der Kapitalist A lasse n Jahre hindurch sein Kapital nebst den Zinsen und Zinseszinsen unangetastet, leihe aber gleich zu Anfange der Zeit von einem anderen Kapitalisten B ein Kapital $(100 : p)u = C$, dessen jährliche Zinsen soviel betragen, als er zu seinen Unterhalte gebraucht, und gebe nach Verlauf der n Jahre das geliehene Kapital samt Zinseszinsen wieder zurück. Das ausgeliehene Kapital verzinst sich in

n Jahren zu $k(1 + 0{,}01p)^n$, das verschuldete Kapital aber zu $C(1 + 0{,}01p)^n$. Das Vermögen des Kapitalisten besteht also nach n Jahren aus dem zu p Prozent verzinsten eigenen Kapitale k und aus dem geliehenen C; die Schuld aus dem geliehenen Kapital C nebst seinen Zinseszinsen. Nach Abzug der letzteren erhält man also als Resultat für die Auflösung der Aufgabe:

$$k(1 + 0{,}01p)^n + C - C(1 + 0{,}01p)^n = (k - C)(1 + 0{,}01p)^n + C.$$

β') Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn das Kapital jährlich nicht um u vermindert, sondern um u vermehrt wird?

Antw.: $\left\{k + \frac{100}{p}u\right\}(1 + 0{,}01p)^n - \frac{100}{p}u$.

Bemerkung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht auf ähnliche Weise, wie die der vorigen. Man denke sich das Kapital k um ein Kapital $(100 : p)u$ vermehrt, dessen jährliche Zinsen mit u entrichtet werden, und welches nach n Jahren wieder zurückzugeben ist.

49) Ein Kapitalist, der ein Vermögen von 600000 *M* hat, zieht jährlich aus seinem Gelde 5 Prozent und gebraucht hiervon zu seiner Haushaltung 6000 *M*. Wie groß wird sein Vermögen nach 12 Jahren sein? Antw.: 982011 *M*.

50) Von einer zu 5 pCt. verzinsten Schuld von 2578 *Fl* werden am Ende jedes Jahres 100 *Fl* abgetragen. Wieviel beträgt die Schuld nach Verlauf von 10 Jahren? Antw.: $2941\frac{1}{2}$ Fl.

51) In einem Gemeindewalde, der 10000 *cbm* Holz enthält, und dessen Zuwachs jährlich 5 pCt. beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 800 *cbm* Holz geschlagen. Wieviel Kubikmeter wird der Wald nach 10 Jahren noch enthalten? Antw.: 6226,6 *cbm*.

52) Jemand hat ein Vermögen von 2817 *Fl*, welches zu 4 Prozent aussteht, und vermehrt dasselbe jährlich nicht allein um die Zinsen, sondern auch noch um 420 *Fl*. Wie groß wird das Kapital nach 8 Jahren sein? Antw.: 7725,23 *Fl*.

53) Ein Pächter ist 8 Jahre hindurch mit seiner Pacht von 280 *Fl* zurückgeblieben. Wieviel hat er am Ende des 8ten Jahres zu bezahlen, wenn die Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden und die Schuld zu 4 pCt. verzinst ist? A.: 2580, genau 2579,983 *Fl*.

54) Jemand gebraucht von seinem zu $4\frac{1}{2}$ pCt. verzinsten Kapital von 30000 *M* jährlich 4680 *M*. Wann wird sein Vermögen aufgezehrt sein? Antw.: Nach 7 bis 8 Jahren (7,64 Jahren).

55) Ein Kapital k steht zu p Prozent auf Zinsen; nach wieviel Jahren wird daraus die Summe k' werden, wenn die Zinsen jährlich zum Kapital geschlagen und außerdem das Kapital jährlich um die Summe u vermehrt oder vermindert wird?

Antw.: Nach $\dfrac{\log\left(k' \pm \frac{100}{p}u\right) - \log\left(k \pm \frac{100}{p}u\right)}{\log(1 + 0{,}01p)}$ Jahren.

56) Jemand hinterläßt sein ganzes Vermögen seinen Erben unter der Bedingung, 12 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres seinem treuen Diener 175 ℳ zu zahlen. Für wieviel können die Erben diese Verpflichtung abkaufen, wenn die Zinsen zu 4 Prozent gerechnet werden? Antw.: Für 1642,39 ℳ.

57) Jemand hat eine Jahresrente von 700 ℳ auf 10 Jahre zu genießen. Wieviel ist für dieselbe jetzt zu bezahlen, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{4}$ Prozent gerechnet werden? A.: 5607,63 ℳ.

58) Wie groß ist der bare Wert einer Jahresrente r, welche man n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres zu genießen hat, wenn der Zinsfuß p ist? Antw.: $\frac{100}{p} r[1 - (1 + 0{,}01p)^{-n}]$*).

59) Für eine n Jahre hintereinander zu beziehende Jahresrente wird zu dem Zinsfuße p bar die Summe b bezahlt. Wie groß ist die Jahresrente? Antw.: $\frac{(1 + 0{,}01p)^n \cdot b \cdot p}{100[(1 + 0{,}01p)^n - 1]}$.

60) α) Eine zu 4% zu verzinsende Schuld von 3816 ℳ soll in 5 jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Welche Summen sind zu zahlen? Antw.: 857,18 ℳ.

β) Ein Staat macht ein Anlehen von 3 Millionen Fl zu 5 Prozent und will dasselbe in 25 Jahren abtragen, dadurch, daß jährlich eine bestimmte Summe, worin die Zinsen mitbegriffen sind, bezahlt wird. Wie groß ist diese Summe? Antw.: 212857 Fl.

61) α) Auf wieviel Jahre ist eine Jahresrente r zu genießen, deren Wert der zu p Prozent verzinsten baren Summe b gleich kommt?

β) Wieviel Jahre hindurch kann jemand eine Jahresrente von $1001\frac{1}{2}$ ℳ genießen, wenn er bar 10000 ℳ zahlt, und wenn die Zinsen zu 4 Prozent gerechnet werden?

Antw.: α) Auf $\frac{\log(100r) - \log(100r - bp)}{\log(1 + 0{,}01p)}$ Jahre; β) 13 Jahre.

62) α) Eine Rente von 600 Fl ist 30 Jahre lang jährlich zu beziehen. Zu welcher Zeit kann man dieselbe mit $600 \cdot 30 = 18000$ Fl auf einmal bezahlen, wenn die Zinseszinsen zu 5 pCt. gerechnet werden? β) Welches ist der mittlere Zahlungs-Termin einer Jahresrente, welche n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres fällig ist, wenn die Zinseszinsen zu p pCt. gerechnet werden?

Antw.: α) In 13,70 Jahren;

β) in $\frac{\log(\frac{1}{100}np) + n\log(1 + 0{,}01p) - \log[(1 + 0{,}01p)^n - 1]}{\log(1 + 0{,}01p)}$ Jahren.

---

*) Dieser Ausdruck läßt sich mittels Trigonometrie berechnen, wenn man $(1 + 0{,}01p)^{-n} = \sin\alpha^2$ setzt, wodurch das Resultat $100r \cdot \cos\alpha^2 : p$ wird.

63) Jemand wünscht nach seinem Tode seinen zurückbleibenden Angehörigen 12000 *M* zu hinterlassen und will zu dem Zwecke an eine öffentliche Lebensversicherungs-Anstalt jährlich postnumerando eine gewisse Summe zahlen. Welche Summe hat diese Anstalt zu fordern, wenn sie gemäß den Sterblichkeits-Registern als wahrscheinliche Lebensdauer des Versichernden 18 Jahre annimmt, und wenn der Zinsfuß $3\frac{1}{2}$ pCt. beträgt? Antw.: 478,77 *M*.

64) α) Jemand will 21 Jahre hindurch zu Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf der 21 Jahre er selbst oder ein anderer 8 Jahre hindurch eine jährliche, Ende eines jeden Jahres zu zahlende Rente von 600 *M* genieße. Wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ pCt. p. a. gerechnet werden? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 21, 8, 600 und $4\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen m, n, r und p gesetzt werden?

Antw.: α) 112,145 *M*; β) $\dfrac{r - \dfrac{r}{(1+0{,}01p)^n}}{[(1+0{,}01p)^m - 1]\,(1+0{,}01p)}$.

Bemerkung. Anwendung von dieser Aufgabe macht man bei den Berechnungen der Wittwenkassen.

65) Wenn eine Jahresrente r, welche n Jahre zu genießen ist, den baren Wert b hat, wieviel beträgt der Zinsfuß?

Antw.: Die Auflösung führt auf die Gleichung:

$1 - \dfrac{1}{(1+0{,}01x)^n} = \dfrac{bx}{100r}$. Setzt man $\dfrac{1}{1+0{,}01x} = y$, so ist: $ry^{n+1} - (r+b)y + b = 0$. Beispiel: $r = 700$, $b = 5600$, $x = 4{,}25$.

66) α) Eine Jahresrente von 600 *Fl*, welche 20 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres fällig ist, soll in eine andere umgewandelt werden, die 25 Jahre lang am Ende eines jeden Vierteljahres zahlbar ist. Wie groß wird die neue Rente sein, wenn Zinseszinsen zu 4 Prozent p. a. gerechnet werden? β) Wie heißt das Resultat, wenn für 600, 20, 25, $\frac{1}{4}$ und 4 die allgemeinen Zeichen r, n, t, $\frac{1}{m}$ und p gesetzt werden? γ) Eine Rente von 500 *Fl*, am Ende eines jeden Jahres fällig, soll in eine Rente umgewandelt werden, die alle Vierteljahre fällig ist und ebenso lange läuft, wie die erste. Wie hoch wird sich diese Vierteljahrsrente belaufen, wenn Zinseszinsen zu 5 Prozent gerechnet werden?

Antw.: α) 128,578 *Fl*;

β) $\dfrac{100r}{p} \cdot \dfrac{(1+0{,}01p)^{t-n}\,[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{m}} - 1]\,[1+0{,}01p)^n - 1]}{[(1+0{,}01p)^t - 1]}$; γ) 122,72 *Fl*.

67) Es hat ein Waldbesitzer die Verpflichtung, das erforderliche Bauholz zu allen von Zeit zu Zeit vorkommenden Neubauten eines Schulgebäudes unentgeltlich herzugeben. Der Schulvorstand will

aber gegen eine ihm vom Waldbesitzer zu gewährende angemessene jährliche Rente x auf diese Holzgerechtsame für immer verzichten. Es steht nach technischen Ermittelungen fest, daß das Schulgebäude nach seiner gegenwärtigen Beschaffenheit noch n Jahre stehen kann, dann aber mit einem Holzaufwande im Werte von k ℳ neugebaut und dieser Neubau alle m Jahre mit einem gleichen Aufwande wiederholt werden muß. Wie groß ist die Rente x, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $x = \frac{pk(1+0{,}01p)^{m-n}}{100[(1+0{,}01p)^m - 1]}$.

Beispiel: $m = 200$, $k = 10000$, $n = 100$, $p = 4$; $x = 7{,}9229$.

68) α) Eine Jahresrente r steigt n Jahre hindurch jährlich in arithmetischer Progression r, $2r$, $3r$ u. s. w. Welches ist der bare Wert derselben, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $(100 : p)\ [(1+0{,}01p)b - nr(1+0{,}01p)^{-n}]$, wenn b das Resultat der 58sten Aufgabe bezeichnet.

β) Eine Jahresrente r steigt n Jahre hindurch jährlich in geometrischer Progression r, er, e^2r u. s. w. Welches ist der bare Wert, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $r[(e[1+0{,}01p]^{-1})^n - 1] : [e - (1+0{,}01p)]$.

69) Verdünnter Weingeist, welcher in einem Liter c Liter wasserfreien Weingeistes enthält, wird $n$mal hintereinander mit einer $p$fachen Quantität eines anderen Weingeistes versetzt, welcher in einem Liter a Liter wasserfreien Weingeistes enthält. Wieviel wasserfreier Weingeist ist in einem Liter der letzten Mischung enthalten?

Antw.: $a + (c - a) : (p+1)^n$ Liter.

70) Zwei Gefäße, A und B, deren Raum-Inhalte a und a' Liter sind, seien mit einer Mischung von Wasser und Wein gefüllt, und zwar seien in dem ersten Gefäße α, in dem zweiten α' Liter Wein. Mit zwei kleineren Gefäßen, von denen jedes 1 Liter enthält, werde aus jedem Gefäße in das andere wechselseitig, und zwar gleichzeitig, von der Mischung ausgeschöpft. Wieviel Wein befindet sich in jedem Gefäße, wenn diese Operation $n$mal hintereinander geschehen ist?

Antw.: In dem ersten Gefäße:

$$a\frac{\alpha+\alpha'}{a+a'} + \frac{\alpha a' - \alpha' a}{a+a'}\left(1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)^n \text{ Liter.}$$

B. Kettenbrüche und Teilbruchreihen.

§ 85. Kettenbrüche.

1) Was versteht man unter einem Ketten- oder kontinuirlichen Bruche?

2) Die Kettenbrüche:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}},\qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}\qquad \text{und}\ \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

3) Folgende Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln: α) $\frac{3}{16}$; β) $\frac{25}{56}$; γ) $\frac{151}{121}$; δ) $\frac{115}{151}$; ε) $\frac{32280}{86931}$; ζ) $\frac{9976}{6961}$; η) $\frac{76}{123}$.

4) Ebenso: α) $\dfrac{bc+1}{(ab+1)c+a}$; β) $\dfrac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$.

5) Ebenso: α) $\dfrac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$ und

β) $\dfrac{48n^3+188n^2+252n+115}{48n^4+236n^3+464n^2+425n+151}$.

Aufl.: Die Nenner sind: α) a, $a+1$, $a+2$, $a+3$; β) $n+1$, $2n+3$, $4n+5$, $6n+7$.

6) Wie ändert sich ein Kettenbruch, wenn der letzte Bruch im Nenner ausgelassen wird? wie, wenn der letzte und vorletzte, der letzte, vorletzte und drittletzte Bruch u. s. w. ausgelassen werden?

7) Was versteht man unter Näherungs- oder Partialwert eines Kettenbruches? Welches sind die Näherungswerte der Brüche in Nr. 3?

8) Nach welcher Regel kann man aus zweien aufeinander folgenden Näherungswerten eines gegebenen Kettenbruches den auf dieselben folgenden Näherungswert desselben Kettenbruches ableiten?

9) Sind $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ zwei aufeinander folgende Näherungswerte, so ist jedesmal $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n$ entweder $+1$ oder -1. Warum? In welchem Falle $+1$, in welchem -1?

10) Wie groß ist die Differenz zwischen zweien aufeinander folgenden Näherungswerten eines Kettenbruches?

11) Der Unterschied zwischen dem Werte des vollständigen Kettenbruches und einem Näherungswerte ist immer kleiner, als 1, dividiert durch das Quadrat des Nenners des Näherungswertes. Warum?

12) Warum kommt ein Näherungswert eines Bruches dem Werte des ganzen Kettenbruches immer näher, als jeder andere Bruch, dessen Nenner kleiner, als der Nenner des Näherungswertes, ist?

13) Von folgenden Brüchen die Näherungswerte anzugeben:

α) $\frac{479}{6628}$; β) $\frac{55}{117}$; γ) $\frac{251}{1313}$; δ) $\frac{3370}{399}$; ε) $\frac{51}{16}$; ζ) $\frac{3696}{11593}$; η) 2,718 281 828 459.

Aufl.: α) $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{6}{83}$, $\frac{43}{595}$; β) $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{17}$; γ) $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{13}{68}$; δ) 8, $\frac{17}{2}$, $\frac{76}{9}$, $\frac{549}{65}$; ε) 3, $\frac{16}{5}$; ζ) $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{22}{69}$, $\frac{161}{505}$, $\frac{505}{1584}$; η) 2, 3, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{87}{32}$, $\frac{106}{39}$, $\frac{193}{71}$, $\frac{1264}{465}$, $\frac{1457}{536}$ u. s. w.

14) Unter **Nebennäherungs-Brüchen** zwischen den beiden Kettenbrüchen

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

versteht man diejenigen Brüche, welche erhalten werden, wenn man in dem letztern Kettenbruche für d nacheinander die $d-1$ ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... $d-1$ setzt.

So sind z. B. für die Kettenbrüche:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} = \frac{13}{30}, \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}} = \frac{68}{157}$$

die 4 Nebennäherungs-Brüche: $\frac{16}{37}$, $\frac{29}{67}$, $\frac{42}{97}$, $\frac{55}{127}$. Die Differenz zweier aufeinander folgenden Nebennäherungs-Brüche hat zum Zähler ± 1.

15) Wenn (1) $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cfrac{1}{a_n}}} = \frac{p_n}{q_n}$,

so ist (2) $a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cdots\cfrac{1}{a_1}}} = \frac{p_n}{p_{n-1}}$

und (3) $a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cdots\cfrac{1}{a_2}}} = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

Warum?

16) Wenn $p_{n-1} = q_n$, so sind die Kettenbrüche (1) und (2) in Nr. 15 einander gleich, es ist also die Reihe der Zahlen a_1, a_2, a_3, ... a_n **reciprok**, d. h., sowohl ihre Endglieder als auch die gleichweit von den Enden abstehenden Glieder sind einander gleich. Beispiel $\frac{154}{43}$. — Warum ist $p_n q_{n-1} - q_n^2 = (-1)^n$? oder $[q_n^2 + (-1)^n] : p_n$ eine **ganze** Zahl? — Umkehrung.

17) Welche Näherungswerte geben die unendlichen Kettenbrüche:

$$\alpha)\ \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}\cdots}} \quad \text{und} \quad \beta)\ \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}\cdots}}\,?$$

Antw.: α) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{21}{34}$, $\frac{34}{55}$, $\frac{55}{89}$, $\frac{89}{144}$; β) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{13}{34}$, $\frac{21}{55}$, $\frac{34}{89}$, $\frac{55}{144}$ *).

*) Durch die in α) und β) aufeinander folgenden Brüche soll nach **Karl Friedrich Schimper** in Schwetzingen die Stellung der Pflanzenblätter gegen den Stamm, die Anordnung der Schuppen an den Tannenzapfen u. s. w. angegeben werden. Vortrag von **Schimper** über seine Theorie auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart (1834); Referat hierüber von **Alex. Braun** in Flora (1835); **Schimper** ibid. (1857); **Alex. Braun** in d. Jahrb. f. wissensch. Botanik, Bd. I. Die **Schimper**'sche Blattstellungstheorie ist aber in neuerer Zeit mehrfach als unhaltbar angefochten worden.

Folgende Verhältnisse sollen durch kleinere Zahlen dargestellt werden:

18) Das Verhältnis eines Meters, der 443,296 Par. Linien gleich ist, zu dem alten preuß. Fuße, der 139,13 Par. Linien groß ist.

Aufl.: 3 : 1, 16 : 5, 35 : 11, 51 : 16, 137 : 43, 462 : 145 u. s. w.

19) Das Verhältnis eines alten preußischen Zolles zu einem Centimeter.

20) Das Verhältnis eines Meters zu einer alten preuß. Elle (à $25\frac{1}{2}$ Zoll).

21) α) Das Verhältnis eines preußischen Fußes zu einem englischen Fuße = 120000 : 116537; β) das Verhältnis eines preuß. Fußes zu einem österreichischen Fuße à 140,127 Pariser Linien; γ) das Verhältnis eines österreichischen Fußes zu einem Meter.

22) α) Das Verhältnis der alten preußischen Meile (à 24000 Fuß) zu einem Kilometer; β) das Verhältnis einer preußischen Meile zu einer geographischen Meile à 23643 preuß. Fuß.

23) α) Das Verhältnis eines preußischen Quadratfußes zu einem Quadratmeter; β) das Verhältnis eines preußischen Morgens (à 180 Quadratruten) zu einem Hektar; γ) das Verhältnis eines preußischen Morgens zu einem Wiener Joch (à 1600 Quadratklafter à 36 Quadratfuß österr.).

24) α) Das Verhältnis eines preußischen Quarts (à 64 Kubikzoll) zu einem Liter (à 1 Kubikdecimeter); β) das Verhältnis eines Hektoliters zu einer Wiener Metze 1,625897 : 1; γ) das Verhältnis eines Liters zu einem Wiener Maß 0,70665 : 1.

25) Das Verhältnis des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange 1 : 3,1415926536.

Aufl.: 1:3, 7:22, 106:333, 113:355, 33102:103993, 33215:104348.

Bemerkung. Das Verhältnis 7 : 22 war bereits Archimedes bekannt, der angab, daß die Zahl π zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ enthalten sei. Das vierte, 113 : 355, rührt von Adrian Metius her und giebt nur noch einen Fehler von 1 auf etwa 12 Millionen in Teilen des Umfanges. Letzteres Verhältnis läßt sich praktisch leicht auffinden, wenn man nur die drei ersten ungeraden Zahlen doppelt neben einander setzt, 113355, und die sechsziffrige Zahl in zwei dreiziffrige, 113 und 355, zerteilt.

26) Das Verhältnis des Durchmessers eines Kreises zur Seite des dem Kreise an Inhalt gleichen Quadrats 1 : 0,886226925.

Aufl.: 1 : 1, 8 : 7, 9 : 8, 35 : 31, 44 : 39, 123 : 109, 167 : 148, 9642 : 8545 u. s. w.

27) α) Das Verhältnis des Durchmessers einer Kugel zur Seite des ihr an Inhalt gleichen Würfels 1 : 0,805996 ...; β) das Verhältnis der Höhe eines Cylinders, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche, zur Seite eines an Inhalt gleichen Würfels

1 : 0,922635... Aufl.: α) 5 : 4, 31 : 25, 67 : 54, 567 : 457, 3469 : 2796 u. s. w.; β) 12 : 11, 13 : 12, 168 : 155, 349 : 322 u. s. w.

28) Das Verhältnis des mittleren synodischen Mondmonates (d. h. der Zeit von einem Neumonde zum nächstfolgenden) = 29,530588 Tagen zum tropischen Sonnenjahre = 365,24222 Tagen.

Aufl.: 1 : 12, 2 : 25, 3 : 37, 8 : 99, 11 : 136, 19 : 235, 334 : 4131 u. s. w.

Bemerkung. Das Verhältnis 19 : 235 ist etwas zu klein. Da 19 Sonnenjahre sehr nahe 235 synodische Monate ausmachen, so werden nach 19 Jahren demnach die Mondphasen wieder nahezu auf die nämlichen Tage des Jahres fallen. Dieses Verhältnis 19 : 235 war den Alten schon bekannt; der Athener Meton machte nämlich Ol. 86, 4 die für die Zeitrechnung wichtige Entdeckung und gründete hierauf einen 19jährigen Cyklus (Mondzirkel), dessen Anfang er auf Ol. 87, 1 (430 v. Chr.) festsetzte. Das gemeine Jahr hatte 12 Mondmonate, ein Schaltjahr, deren 7 in der 19jährigen Periode eintraten, hatte 13 Mondmonate. Diese 7 Schaltjahre waren das 3., 5., 8., 11., 13., 16. und 19. des 19jährigen Cyklus. Das jedesmalige Jahr dieses Cyklus wurde in den Tempeln mit goldenen Buchstaben aufgezeichnet und hieß deshalb die goldene Zahl (siehe Beispiel 22, § 79). Das nicht so genaue Verhältnis 8 : 99 diente ebenfalls als Grundlage eines älteren, durch Kleostratus aus Tenedos 532 vor Christus eingeführten und von den Griechen angewandten, Cyklus, der sogenannten Oktaëteris, welcher 5 Jahre mit 12 Mondmonaten und 3 Schaltjahre mit 13 Mondmonaten umfaßte, bei welchem das 3., 5. und 8. Jahr Schaltjahre waren.

29) Es soll mit Hülfe der in Nr. 28 bestimmten Näherungsverhältnisse und aus der dem Kalender zu entnehmenden Zeit des zuletzt eingetretenen Vollmondes angegeben werden, welche Phase der Mond am 28. August 1749, dem Geburtstage Goethe's, zeigte. [Siehe Goethe, Aus meinem Leben. Dichtung und Wahrheit.]

30) Das tropische Jahr enthält, genau genommen, 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 47,4 Sekunden. Nach wieviel Jahren von 365 Tagen hat man einen Tag oder mehrere Tage einzuschalten, damit das Sonnenjahr ein festes bleibt?

Antw.: Entweder hat man nach 4 Jahren einen Tag*), oder nach 29 Jahren 7 Tage, oder nach 33 Jahren 8 Tage**), oder nach 128 Jahren 31 Tage***), oder nach 161 Jahren 39 Tage, oder nach 289 Jahren 70 Tage einzuschalten.

---

*) Julianische Einschaltungsmethode, von Julius Cäsar im Jahre 45 vor Christus eingeführt, welche bei den Russen und Griechen noch in Gebrauch ist. Hiervon verschieden ist die vom Papste Gregor XIII. im Jahre 1582 eingeführte Schaltmethode, nach welcher alle 400 Jahre 3 Schalttage ausfallen; daher der jetzige Unterschied von 12 Tagen zwischen unserem, dem gregorianischen Kalender und dem der Russen und Griechen.

**) Persische oder dschelalische Einschaltungsmethode, von dem Sultan Dschelal Eddin Melek Schah im Jahre 1079 nach Christus nach dem Vorschlage von Omar ben Ibrahim Alchayami in Persien eingeführt.

***) In 128 Jahren 31 Tage macht in 384 Jahren 93 Tage; setzt man noch für 16 Jahre 4 Schalttage hinzu, so erhält man für 400 Jahre 97 Schalttage nach der gregorianischen Schaltmethode.

31) Das Verhältnis der großen Achse des Erdsphäroides zur kleinen Achse = 299,152818 : 298,152818 durch kleinere Zahlen auszudrücken.

§ 86.

Teilbruchreihen.

Eine besondere Art von Näherungswerten für vielzifferige gewöhnliche Brüche oder Decimalbrüche, welche von praktischer Anwendung sind, erhält man, wenn man dieselbe in eine Reihe von Brüchen verwandelt, welche alle zum Zähler 1 haben, und von welchen jeder folgende ein aliquoter Teil des unmittelbar vorhergehenden ist, nämlich in eine Reihe von der Form:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}+\frac{1}{xyzuv}+\dots,$$

oder wenn man den ersten Bruch mit A_1, den zweiten mit A_2, den dritten mit A_3 u. s. w. bezeichnet, in eine Reihe von der Form:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}A_1+\frac{1}{z}A_2+\frac{1}{u}A_3+\frac{1}{v}A_4+\dots.$$

Solche aufeinander folgende Brüche sind von dem Verfasser dieser Sammlung „Teilbrüche“ und die Reihen selbst „Teilbruchreihen“ genannt und zuerst zur Darstellung gewöhnlicher Brüche, der Quadrat- und Kubikwurzeln, Logarithmen (§ 87) und der Wurzeln der Gleichungen (§ 102) angewandt worden. Die an gehöriger Stelle gegebenen Anleitungen für die Theorie der Teilbruchreihen reichen für den aufmerksamen Leser vollkommen aus.

Begrenzt man diese Reihe bei irgend einer Stelle, so erhält man einen Näherungswert, der dem wahren Werte um so näher kommt, je mehr Brüche man hinzunimmt.

Man könnte diese Reihe auch durch einen aufsteigenden Kettenbruch*)

$$\frac{1}{x}{}^{+\frac{1}{y}{}^{+\frac{1}{z}{}^{+\frac{1}{u}}}}$$

bezeichnen, bei welchem der Zähler in ähnlicher Weise sich fortsetzt, wie dieses bei den gewöhnlichen Kettenbrüchen mit dem Nenner der Fall ist.

1) α) Die Näherungswerte der Teilbruchreihe

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu} \text{ anzugeben.}$$

Aufl.: $\frac{1}{x}$, $\frac{y+1}{xy}$, $\frac{yz+z+1}{xyz}$, $\frac{yzu+zu+u+1}{xyzu}$.

β) Den Bruch $\frac{1301}{5720}$ in eine Teilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: Es sei $\frac{1301}{5720}=\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}+\dots$; $1301\,x = 5720+\frac{5720}{y}+\frac{5720}{yz}+\frac{5720}{yzu}+\dots$. Da 5720, durch 1301 dividiert, zum Quotienten 4 giebt, x aber (so wie y, z u. s. w.) eine

*) Über diese Brüche vergleiche man: „Die aufsteigenden Kettenbrüche“, von Alfred Kunze, Weimar 1857.

ganze Zahl sein soll, so muß die Summe der in dem Werte von x nach $\frac{5720}{1301}$ folgenden Quotienten wenigstens $= 1$, also x wenigstens $= 4 + 1 = 5$ sein. Man erhält demnach:

$6505 = 5720 + \frac{5720}{y} + \cdots\cdot$ und hieraus

$785y = 5720 + \frac{5720}{z} + \frac{5720}{zu} + \cdots\cdot;$ mithin $y = 8$;

$560z = 5720 + \frac{5720}{u} + \cdots;$ $z = 11$;

$440u = 5720 + \cdots\cdot;$ $u = 13$.

Es ist demnach: $\frac{1301}{5720} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13}$ $= \frac{1}{5} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{11}A_2 + \frac{1}{13}A_3$. Die Näherungswerte sind $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{100}{440} = \frac{5}{22}$. Die aus dem Kettenbruche abgeleiteten Näherungswerte sind: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{5}{22}$, $\frac{58}{255}$, $\frac{237}{1042}$, $\frac{532}{2339}$.

Zum schnellen Ausrechnen der Teiler 5, 8, 11 und 13 dient folgendes Schema:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & & 5720 : 1301 & = 5 = x \\
 & & & 6505 & \\
 & & 5720 : 785 & & = 8 = y \\
 & & 6280 & & \\
 & 5720 : 560 & & & = 11 = z \\
 & 6160 & & & \\
5720 : 440 & & & & = 13 = u.
\end{array}
$$

Nimmt man die Zahlen x, y, z u. s. w. so klein als möglich, d. h. um 1 größer, als die ganzen Quotienten der Divisionen $5720 : 1301$, $5720 : 785$ u. s. w., so müssen dieselben allmählich zunehmen, indem die Divisoren 1301, 785 u. s. w., allmählich abnehmen. Die auf diese Weise sich ergebende Teilbruchreihe ist notwendig bei allen endlichen Brüchen eine begrenzte. Der Bruch $\frac{1301}{5720}$ läßt sich aber noch auf mehrfache Weise in eine Reihe von Teilbrüchen verwandeln, wenn man nämlich x entweder $= 6$ oder $= 7$ u. s. w. setzt. Es wird alsdann die verlangte Reihe:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{11}A_2 + \frac{1}{30}A_3 + \frac{1}{80}A_4 + \cdots$$
oder $$\frac{1}{7} + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{10}A_3 + \frac{1}{20}A_4 + \cdots$$

Obgleich es im allgemeinen am besten ist, die Zahlen x, y, z, u. s. w. so klein als möglich zu nehmen, so ist es doch von praktischem Vorteile, für x, y, z solche Zahlen zu wählen, mit welchen sich bequem dividieren läßt, z. B. 10 anstatt 9, 20 anstatt 19 u. s. w. Nimmt man für x, y, z nicht die kleinsten Werte, so kann der Bruch sich in eine periodische Teilbruchreihe verwandeln; so wird z. B.: $\frac{1}{5} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{7}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \cdots$ (Periode der Teiler 7, 3), $\frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \cdots\cdot$

γ) Den Bruch $\frac{M}{N}$ in eine Teilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: Es sei $\frac{M}{N} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} + \cdots;$ dann ist

$Mx - N = \frac{N}{y} + \frac{N}{yz} + \frac{N}{yzu} + \frac{N}{yzuv} + \cdots\cdot$ Da $Mx > N$ sein muß,

so nehme man die ganze Zahl x so, daß $x > \frac{N}{M}$ wird. Aus der obigen

Gleichung folgt: $(Mx - N)y - N = \frac{N}{z} + \frac{N}{zu} + \cdots$ Die ganze Zahl y wähle man so, daß $y > \frac{N}{Mx - N}$ wird; alsdann ist:

$$[(Mx - N)y - N]z - N = \frac{N}{u} + \frac{N}{uv} + \cdots$$

Die ganze Zahl z erhält man aus $z > \frac{N}{(Mx - N)y - N}$ und so weiter fort. Sollen x, y, z möglichst klein werden, so muß $x - 1 < \frac{N}{M}$, $y - 1 < \frac{N}{Mx - N}$, $z - 1 < \frac{N}{(Mx - N)y - N}$ sein.

2) Man soll den Bruch $\frac{213}{749}$ in eine Teilbruchreihe verwandeln und die Näherungswerte bestimmen.

Aufl.: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{10}A_2 + \frac{1}{749}A_3$. Näherungswerte: $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{91}{320}$. Die Kettenbrüche geben: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{29}{102}$, $\frac{31}{109}$, $\frac{91}{320}$.

3) Ebenso die Brüche $\frac{81}{209}$ und 0,503398.

4) Ebenso die Brüche in § 85, Nr. 13.

5) Bei den Römern wurde ein As in 12 Unzen à 6 Sextulae geteilt. Es soll $\frac{1}{100}$ As in einer Reihe von Teilbrüchen einer Sextula dargestellt werden*).

Aufl.: $\frac{72}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{4}A_3 + \frac{1}{6}A_4 + \frac{1}{13}A_5 + \frac{1}{25}A_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{25}A_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 - \frac{1}{25}A_3$.

6) Man soll das Verhältnis eines Meters zu einem preuß. Fuße, 3,186199 : 1, und umgekehrt, durch eine Teilbruchreihe darstellen.

Aufl.: $3{,}186199 : 1 = 3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}A_1 + \frac{1}{19}A_2 + \frac{1}{25}A^3 + \cdots = 3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}A_1 + \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{40}A_3 + \frac{1}{4}A_4 + \cdots$; $1 : 3{,}186199 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{46}A_2 - \frac{1}{266}A_3 \cdots = \frac{1}{3} - \frac{1}{17}A_1 + \frac{1}{153}A_2 - \cdots$.

7) Das Verhältnis eines Liters zu einem preußischen Quart = 1 : 1,14503 in eine Reihe von Teilbrüchen zu verwandeln.

8) Die Zahlen $\pi = 3{,}1415926536$ und $1 : \pi$ in Teilbruchreihen zu verwandeln.

Aufl.: $\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{17}A_2 + \frac{1}{19}A_3 + \frac{1}{300}A_4 + \cdots = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{113}A_1 - \frac{1}{4739}A_2 + \frac{1}{47051}A_3 + \frac{1}{499762}A_4 \cdots = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{100}A_1 + \frac{1}{10}A_2 + \frac{1}{7}A_3 + \frac{1}{25}A_4 \cdots (= 3{,}1415926536 \cdot\cdot)$
$1 : \pi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{11}A_2 + \frac{1}{50}A_3 + \frac{1}{8}A_4 + \cdots = \frac{1}{3} - \frac{1}{22}A_1 + \frac{1}{118}A_2 - \frac{1}{354}A_3 \cdots = \frac{1}{3} - \frac{1}{25}A_1 - \frac{1}{8}A_2 - \frac{1}{70}A_3 \cdots$.

9) Den Überschuß eines tropischen Jahres, 5 Stunden 48

*) Hor. de arte poëtica, 325: „Romani pueri longis rationibus assem discunt in partes centum diducere."

Minuten 47,4 Sekunden über 365 Tage, in eine Reihe von Teilbrüchen eines Tages zu verwandeln.

Aufl.: $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} A_1 + \frac{1}{18} A_2 - \frac{1}{320} A_3 \ldots = \frac{1}{4} - \frac{1}{25} A_1 + \frac{1}{4} A_2 - \frac{1}{10} A_3 - \frac{1}{8} A_4 - \frac{1}{5} A_5 \ldots$ *).

10) Welchem Bruche ist die Teilbruchreihe $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} A_1 + \frac{1}{c} A_2 + \frac{1}{d} A_3 + \frac{1}{e} A_4$ gleich?

11) Welchen Brüchen sind folgende periodische Teilbruchreihen gleich?

α) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} A_1 + \frac{1}{3} A_2 + \frac{1}{5} A_3 + \ldots$ (Periode der Divisoren 3, 5);

β) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} A_1 + \frac{1}{11} A_2 + \frac{1}{3} A_3 + \frac{1}{7} A_4 + \ldots$ (Periode 3, 7, 11);

γ) $\frac{1}{5} + \frac{1}{9} A_1 + \frac{1}{12} A_2 + \frac{1}{17} A_3 + \frac{1}{5} A_4 + .$ (Periode, 5, 9, 12, 17);

δ) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} A_1 + \frac{1}{a} A_2 + \frac{1}{b} A_3 + \ldots$ (Periode a, b);

ε) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} A_1 + \frac{1}{c} A_2 + \frac{1}{d} A_3 + \frac{1}{e} A_4 + \frac{1}{a} A_5 + \ldots$;

ζ) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} A_1 + \frac{1}{m} A_2 + \frac{1}{n} A_3 + \frac{1}{p} A_4 + \frac{1}{m} A_5 +$ u. s. w. (Periode m, n, p).

Aufl.: α) $\frac{3}{7}$; β) $\frac{89}{230}$; γ) $\frac{2058}{9179}$; δ) $(b+1) : (ab-1)$;
ε) $\frac{bcde + cde + de + e + 1}{abcde - 1}$; ζ) $\frac{(b+1)(mnp-1) + np + p + 1}{(mnp-1)ab}$.

§ 87.

Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen und der Kongruenzen, zur Auffindung der Quadratwurzeln und Logarithmen. Berechnung der Quadrat-, Kubikwurzeln u. s. w. und der Logarithmen durch Teilbruchreihen.

1) Mittels Kettenbrüche die unbestimmten Gleichungen α) $ax - by = 1$, β) $ax + by = 1$ aufzulösen, wenn a und b relative Primzahlen sind.

2) Die unbestimmte Gleichung $ax \pm by = c$ aufzulösen.

Verwandelt man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch, so ist, wenn der dem vollständigen Bruche vorangehende Näherungswert $\frac{p_n}{q_n}$ heißt, nach Nr. 9 in § 85: $aq_n - bp_n$ entweder $= +1$ oder $= -1$; im ersten Falle sind $x = q_n + bk$, $y = p_n + ak$, im zweiten Falle $x = -q_n + bk$, $y = -p_n + ak$ die Wurzelwerte der Gleichung $ax - by = 1$. Die Auflösung der Gleichung $ax + by = 1$ erhält man im ersten Falle durch $x = q_n + bk$, $y = -p_n - ak$,

*) Die drei ersten Glieder dieser zweiten Reihe geben die gregorianische Schaltmethode an. (S. Beispiel 30, § 85.)

im zweiten Falle durch $x = -q_n + bk$, $y = p_n - ak$. Die Auflösung der Gleichung $ax \mp by = c$ ergiebt sich, wenn man in den für die Gleichungen $ax \mp by = 1$ gefundenen Werten von x und y cq_n statt q_n und cp_n statt p_n setzt.

3) Folgende unbestimmte Gleichungen aufzulösen:

$\alpha)\ 7x = 11y + 1$; $\beta)\ 34x - 21y = 1$;
$\gamma)\ 34x = 41y + 1$; $\delta)\ 117x + 121y = 1$;
$\varepsilon)\ 41x + 29y = 1$; $\zeta)\ 99x - 70y = 13$;
$\eta)\ 17x - 19y = 23$; $\vartheta)\ 19x - 11y = 112$;
$\iota)\ 222x - 383y = 6533$.

Aufl.: $\alpha)\ x = 8 + 11n,\ y = 5 + 7n$; $\beta)\ x = 13 + 21n,\ y = 21 + 34n$; $\gamma)\ x = 35 + 41n,\ y = 29 + 34n$; $\delta)\ x = 30 + 121n,\ y = -29 - 117n$; $\varepsilon)\ x = -12 + 29n,\ y = 17 - 41n$; $\zeta)\ x = 27 + 70n,\ y = 38 + 99n$; $\eta)\ x = 17 + 19n,\ y = 14 + 17n$; $\vartheta)\ x = 14 + 11n,\ y = 14 + 19n$; $\iota)\ x = 390 + 383n,\ y = 209 + 222n$.

4) Die Kongruenz $ax \equiv b \pmod m$ aufzulösen.

Man löse $ax \equiv 1 \pmod m$ mit Hülfe der Kettenbrüche (s. Nr. 2) auf; ist $x \equiv v \pmod m$ die Wurzel dieser Kongruenz, so ist $x \equiv bv \pmod m$ die Wurzel der Kongruenz $ax \equiv b \pmod m$.

5) Aus 47 die Quadratwurzel mit Hülfe eines Kettenbruches zu ziehen*).

Aufl.: $x = \sqrt{47} = 6 + \frac{\sqrt{47} - 6}{1} \left(= \frac{1}{\alpha}\right)$,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{47} - 6} = \frac{\sqrt{47} + 6}{11} = 1 + \frac{\sqrt{47} - 5}{11} \left(= \frac{1}{\alpha'}\right),$$

$$\alpha' = \frac{11}{\sqrt{47} - 5} = \frac{\sqrt{47} + 5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{47} - 5}{2} \left(= \frac{1}{\alpha''}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{2}{\sqrt{47} - 5} = \frac{\sqrt{47} + 5}{11} = 1 + \frac{\sqrt{47} - 6}{11} \left(= \frac{1}{\alpha'''}\right),$$

$$\alpha''' = \frac{11}{\sqrt{47} - 6} = \frac{\sqrt{47} + 6}{1} = 12 + \frac{\sqrt{47} - 6}{1} \left(= \frac{1}{\alpha}\right).$$

$$\sqrt{47} = 6 + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \text{rc.}$$

Näherungswerte: $6\frac{1}{1}$, $6\frac{5}{6}$, $6\frac{7}{8}$.

6) Warum bildet bei der Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch die Reihe der Quotienten eine Periode?

*) Eine ähnliche Methode, die dritte, vierte u. s. w. Wurzel einer Zahl in einen Kettenbruch zu verwandeln, findet sich in Schlömilchs Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., 1865, S. 315.

7) α) $\sqrt{2}$, β) $\sqrt{11}$, γ) $\sqrt{41}$, δ) $\sqrt{7}$, ε) $\sqrt{31}$ in Kettenbrüche zu verwandeln und die Näherungswerte derselben anzugeben.

Aufl.: α) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$; β) $3, 3\frac{1}{3}, 3\frac{6}{19}, 3\frac{19}{60}, 3\frac{120}{379}, 3\frac{379}{1197}, 3\frac{2394}{7561}$; γ) $6, 6\frac{1}{2}, 6\frac{2}{5}, 6\frac{25}{62}, 6\frac{52}{129}, 6\frac{129}{320}$; δ) $2, 3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{9}{14}, 2\frac{11}{17}, 2\frac{20}{31}$; ε) $5, 6, 5\frac{1}{2}, 5\frac{4}{7}, 5\frac{21}{37}, 5\frac{67}{118}, 5\frac{88}{155}$.

8) $\sqrt{n^2+1}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl.: $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{x}$, $x = 2n + \frac{1}{x}$,

$$\sqrt{n^2+1} = n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n \ldots}}$$

9) Wie groß sind die unendlichen periodischen Kettenbrüche:

α) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots$, β) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots$, γ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots$,

δ) $3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$, ε) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$,

ζ) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \cdots$, η) $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}$?

Aufl.: α) $\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 3)$; β) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$; γ) $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$;

δ) $\frac{1}{36}(\sqrt{3601} + 55)$; ε) $\frac{1}{16}(\sqrt{3601} - 55)$;

ζ) $\frac{1}{302}(\sqrt{2235029} - 1265)$;

η) $$\frac{-(abc + a + c - b) + \sqrt{(abc + a + c + b)^2 + 4}}{2(ab+1)}.$$

10) Die Gleichung des zweiten Grades $x^2 - ax = b$ durch einen Kettenbruch aufzulösen.

Aufl.: $x = a + \frac{b}{x} = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{x}} = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}$

Setzt man $\frac{a}{b} = c$, so wird $x_1 = a + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \cdots}}}$,

$$x_2 = -\frac{b}{x_1} = -\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}$$

Beispiel: $x^2 - 24x = 3$; Antw.: $x_1 = 24, 24\frac{1}{8}, 24\frac{24}{193}, 24\frac{193}{1552}, 24\frac{4656}{37441}$; $x_2 = 0, -\frac{1}{8}, -\frac{24}{193}, -\frac{193}{1552}, -\frac{4656}{37441}$.

11) Den Logarithmus einer Zahl in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl.; a sei die gegebene Zahl, x ihr Logarithmus, b die Basis.
Man bestimme die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ so, daß

$b^{\alpha+1} > a > b^{\alpha}$, und setze $a : b^{\alpha} = c$;
$c^{\beta+1} > b > c^{\beta}$, und setze $b : c^{\beta} = d$;
$d^{\gamma+1} > c > d^{\gamma}$, und setze $c : d^{\gamma} = e$;
$e^{\delta+1} > d > e^{\delta}$ u. s. w.;

alsdann ist $x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta} + \cdots}}$

Für Logarithmus 195 ist $b = 10$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 3$, $\zeta = 2$, $c = 1{,}95$, $d = 1{,}34864$, $e = 1{,}07211$, $f = 1{,}02077$. Die Näherungswerte für den Logarithmus von 195 sind 2, $\frac{7}{3}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{71}{31}$, $\frac{229}{100}$, $\frac{529}{231}$. Der letzte Näherungswert $\frac{529}{231} = 2{,}29004$ gibt den Logarithmus bis auf 0,00001 genau an.

12) Den Logarithmus von 54321 zu suchen.
Aufl.: Die Näherungswerte sind: 4, 5, $\frac{14}{3}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{71}{15}$, $\frac{161}{34}$, $\frac{393}{83}$, $\frac{1733}{366}$.

13) Den Logarithmus von 3,1415926 zu berechnen.
Aufl.: Die Näherungswerte sind: $\frac{1}{2}$, $\frac{87}{175}$, $\frac{349}{702}$, $\frac{436}{877}$, $\frac{785}{1579}$, $\frac{1221}{2456}$.

14) $\sqrt{19}$ in eine Reihe von Teilbrüchen zu verwandeln.
Aufl.: $\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} + \cdots$,

$$19 = 16 + \frac{8}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right)^2,$$

$$3x = 8 + 8\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right) + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right)^2,$$

$$x = 3;\ 1 = 8\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \cdots\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{y} \cdots\right)^2,$$

$$3 = 24\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \cdots\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right)^2,$$

$$2 = 26\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} \cdots\right)^2,$$

$$2y = 26 + 26\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} \cdots\right) + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu} \cdots\right)^2,$$

$$y\ (> 13) = 14.$$

$$2 = 26\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + \cdots\right) + \frac{1}{14}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu} \cdots\right)^2,$$

$$27z = 366 + 366\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + \cdots\right) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{uv} \cdots\right)^2,$$

$$z\ (> 13) = 14 \text{ u. s. w.}$$

Schema zum abgekürzten Berechnen von $\sqrt{19}$.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.	Negativer Rest.
1)			$4 = a$	$3 = r_1$
2)	3	8	$3 = x$	$1 = r_2$
3)	2	26	$14 = y$	$2 = r_3$
4)	27	366	$14 = z$	$12 = r_4$
5)	167	5126	$31 = u$	$51 = r_5$
6)	1580	158908	$101 = v$	

Erklärung. 1) $r_1 = 19 - 4^2$.
2) Divisor $3 = r_1$; Dividend $8 = 2 \cdot a = 2 \cdot 4$;
3) Divisor $2 = x \cdot r_2 - 1 = 3 \cdot 1 - 1$; Dividend $26 = 8 \cdot x = 2$;
4) Divisor $27 = y \cdot r_3 - 1 = 14 \cdot 2 - 1$;
Dividend $366 = 26 \cdot y + 2 = 26 \cdot 14 + 2$;
5) $167 = 14 \cdot 12 - 1$; $5126 = 366 \cdot 14 + 2$;
6) $1580 = 31 \cdot 51 - 1$; $158\,908 = 5126 \cdot 31 + 2$;

$\sqrt{19}$ ist also $= 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{14}A_1 + \frac{1}{14}A_2 + \frac{1}{31}A_3 + \frac{1}{101}A_4 + \cdots = 4{,}358\,898\,92$.

15) α) $\sqrt{5}$, β) $\sqrt{31}$ zu entwickeln.

Antw.: α) $2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{13}A_2 + \frac{1}{16}A_3 + \frac{1}{18}A_4 = 2{,}236\,068$;
β) $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{12}A_2 + \frac{1}{93}A_3 + \frac{1}{2162}A_4 = 5{,}567\,764\,362\,8$.

16) Ebenso: α) $\sqrt{2}$; β) $\sqrt{3}$.

Aufl.: α) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{34}A_2 - \frac{1}{1100}A_3 + \frac{1}{20}A_4 - \frac{1}{16}A_5 \cdots$;
β) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{14}A_2 - \frac{1}{200}A_3 - \frac{1}{30}A_4 + \frac{1}{20}A_5 + \frac{1}{3}A_6 - \frac{1}{4}A_7 \cdots$

16) $\sqrt[3]{388}$ in eine Teilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: $\sqrt[3]{388} = a + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \cdots$; $a = 7$;

$$388 = 343 + 147\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{xy}\cdots\right) + 21\left(\frac{1}{x}\cdots\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\cdots\right)^3,$$

$$45x = 147 + 147\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + \frac{21}{x}\left(1 + 2\left\{\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right\} + \left\{\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right\}^2\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + 3\left\{\frac{1}{y} + \cdots\right\} + 3\left\{\frac{1}{y}\cdots\right\}^2 + \left\{\frac{1}{y}\cdots\right\}^3\right),$$

$x = 4\,(> 147 : 45)$;

$$33 \cdot 4^2 - 21 \cdot 4 - 1 = [147 \cdot 4^2 + 21 \cdot 4 \cdot 2 + 3]\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + [21 \cdot 4 + 3]\left(\frac{1}{y} + \cdots\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right)^3;$$ d. i.:

$$443 = 2523\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + 87\left(\frac{1}{y} + \cdots\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \cdots\right)^3$$ u. s. w.,

wodurch man $y = 6$, $z = 22$, $u = 27$ erhält.

Schema zum schnellen Berechnen von $\sqrt[3]{388}$.

	Divisor.	Dividend.	Quotient.	Negat. Rest.	Koeff. d. 2. Pot.
1)			$7 = a$	45	
2)	45	147	$4 = x$	33	21
3)	443	2523	$6 = y$	135	87
4)	4337	91 875	$22 = z$	3539	525
5)	1 701 325	44 490 603	$27 = u$	445 172	

Erklärung. 1) Rest $45 = 388 - a^3 = 388 - 7^3$;
2) Divisor $45 =$ Rest 45; Dividend $147 = 3 \cdot a^2$; Koeffizient $21 = 7 \cdot 3$;
3) $443 = 33 \cdot x^2 - 21x - 1$; $2523 = 147 \cdot x^2 + 21 \cdot x \cdot 2 + 3$;
$87 = 21 \cdot x + 3$;
4) $4337 = 135 \cdot y^2 - 87 \cdot y - 1$; $91\,875 = 2523 \cdot y^2 + 87 \cdot y \cdot 2 + 3$;
$525 = 87 \cdot y + 3$;

5) ergiebt sich auf dieselbe Weise wie 4).
Die Teilbruchreihe ist demnach $= 7 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} A_1 + \frac{1}{22} A_2 + \frac{1}{27} A_3 + \frac{1}{31} A_4 + \frac{1}{151} A_5 \cdots = 7 + 0{,}25 + 0{,}041\,666\,66 + 0{,}001\,893\,93 + 0{,}000\,070\,15 + 0{,}000\,002\,23 + 0{,}000\,000\,02 = 7{,}293\,633\,0$ (3).

18) Zu entwickeln: $\alpha)\ \sqrt[3]{43}$; $\beta)\ \sqrt[3]{2}$; $\gamma)\ \sqrt[3]{13}$; $\delta)\ \sqrt[3]{36}$.

Aufl.: $\alpha)\ 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{148} A_1 + \frac{1}{172} A_2 = 3{,}503\,398\,1$;
$\beta)\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} A_1 + \frac{1}{32} A_2 + \frac{1}{65} A_3 = 1{,}259\,920\,5$;
$\gamma)\ 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{19} A_1 + \frac{1}{39} A_2 + \frac{1}{60} A_3 = 2{,}351\,334\,5$;
$\delta)\ 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} A_1 + \frac{1}{28} A_2 + \frac{1}{461} A_3 = 3{,}301\,937\,2$.

Bemerkung. Nach derselben Methode lassen sich die 4ten, 5ten u. s. w. Wurzeln aus Zahlen in Teilbruchreihen verwandeln.

19) Den Logarithmus von 195 in eine Teilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: Es sei $195 = 10^{2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \cdots}$

$1{,}95^{\alpha} = 10 \cdot 10^{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \cdots}$; $\alpha = 4$; $1{,}95^{4} = 14{,}459\,006\,25$;

$1{,}445\,900\,625^{\beta} = 10 \cdot 10^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma\delta}}$; $\beta = 7$; $1{,}445\,900\,625^{7} = 13{,}2120 \ldots$ u. s. w. Es ist also $\log 195 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} A_1 + \frac{1}{9} A_2 + \frac{1}{12} A_3 + \frac{1}{16} A_4 \ldots = 2{,}290\,03$.

Sechster Abschnitt.

Permutationen, Kombinationen, Variationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurierte Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung *).

§ 88.

Permutationen.

Die Anzahl der Permutationen für eine Anzahl von n Elementen werde mit $P(n)$ oder P_n, und $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ werde mit $n!$ **) bezeichnet.

1) Was versteht man unter einer Gruppe oder Komplexion? was unter Element? was unter Zeiger (Index)? Wie werden

*) Über Permutationen u. s. w. vergleiche man die ausgezeichnete Schrift A. v. Ettingshausens: „Die kombinatorische Analysis. Wien, 1829.“
**) Die Bezeichnung $n!$ ist durch Kramp eingeführt. Siehe „Élémens d'Arithmétique universelle. Cologne 1808.“

die Elemente bezeichnet? Was versteht man unter Elementen höheren Ranges? Was versteht man unter einer gutgeordneten Komplexion? Was versteht man unter Komplexionen höheren Ranges?

2) Was nennt man Permutieren oder Versetzen?

3) Es sollen alle Permutationen der Komplexion α) *ab*, β) *abc*, γ) *abcd*, δ) *abcde* gebildet werden.

4) Welches Gesetz befolgt man, um alle möglichen Permutationen einer gegebenen Komplexion darzustellen?

Bemerkung. Eine besondere Methode der Permutation besteht darin, daß man nach und nach alle Permutationen durch Umtauschung von jedesmal 2 Elementen ableitet. (S. Gallenkamp, Elem. der Math. § 110.) Bei drei Elementen ergiebt sich folgende Reihenfolge der Permutationen, wenn man nach und nach 3 mit 2, 2 mit 1, 1 mit 3, 3 mit 2, 2 mit 1 vertauscht:

123, 132, 231, 213, 312, 321.

5) Wie findet man $P(4)$ aus $P(3)$, $P(5)$ aus $P(4)$ und allgemein $P(n+1)$ aus $P(n)$?

6) Wie groß ist $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, $P(9)$, $P(10)$, $P(11)$, $P(12)$, und allgemein $P(n)$, wenn alle Elemente untereinander ungleich sind?

7) Wie groß ist $P(n)$, α) wenn unter den n Elementen p gleiche vorkommen, β) wenn außer den p gleichen auch noch q gleiche und r gleiche vorkommen?

8) Wieviel Mal lassen sich die Faktoren der Produkte α) $abcdefgh$, β) $a^2b^3 = aabbb$, γ) $a^4b^7c^2$, δ) $m^3n^3p^3$, ε) $n^7p^5qr^2$, ζ) $a^2b^2c^3d^2e$, η) $a^{n-1}b$, ϑ) $a^{n-2}b^2$, ι) $a^{n-3}b^3$, κ) $a^{n-x}b^x$, λ) $a^{n-5}b^3c^2$, μ) $a^{n-x-y}b^xc^y$ versetzen?

9) Wenn alle Permutationen der Komplexion *abcdef* lexikographisch hingeschrieben werden, die wievielte Komplexion ist *dbafce*? Antw.: Die 389ste.

10) Die wievielte Permutation ist *hdflaimbgeknc* von der Komplexion *abcdefghiklmn*? Antw.: Die 3489840778ste.

11) α) Die 76ste Permutation von *abcde*, β) die 1832ste Permutation von *ghiklmn*, γ) die 299318te Permutation von *opqrstuvx* und δ) die 4237758154ste Permutation von *abcdefghiklmn* zu bestimmen. A.: *daceb*, *ilhkgnm*, *vrquptoxs*, *imblcdafghkne*.

12) Die wievielte Permutation ist *cbabab* von *aabbbc*?

13) Die 8757ste Permutation von *aaaabbcccd* anzugeben.

14) Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine Inversion (dérangement, variation), wenn das voranstehende Element des Paares höher ist, als das nachstehende Element. Wie-

viel Inversionen enthält hiernach α) die Komplexion *bdca*; β) die Komplexion *fcedab*? Antw.: α) 4; β) 12.

15) Die Anzahl der in einer Komplexion vorhandenen Inversionen ändert sich durch Vertauschung von zwei Elementen um eine ungerade Zahl. Warum?*)

Zusatz. Nach der in der Bemerkung in Nr. 4 angegebenen Methode der Permutationen sind also die, in den aufeinander folgenden Permutationen vorhandenen Inversionen abwechselnd von gerader und ungerader Zahl. Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es also ebensoviel gerade Permutationen (mit gerader Anzahl von Inversionen), als ungerade Permutationen (mit ungerader Anzahl von Inversionen).

§ 89.

Kombinationen und Variationen.

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholung wird durch $\underset{r}{C}(n)$ und mit Wiederholung durch ${}^{w}\underset{r}{C}(n)$ bezeichnet.

Unter Variieren versteht man im allgemeinen aus jeder von mehreren abgesonderten Elementarreihen, so oft es angeht, ein Element, aber jedesmal nur eines, herausnehmen und zur Bildung einer Komplexion verwenden.

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholung wird durch $\underset{r}{V}(n)$ und mit Wiederholung durch ${}^{w}\underset{r}{V}(n)$ bezeichnet.

Der häufig vorkommende, im Divisor und im Dividend n Faktoren enthaltende Quotient:
$\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)\dots(b-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}$ wird mit $\binom{b}{n}$**) bezeichnet und b über n gelesen. b heißt die Basis, n der Zeiger; der obige Ausdruck wird deshalb auch „b mit dem Zeiger n" gelesen. $\binom{7}{3} = 35$.

1) Was heißt: n Elemente zu 2, 3, 4 mit oder ohne Wiederholung kombinieren?

2) Die Elemente a, b, c, d zu 2 und 3 ohne Wiederholung zu kombinieren.

3) Die Anzahl aller Unionen, Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen der Elemente a, b, c, d, e, f zu bestimmen.

4) Die Anzahl aller Kombinationen mit Wiederholung der Elemente a, b, c, d zur 1., 2., 3., 4. Klasse anzugeben.

5) Wieviel Mal lassen sich 6 Elemente zu 1, 2, 3, 4, 5, 6 α) mit, β) ohne Wiederholung kombinieren?

---

*) Man vergleiche die beiden Schriften von Dr. Richard Baltzer: „Die Elemente der Mathematik, 1. Band (1865)" und „Theorie und Anwendung der Determinanten", und Dr. J. Dieckmann: „Determinanten".

**) Diese Bezeichnung rührt von Euler (Acta Petrop. V. 1. p. 89) her. Andere bezeichnen diesen Quotienten mit b_n.

6) Wieviel Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen sind in 90 Nummern enthalten?

Antw.: 4005 Amben, 117 480 Ternen, 2 555 190 Quaternen, 43 949 268 Quinternen.

7) Wie groß ist α) $\underset{2}{C}(n)$; β) ${}^{w}\underset{2}{C}(n)$; γ) $\underset{3}{C}(n)$; δ) ${}^{w}\underset{3}{C}(n)$?

Antw.: α) $\binom{n}{2}$; β) $\binom{n+1}{2}$; γ) $\binom{n}{3}$; δ) $\binom{n+2}{3}$.

8) Wie groß ist α) $\underset{r}{C}(n)$; β) ${}^{w}\underset{r}{C}(n)$? γ) Wieviel Elemente geben ebensoviel Kombinationen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholung, als n Elemente Kombinationen mit Wiederholung geben?

Antw.: α) $\binom{n}{r}$; β) $\binom{n+r-1}{r}$; γ) ${}^{w}\underset{r}{C}(n) = \underset{r}{C}(n+r-1)$.

9) $\underset{r}{C}(n) = \underset{n-r}{C}(n)$. Warum?

10) Wie läßt sich $\underset{r+1}{C}(n)$ aus $\underset{r}{C}(n)$ ableiten?

11) Die wievielte Kombination zur 4ten Klasse ist *ruxz* von den 25 Buchstaben des Alphabets? Antw.: Die 12 569ste.

12) Auf wievielerlei Arten lassen sich n Elemente in mehrere Partieen so zerlegen, daß die erste α, die zweite β, die dritte γ u. s. w., die letzte μ Elemente enthält?

13) Wieviel Mal läßt sich α) das Produkt *abcd*, β) das Produkt *abcdef* in Produkte von 2 Faktoren zerlegen? Auf wieviel Arten läßt sich γ) das Produkt *abcdef*, δ) das Produkt *abcdefghi* in Produkte von drei Faktoren zerlegen?

Antw.: α) Auf 3, β) auf 15, γ) auf 10, δ) auf 280 Arten.

14) Auf wieviel Arten läßt sich α) ein aus $2n$ Faktoren bestehendes Produkt in Produkte von 2 Faktoren, β) ein aus $3n$ Faktoren bestehendes Produkt in Produkte von 3 Faktoren, γ) ein aus mn Faktoren bestehendes Produkt in Produkte von m Faktoren zerlegen? Antw.: Auf α) $\frac{(2n)!}{n!\,2^n}$, β) $\frac{(3n)!}{n!\,6^n}$ γ) $\frac{(mn)!}{n!\,(m!)^n}$ Arten.

15) Man bilde die Variationen für die Reihen *abc*, $\alpha\beta\gamma\delta$ und *AB*.

16) Ebenso für die Reihen *ab*, a, $\alpha\beta\gamma$, *ABCDE*.

17) Wie groß ist die Anzahl aller möglichen Variationen, wenn die Elementenmengen der einzelnen Reihen m, n, p, q sind?

18) Die Elemente *abc* zu 2, 3, 4 mit und ohne Wiederholung zu variieren.

19) Ebenso die Elemente *abcd* zu 2 und 3, und *abcde* zu 2 mit und ohne Wiederholung.

20) Wie groß ist α) $\overset{w}{\underset{2}{V}}(n)$; β) $\overset{w}{\underset{3}{V}}(n)$; γ) $\overset{w}{\underset{r}{V}}(n)$?

Antw.: α) n^2; β) n^3; γ) n^r.

21) Wie groß ist $\underset{r}{V}(n)$?

Antw.: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \underset{r}{C}(n) \cdot P(r)$.

22) Die wievielte Variation α) mit oder β) ohne Wiederholung ist *cmdx* von den 25 Buchstaben des Alphabets?

Antw.: α) Die 38223ste; β) die 29412te.

23) α) Die zweite, β) die dritte, γ) die vierte und δ) die fünfte Kombinationsklasse der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zur Summe a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6 zu bilden.

24) α) Die zweite, β) die dritte, γ) die vierte, δ) die fünfte Variationsklasse der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zur Summe a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6 zu bilden.

25) Wie groß ist die Anzahl der Variationen der Zahlen 0, 1, 2, 3 ... n zur Summe n zur zweiten Klasse? Antw.: $n+1$.

26) Wie groß ist die Anzahl der Variationen der Zahlen 0, 1, 2 ... n zur Summe n α) zur dritten Klasse, β) zur vierten Klasse, γ) zur fünften Klasse u. s. w., δ) zur $r$ten Klasse, oder $\overset{s=n}{V}(3)$, $\overset{s=n}{V}(4)$, $\overset{s=n}{V}(5)$, $\overset{s=n}{V}(r)$?

Bemerkung. Gemäß der in § 66 S. 202a gegebenen Definitionen versteht man unter der Determinante des Systems von n^2 Elementen

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = | \, a_{1,1} \, a_{2,2} \ldots a_{n,n} \, |$$

das Aggregat aller Produkte von je n solchen Elementen, die sämtlich verschiedenen Zeilen und Kolumnen angehören. Das Anfangsglied der Determinante ist das Produkt der Elemente der Diagonalreihe $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$, aus welchem die übrigen Glieder abgeleitet werden, indem man die ersten Indices permutiert und die zweiten unverändert läßt, oder umgekehrt. Das erste Verfahren entspricht dem Fortschreiten in den Kolumnen, das zweite dem Fortschreiten von Zeile zu Zeile. Da gemäß § 66 Nr. 16 das Vorzeichen eines jeden Produktes durch Permutation von zwei Gliedern sich ändert, so ist bei dem Fortschreiten in den Kolumnen jedes Produkt von der Form $a_{p,1}\, a_{q,2}\, a_{r,3} \ldots$ positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Komplexion der Indices $p, q, r, \ldots$ zu den geraden oder ungeraden Permutationen gehört; also je nachdem die Anzahl der in dieser Komplexion vorhandenen Inversionen eine gerade oder ungerade ist (s. § 88, Nr. 15 Zus.).

27) Folgende Determinanten auszuwerten:

α) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$; β) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$; γ) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Aufl.: $\alpha)$ $a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{2,1}\,a_{1,2}$; $\beta)$ $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} - a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3} + a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3} - a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3} + a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3} - a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3}$; $\gamma)$ $a_1\,b_2\,c_3 - a_1\,b_3\,c_2 + a_2\,b_3\,c_1 - a_2\,b_1\,c_3 + a_3\,b_1\,c_2 - a_3\,b_2\,c_1$.

28) Wieviel Vertauschungen je zweier aufeinander folgenden Kolumnen einer Determinante sind erforderlich, wenn man die $p$te Kolumne mit der $q$ten vertauscht, und wie ändert sich der Wert D derselben? Antw.: $\alpha)$ $2(q-p)-1$ Vertauschungen; $\beta)$ in $D(-1)^{2(q-p)-1} = -D$.

§ 90.

Aufgaben als Anwendungen der Permutations-, Kombinations- und Variations-Rechnung.

1) Die Buchstaben der Wörter $\alpha)$ EVA*), $\beta)$ ROMA**) zu versetzen. Welche Permutationen geben wieder einen Sinn?

2) Wieviel Mal lassen sich die einzelnen Wörter des Hexameters: Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera coelo versetzen?***)

3) Zehn Personen, welche täglich zweimal miteinander speisen, nehmen sich vor, jeden Tag, sowohl mittags als abends, ihre Plätze zu wechseln. In wieviel Tagen oder Jahren werden sie ihr Vorhaben ausführen können?

4) Wie heißt die 569ste Permutation von lipano?

5) Folgende Verse geben, vorwärts und rückwärts gelesen, dasselbe:

Aspice! nam raro mittit timor arma, nec ipsa
Si se mente reget, non tegeret Nemesis†);

ebenso: Sator Arepo tenet opera rotas.

Wieviel mögliche Permutationen der Buchstaben läßt jeder der Verse zu?

6) $\alpha)$ Die wievielte Permutation ist: ut tensio sic vis von *ceiiinosssttuv*?††)

---

*) Sumens illud Ave ... mutans Evae nomen in dem schönen Lobgedichte: »Ave maris stella«.

**) Außer den bekannteren, einen Wortsinn gebenden, Permutationen sind noch folgende zu bemerken: 1) roam, hebr. רֹאָם = ihr Prophet, 2) raom, hebr. רְעוֹם = toben, 3) orma, ungarisch = sein Gipfel, 4) omra, arabisch, Plural von Emir, 5) moar, syrisch = Käufer, 6) maor, hebr. מָאוֹר = Licht, 7) amro, syr. = Wolle.

***) 3312 der Versetzungen bilden wieder einen Hexameter.

†) Anfang des Gedichtes, welches Johannes a Lasco an den Herzog Karl von Südermanland schrieb.

††) Unter dieser, nach der Reihenfolge der Buchstaben gesetzten Chiffer machte der englische Physiker Hooke den oben ausgesprochenen sehr wichtigen Satz der Elasticität bekannt. (Philos. tracts and collections. London 1679.)

β) Rheita (1645), der Erfinder des terrestrischen Fernrohres mit vier convexen Linsen, welches die Gegenstände aufrecht zeigt, machte seine Erfindung durch ein Anagramm bekannt. Er verbarg die Worte »convexa quatuor« in dem Ungetüm »cqounavteuxoar«. Wieviel Umsetzungen läßt jenes Anagramm zu?

γ) Galilei machte in einem Briefe an Keppler am 11. Dezember 1610 die von ihm zuerst gesehene Lichtgestalt der Venus durch folgenden unverständlichen Satz bekannt: »Haec immatura a me iam frustra leguntur o. y.«, in welchem die Buchstaben des folgenden Verses enthalten sind: »Cynthiae figuras aemulatur mater amorum«. Wieviel Versetzungen lassen jene 35 Buchstaben zu?*)

7) Wieviel zehnzifferige Zahlen giebt es, deren Ziffern alle voneinander verschieden sind? Antw.: 3265920.

8) Auf wie vielerlei Arten können je 2, 3, 4, 5 der sechs Farben: rot, orange, gelb, grün, blau, violett zu neuen Farben vermischt werden?

9) Die Chemie nimmt 65 Elemente, d. h. bis jetzt unzerlegbare Stoffe an. Wieviel Körper giebt es möglicherweise, die aus 2, 3 oder 4 einfachen Bestandteilen zusammengesetzt sind?

10) Auf wievielerlei Arten lassen sich die Zahlen 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$ und $\frac{5}{3}$ miteinander zu dreien kombinieren? Welche Komplexionen sind es, bei denen das Verhältnis je zweier der Elemente durch zwei der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 sich darstellen läßt?**)

11) Wieviel gerade Linien können zwischen 12, wieviel zwischen n Punkten gezogen werden? Wieviel Diagonalen hat ein 20-, wieviel ein n-Eck?

12) In wieviel Punkten können sich α) 4, β) 8, γ) 11, überhaupt δ) n Gerade durchschneiden? Wieviel begrenzte Linien werden im allgemeinen durch den Durchschnitt von ε) 4, ζ) 5, η) wieviel durch den Durchschnitt von n Geraden gebildet?

13) In wieviel Punkten können sich n Gerade durchschneiden, unter denen p einander parallel sind?

14) Wenn von 20 geraden Linien 8 durch einen Punkt, 5 durch

*) Ebenso machte Galilei die Entdeckung des Ringes des Saturn durch das Anagramm: »Smais mr mil me poeta levmibvnenvgtta viras« bekannt. Diesem Anagramme lag zu Grunde der Satz: Altissimum planetam tergeminum observavi.

**) Anwendung findet diese Aufgabe in der Akustik, wo die Zahlen 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$ und $\frac{5}{3}$ den Grundton, die Quinte, Quarte, gr. Terz, kl. Terz, kl. Sext und gr. Sext darstellen. Durch die Bestimmung der Komplexionen, bei denen obige Bedingung erfüllt wird, erhält man die zwischen drei der genannten Töne bestehenden Akkord-Verhältnisse.

einen anderen Punkt gehen, in wieviel Punkten können sich alle Linien durchschneiden?

15) Wieviel Winkel werden gebildet, wenn sich zwei gerade Linien durchkreuzen (die flachen und erhabenen Winkel mit gerechnet)? Wieviel Mittelpunktswinkel werden gebildet, wenn von dem Mittelpunkte eines Kreises nach 12 Punkten der Peripherie Radien gezogen werden?

16) Wieviel Winkel können durch acht sich durchschneidende gerade Linien gebildet werden, von denen 5 parallel sind?

17) Wieviel Dreiecke, Vierecke und Fünfecke können durch 24, wieviel durch n sich durchschneidende gerade Linien gebildet werden? Wieviel Parallelogramme werden gebildet, wenn 4 Parallellinien von 5 Parallellinien, wieviel wenn n Parallellinien von p Parallellinien durchschnitten werden?

18) Wieviel dreiflächige körperliche Ecken und wieviel dreiseitige Pyramiden können durch 27, wieviel durch n sich im Raume durchschneidende Ebenen gebildet werden?

19) Wieviel Verbindungslinien giebt es zwischen den Durchschnittspunkten von n sich durchschneidenden geraden Linien?

Antw.: $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Es hat also ein vollständiges Vierseit 3 und ein vollständiges Fünfseit 15 Diagonalen.

20) Auf wievielerlei Arten können 52 Kartenblätter unter 4 bestimmte Whistspieler verteilt werden, so daß jeder 13 erhält?

Antw.: Auf 53 644 737 765 488 792 839 237 440 000 Arten.

21) Es seien 12 Kugeln in 3 Fächer so zu verteilen, daß hiervon 3 in das erste Fach, 4 in das zweite und 5 Kugeln in das dritte kommen. Auf wievielerlei Arten kann dieses geschehen?

Antw.: Auf 27 720 Arten.

22) Befinden sich unter diesen Kugeln 2 rote, 3 gelbe, 3 grüne und 4 blaue, und sollen von den 3 Kugeln im ersten Fache stets eine rot und 2 blau, ferner von den 4 Kugeln im zweiten Fache eine rot, eine gelb, eine grün und eine blau, endlich von den 5 Kugeln im dritten Fache 2 gelb, 2 grün und eine blau sein, auf wieviel Arten kann alsdann die Verteilung vor sich gehen?

Antw.: Auf 216 verschiedene Arten.

23) α) die Buchstaben des Wortes sieh zu 2, 3 und 4 zu variieren; β) die Anzahl der Variationen der 25 Buchstaben des Alphabets zu 2, 3 und 4 zu bestimmen.

24) Wieviel Variationen zur 15ten Klasse hätte man höchstens zu bilden, um von Révolution française auf das Anagramm: Un Corse la finira*) zu stoßen? Wie viel Permu-

---

*) Als Napoleon die Revolution mit dem Konsulat endete, bildete man jenes Anagramm. Nach dem Sturze Napoleons las man: La France veut son roy (roi).

tationen hätte man zu bilden, um das Anagramm: Un Corse voté la finira zu erhalten? Wieviel Permutationen hätte man zu bilden, um von Frère Jacques Clement (Mörder Heinrichs III.) auf das Anagramm: C'est l'enfer qui m'a créé zu stoßen?

Bemerkung. Das schönste Anagramm, welches vielleicht jemals gedichtet worden, ist von Jablonsky, dem ehemaligen Rektor der Schule zu Lissa. Die Veranlassung dazu war folgende: Als der König Stanislaus von Polen in seiner Jugend von Reisen zurückkam, versammelte sich das ganze Lescinskische Haus in Lissa, um seinen Stammerben zu bewillkommnen. Jablonsky veranstaltete zu dieser Feierlichkeit einen Schul-Aktus und ließ zum Beschlusse desselben von 13 Schülern, die als junge Helden gekleidet waren, ein Ballet tanzen. Jeder derselben hatte einen Schild, worauf einer von den Buchstaben aus den Worten Domus Lescinia mit Gold geschrieben war. Am Ende des ersten Ballets standen sie so, daß man aus ihren nebeneinander gehaltenen Schilden Domus Lescinia las. Nach dem zweiten Ballet standen sie in der Ordnung, daß man las: ades incolumis (unversehrt bist du hier). Nach dem dritten: omnis es lucida (ganz strahlend bist du da); nach dem vierten: lucida sis omen (strahlend sei uns Ahnung). Dann: mane sidus loci (bleib des Landes Stern); hierauf sis columna Dei (sei eine Säule Gottes), und endlich zum Beschluß: I! scande solium (geh', besteige den Thron). Das letztere war um so schöner, da es in der Folge als eine Art Prophezeiung gerechtfertigt ward. — Noch künstlicher sind die Anagramme, die aus einem Verse wieder einen anderen bilden. So ward ein italienischer Gelehrter, welcher im Traume den Vers des Horatius: Grata superveniet, quae non sperabitur, hora sich vorgehalten sah, durch den Anagrammatismus seines Freundes: Est ventura Rhosina parataque nubere pigro bewogen, noch im hohen Alter eine Fremde, mit Namen Rosina, zu heiraten. Bei den Alten finden wir bereits Anagramme; so findet sich *Πτολεμαῖος* in *ἀπὸ μέλιτος* (von Honig), *Ἀρσινόη* in *ἴον Ἥρας* (Veilchen der Here) umgesetzt.

25) Jemand hat 4 verschiedene Röcke, 7 verschiedene Westen, 5 verschiedene Beinkleider. In wieviel verschiedenen Anzügen kann er erscheinen?

27) Wieviel zwei-, drei-, vier- u. s. w. n-silbige Versfüße können durch die beiden Quantitäten – und ⏑ gebildet werden?

Antw.: 4 zweisilbige, nämlich: – – (Spondeus), – ⏑ (Trochäus), ⏑ – (Jambus), ⏑ ⏑ (Pyrrhichius); 8 dreisilbige, 16 viersilbige und 2^n n-silbige.

27) Wieviel Arten von Hexametern giebt es?

Bemerkung. Der Hexameter besteht eigentlich aus 6 Daktylen (– ⏑ ⏑), für deren letzten aber immer ein Spondeus oder Trochäus steht. Die vier ersten Stellen lassen den Spondeus statt des Daktylus ohne Unterschied zu. In die fünfte Stelle wird nur selten ein Spondeus gesetzt, und sehr selten mit vorhergehendem Spondeus.

1) – – | – – | – – | – – | – – | – ⏓ (Catull. 116. 3.)

2) – – | – – | – – | – – | – ⏑ ⏑ | – ⏓ (Virg. G. IV. 174.)

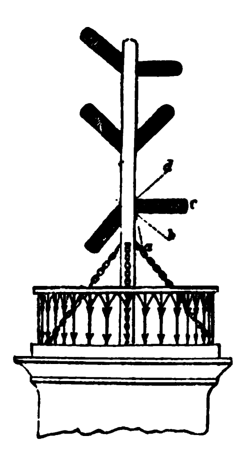
3) – – | – – | – – | – ⏑ ⏑ | – – | – ⏓

4) – – | – – | – – | – ⏑ ⏑ | – ⏑ ⏑ | – ⏓ (Virg. A. I. 15) u. s. w.

28) Auf wievielfache Weise lassen sich in 7 Oktaven je drei der Töne *c*, *e*, *g* des Dreiklanges miteinander verbinden?

Antw.: Auf 343 fache Weise.

29) α) Drei auseinander liegende Kreise sind gegeben; wieviel Kreise giebt es, welche dieselben von innen oder außen berühren? β) Vier auseinander liegende Kugeln sind der Lage nach gegeben. Wieviel Kugeln sind im allgemeinen möglich, wenn dieselben eine jede jener vier Kugeln von innen oder außen berühren sollen?



30) Der ehemals zwischen Berlin und Koblenz korrespondierende optische Telegraph hatte nebenbezeichnete Einrichtung. Jeder der 6 beweglichen Arme (Indikatoren) konnte vier verschiedene Stellungen annehmen; der unten rechts stehende z. B. konnte eine vertikale (*a*), schief abwärts gerichtete (*b*), horizontale (*c*) und schief aufwärts gerichtete Lage (*d*) annehmen, ebenso die übrigen. Wieviel voneinander verschiedene Figuren war der Telegraph darzustellen imstande?

Antw.: 4096.

Bemerkung. Durch Zusammenstellung von Punkten und Strichen wird bei dem Morse'schen elektrischen Schreib-Telegraphen das ganze telegraphische Alphabet gebildet. Bei dem deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereine sind die nachfolgenden Zeichen im Gebrauch:

.	*e*	. . .	*s*	. . . .	*h*	— . . .	*b*
—	*t*	. . —	*u*	. . . —	*v*	— . . —	*x*
. .	*i*	. — .	*r*	. . — .	*f*	— . — .	*c*
. —	*a*	. — —	*w*	. . — —	*ü*	— . — —	*y*
— .	*n*	— . .	*d*	. — . .	*l*	— — . .	*z*
— —	*m*	— . —	*k*	. — . —	*ä*	— — . —	*q*
		— — .	*g*	. — — .	*p*	— — — .	*ö*
		— — —	*o*	. — — —	*j*	— — — —	*ch*.

Die Ziffern werden bezeichnet durch:

. — — — —	1	—	6
. . — — —	2	— — . . .	7
. . . — —	3	— — — . .	8
. . . . —	4	— — — — .	9
. . . . .	5	— — — — —	0

31) Wenn eine Zahl von der Form $a^m b^n c^o d^p e^q f^r$ ist, wo *a*, *b*,

c, d, e und f Primzahlen und m, n, o, p, q und r ganze Zahlen bedeuten, welches ist die Anzahl der Teiler der Zahl?

Antw.: $(m+1)(n+1)(o+1)(p+1)(q+1)(r+1)-1$.

32) Wieviel Mal können aus den Zahlen a, b, c, d, e und f Produkte von Potenzen von der Form $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ gebildet werden?

Antw.: Auf $\underset{3}{C}(6) \cdot P(3) = 120$fache Weise.

§ 91.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1) Was versteht man unter mathematischer Wahrscheinlichkeit (Probabilität)? Wie kann dieselbe dargestellt werden? Wenn unter $m+n$ gleichmöglichen Fällen n Fälle irgend einem Ereignisse günstig sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis eintrete, wie groß die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintrete? (Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.)

2) Was bedeutet der Wahrscheinlichkeitsbruch $\frac{p}{q}$, wenn $\alpha)$ $p=0$ oder $\beta)$ $p=\frac{1}{2}q$ oder $\gamma)$ $p=q$ ist?

3) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, bei dem Spiele Kron oder Schrift (beim Aufwerfen einer Münze) zu gewinnen?

4) Ein Gemälde wird verlost; der Lose sind 200. Welche Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, habe ich, wenn ich 5 Lose nehme?

5) Welche Wahrscheinlichkeit habe ich, mit einem Würfel 5, mit zwei Würfeln 3, 4 oder 12 zu werfen?

6) Welche Wahrscheinlichkeit habe ich, mit 3 Würfeln 3, 5 oder 7 zu werfen? oder 3 gleiche Zahlen (einen Pasch) oder nur 2 gleiche Zahlen oder 3 ungleiche Zahlen oder 3 aufeinander folgende Zahlen, oder endlich mit 4 Würfeln 9 zu werfen?

7) $\alpha)$ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von drei voneinander unabhängigen Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 und w_3 seien, irgend einer der günstigen Fälle eintrete?

$\beta)$ Welche Wahrscheinlichkeit hat man, in einem Wurfe mit zwei Würfeln 7 oder 8 oder 9 zu werfen?

Antw.: $\alpha)$ $w_1 + w_2 + w_3$; $\beta)$ $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

8) Auf einem Jahrmarkte sind verschiedene Gegenstände, unter diesen recht kostbare, welche auf den Nummern 8—48 stehen, gegen Einsatz eines einzigen Kreuzers durch Werfen mit 8 Würfeln zu gewinnen. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, 8, 9, 10, 46, 47 oder 48 zu werfen, und wieviel kann der Besitzer des Spiels auf diese Nummern setzen, wenn er nur 1000 Prozent gewinnen will?

9) Aus einer Urne, welche 3 schwarze, 2 weiße und 5 rote Kugeln enthält, nehme ich blindlings 3 Kugeln heraus. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß die 3 Kugeln von verschiedener Farbe sein werden?

10) Aus einem Spiele von 52 Karten werden 3 Karten blindlings gezogen. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß alle Karten Coeurs sein werden?

11) Ich ziehe aus einem Spiele von 52 Karten 2 Blätter. Welche Wahrscheinlichkeit habe ich, daß die Summe der Augen 21 ist, wenn jedes Bild und jedes As für 11 gilt?

12) α) Die gewöhnliche Zahlen-Lotterie enthält 90 Nummern, von denen jedesmal 5 Nummern herausgezogen werden. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß alle Nummern herauskommen, wenn man 1, 2, 3, 4 oder 5 Nummern besetzt? Wieviel Prozent Nutzen nimmt die Loterie de France, wenn sie für eine einzelne Nummer (Estratto), die herauskommt, das 15fache, für eine Ambe das 270fache, für eine Terne das 5500fache, für eine Quaterne das 75000fache des Einsatzes auszahlt? β) Eine Lotterie enthalte n Nummern, von welchen bei jeder Ziehung r Nummern gezogen werden. Man hat a Nummern besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese a Nummern alle herauskommen?

13) Wenn unter allen N möglichen Fällen n die Zahl einer Art, n' die Zahl einer anderen Art von Fällen bezeichnet, wie groß sind alsdann die Wahrscheinlichkeiten (relativen Wahrscheinlichkeiten) für das Eintreten eines Falles der einen oder der anderen Art in Bezug aufeinander?

Antw.: $n:(n+n')$ und $n':(n+n')$, oder $w:(w+w')$ und $w':(w+w')$, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle mit w und w' bezeichnet.

14) In einer Urne befinden sich 7 weiße, 5 rote, 9 blaue und 14 schwarze Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit hat man beim Herausziehen zweier Kugeln, eher eine weiße und blaue, als eine schwarze und rote Kugel zu ergreifen?

15) Ein Knabe, der 7 Spielkugeln hat, spielt mit mir Paar oder Unpaar. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit, Paar zu gewinnen, zu der, Unpaar zu gewinnen? Antw.: Wie 63 : 64.

16) α) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Ereignisse zugleich stattfinden, wenn die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses $=\frac{p}{q}$, die des anderen $=\frac{r}{s}$ ist?

β) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $=\frac{p}{q}$ ist, n-mal hintereinander eintrete?

17) Wenn w und w' die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse bezeichnen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß α) A nicht, wohl aber B eintreffe; β) A wohl, jedoch nicht B eintreffe; γ) weder A noch B eintreffe; δ) von A und B wenigstens eines eintreffe?

Antw.: α) $(1-w)w'$; β) $w(1-w')$; γ) $(1-w)(1-w')$; δ) $w+w'-ww' = 1-(1-w)(1-w')$.

18) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, α) mit einem Würfel 2-, 3-, 4mal hintereinander 5 zu werfen; β) bei dem Spiele Kron oder Schrift (Wappen oder Schrift, pile ou croix) 2-, 3-, 4- u. s. w. n-mal hintereinander zu gewinnen?

19) α) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit 2 Würfeln zuerst 8, dann 9 zu werfen? β) Wie groß aber ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 Augen, oder, wenn dieses nicht geschieht, auf den zweiten Wurf 8 Augen zu werfen? γ) Wie groß ist endlich die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten Wurfe 7, oder, wenn dieses nicht eintrifft, im zweiten Wurfe 7, oder, wenn auch dieses nicht eintreffen sollte, doch im dritten Wurfe 7 zu werfen? Antw.: α) $\frac{5}{324}$; β) $\frac{19}{81}$; γ) $\frac{91}{216}$.

20) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfeln p-mal die Zahl a zu treffen, oder $(p-1)$-mal a und 1-mal b, oder $(p-2)$-mal a und 2-mal b u. s. w., ohne Rücksicht auf die Ordnung?

21) Von zwei Urnen enthält die erste 3 weiße und 1 schwarze, die zweite 4 schwarze und 2 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man durch einen zufälligen Griff eine weiße Kugel fassen werde?

22) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder, wenn dieses nicht geschieht, wenigstens auf den zweiten Wurf 9 zu treffen? Antw.: $\frac{17}{81}$.

23) Wenn w die Wahrscheinlichkeit ist, daß eine $a$jährige Person A, und w' die Wahrscheinlichkeit, daß eine $b$jährige Person B noch p Jahre leben wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 1) daß A und B noch p Jahre zusammen leben, oder, bei Eheleuten, die Ehe dauert; 2) daß von diesen beiden Personen nach p Jahren eine schon tot ist; 3) daß nach p Jahren A noch lebt und B schon tot ist; 4) daß nach p Jahren A schon tot ist und B noch lebt; 5) daß nach p Jahren beide schon tot sind; 6) daß nach p Jahren beide noch nicht tot sind, sondern daß wenigstens eine, oder daß beide noch leben?

Antw.: 1) $w \cdot w'$; 2) $1 - ww'$; 3) $w(1-w')$; 4) $(1-w)w'$; 5) $(1-w)(1-w')$; 6) $1-(1-w)(1-w')$.

24) Zwei Associés A 25, B 30 Jahre alt, wünschen dafür zu sorgen, daß bei einem eintretenden Todesfall die Ansprüche Dritter ohne Decidenz des Geschäftes befriedigt werden können. Sie versichern zu diesem Zwecke gemeinschaftlich bei der Baseler Lebensversicherungsbank 9000 ℳ, welche dem Überlebenden ausgezahlt werden.

sobald der eine der beiden Versicherten stirbt. Sie haben hierfür eine jährliche Prämie von 291,75 M zu zahlen. Welchen Zinsfuß berechnet die genannte Bank, wenn sich aus den Mortalitätstabellen ergiebt, daß die Versicherten wahrscheinlich noch 20 Jahre zusammenleben? Antw.: 4 Prozent.

§ 92.

Binomischer und polynomischer Lehrsatz.

Unter $\Sigma \underset{1}{C}(abcd\ldots)$, $\Sigma \underset{2}{C}(abcd\ldots)$, $\Sigma \underset{n}{C}(abcd\ldots)$ versteht man die Summe aller Kombinationen der Elemente $a, b, c, d\ldots$ zur ersten, zweiten und $n$ten Klasse, wobei zugleich die nebeneinander gestellten Elemente als Faktoren eines Produktes betrachtet werden. Die Summe aller Kombinationen zur 1sten, 2ten, 3ten, 4ten u. s. w. Klasse der Elemente $a, b, c, d, e\ldots$ wird auch von Einigen durch die Zeichen $[a]$, $[ab]$, $[abc]$, $[abcd]$ u. s. w. bezeichnet. Unter α) $\sum_{n=0}^{n=n} \underset{n}{C}(abcd\ldots)$, β) $\sum_{n=0}^{n=n} \binom{a}{n}$ versteht man α) die Summe aller Kombinationen, β) die Summe aller Binomialkoeffizienten, die man erhält, wenn statt n nach und nach 0, 1, 2 u. s. w. bis n gesetzt wird. Sowohl die Kombinationsklasse, als der Binomialkoeffizient mit dem Zeichen 0 ist gleich 1.

1) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)$ zu entwickeln.

Aufl.: $x^6 + x^5 \Sigma \underset{1}{C}(ab\ldots f) + x^4 \Sigma \underset{2}{C}(ab\ldots f) + x^3 \Sigma \underset{3}{C}(ab\ldots f) +$
$x^2 \Sigma \underset{4}{C}(ab\ldots f) + x \Sigma \underset{5}{C}(ab\ldots f) + \Sigma \underset{6}{C}(ab.f) = \sum_{n=0}^{n=6} x^{6-n} \underset{n}{C}(abcdef) =$
$x^6 + [a]x^5 + [ab]x^4 + [abc]x^3 + [abcd]x^2 + [abcde]x + abcdef.$

2) Das Produkt aus den α Gliedern:
$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)\ldots\ldots\ldots(x \pm m)$ zu entwickeln.

Aufl.: $\sum_{n=0}^{n=\alpha} x^{\alpha-n} \underset{n}{C}(abc\ldots m)(\pm 1)^n = x^\alpha \pm [a]x^{\alpha-1} + [ab]x^{\alpha-2}$

3) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ zu berechnen.

Antw.: $x^5 - 20x^4 + 155x^3 - 580x^2 + 1044x - 720.$

4) α) $(ax \pm 1)(bx \pm 1)(cx \pm 1)(dx \pm 1)(ex \pm 1)(fx \pm 1)(gx \pm 1)$ auszuführen.

Aufl.: $\sum_{n=0}^{n=7} x^{7-n} (\underset{7-n}{C}abcdefg)(\pm 1)^n$.

β) Ebenso: $(ax \pm \alpha)(bx \pm \beta)(cx \pm \gamma)(dx \pm \delta)(ex \pm \varepsilon)(fx \pm \zeta)(gx \pm \eta)$ zu entwickeln.

5) $(x \pm a)^6$ zu entwickeln.

Aufl.: $x^6 \pm \binom{6}{1} x^5 a + \binom{6}{2} x^4 a^2 \pm \binom{6}{3} x^3 a^3 + \binom{6}{4} x^2 a^4 \pm \binom{6}{5} x a^5$
$+ \binom{6}{6} a^6 = \sum_{n=0}^{n=6} \binom{6}{n} x^{6-n} a^n (\pm 1)^n.$

6) $(a \pm b)^n$ zu entwickeln.

Aufl.: $a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm$

$\binom{n}{3} a^{n-3} b^3 \ldots\ldots = \sum_{x=0}^{x=n} \binom{n}{x} a^{n-x} b^x (\pm 1)^x,$

oder $= a^n \pm \frac{n}{1} \frac{b}{a} A_1 + \frac{n-1}{2} \frac{b}{a} A_2 \pm \frac{n-2}{3} \frac{b}{a} A_3 + \frac{n-3}{4} \frac{b}{a} A_4 \ldots$ *).

7) $(a \pm b)^n$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ und 12 zu entwickeln.

8) $(3a - 7b)^7$ zu entwickeln.
Aufl.: $2187 a^7 - 35721 a^6 b + 250047 a^5 b^2 - 972405 a^4 b^3 + 2268945 a^3 b^4 - 3176523 a^2 b^5 + 2470629 a b^6 - 823543 b^7$.

9) Ebenso: $(5a - 4b)^9$, $(a^3 - 3ab^2)^8$ und $\left(\frac{3a^3b^2}{c} - \frac{2c^3}{a^2 b}\right)^6$.

10) Ebenso: $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^8$ und $(\sqrt{x:y} \pm \sqrt{y:x})^9$.

11) α) Das 4te Glied von $(m+n)^{17}$, β) das 14te von $(a-b)^{19}$, γ) das 5te von $(3a^2 - 7ab^3)^{30}$ zu bestimmen.

12) Wie heißen die mittleren Glieder von $(5a - 2b)^{19}$?

13) Das mittlere Glied oder die mittleren Glieder von $(a \pm b)^n$ anzugeben.

14) α) $(a+b)^n \pm (a-b)^n$; β) $(a+b\sqrt{-1})^n \pm (a-b\sqrt{-1})^n$.

15) α) $(a+b+c)^2$, β) $(a+b-c)^3$, γ) $(a+b-c)^4$, δ) $(a-b\mp c)^5$ auszuführen.

16) $(a+b+c)^n$ auszuführen.

17) $(a \pm b \pm c \pm d)^n$ für α) $n=2$, β) $n=3$, γ) $n=4$, δ) $n=5$ und ε) allgemein $n=n$ zu entwickeln.

18) $(2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4)^5$ zu entwickeln.
Aufl.: $32 - 400x + 1440x^2 + 680x^3 - 11390x^4 + 1955x^5 + 47025x^6 + 5435x^7 - 111845x^8 - 71145x^9 + 108073x^{10} + 119495x^{11} - 36185x^{12} - 86055x^{13} - 8165x^{14} + 31441x^{15} + 9465x^{16} - 5715x^{17} - 2565x^{18} + 405x^{19} + 243x^{20}$.

19) Wie heißt das 4te Glied von $(a - 2x + 3x^2 - 4x^3)^6$?

20) Der für ganze positive Exponenten bewiesene binomische Lehrsatz gilt auch für ganze negative, für gebrochene positive und gebrochene negative Exponenten. Warum?

21) α) $(a+b)^{-1}$; β) $(a+b)^{-2}$; γ) $(a-b)^{-3}$; δ) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$; ε) $(a-b)^{\frac{1}{3}}$; ζ) $(a+b)^{\frac{2}{3}}$; η) $(a-b)^{\frac{3}{4}}$; ϑ) $(a-b)^{-\frac{1}{2}}$; ι) $(a-b)^{-\frac{2}{3}}$.

*) Über die Bedeutung A_1, A_2, A_3, A_4 u. s. w siehe § 86.

22) α) $\sqrt{11}$, β) $\sqrt{47}$, γ) $\sqrt{2}$, δ) $\sqrt[3]{388}$, ε) $\sqrt[3]{3}$ zu berechnen.

Aufl.: α) $\sqrt{11} = 3\sqrt{1 + \frac{2}{9}} = 3\,(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} A_1 + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot A_2 - \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{9} \cdot A_3 + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot A_4 - \frac{9}{12} \cdot \frac{2}{9} \cdot A_5 + \frac{11}{14} \cdot \frac{2}{9} \cdot A_6) = 3\,(1 + 0{,}111\,111\,1 - 0{,}006\,172\,9 + 0{,}000\,685\,9 - 0{,}000\,095\,3 + 0{,}000\,014\,8 - 0{,}000\,002\,5 + 0{,}000\,000\,4) = 3{,}316\,624\,7$. Auch ist $\sqrt{11} = \frac{1}{3}\sqrt{100 - 1} = \frac{10}{3}\sqrt{1 - 0{,}01} = \frac{10}{3}\,(1 - 0{,}005 - 0{,}000\,012\,5 - 0{,}000\,000\,062\,5 - 0{,}000\,000\,000\,390\,63 - 0{,}000\,000\,000\,002\,73 - 0{,}000\,000\,000\,000\,02) = 3{,}316\,624\,790\,355\,4$.

β) $\sqrt{47} = 7\sqrt{1 - \frac{2}{49}} = 7\,(1 - 0{,}020\,408\,2 - 0{,}000\,208\,2 - 0{,}000\,004\,3 - 0{,}000\,000\,1) = 6{,}855\,654\,4$.

γ) $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50} = \frac{7}{5} + \frac{1}{100} A_1 + \frac{3}{200} A_2 + \frac{5}{300} A_3 + \frac{7}{400} A_4 + \frac{9}{500} A_5 + \frac{11}{600} A_6 = 1{,}400\,000\,000\,000\,0 + 0{,}014\,000\,000\,000\,0 + 0{,}000\,210\,000\,000\,0 + 0{,}000\,003\,500\,000\,0 + 0{,}000\,000\,061\,250\,0 + 0{,}000\,000\,001\,102\,5 + 0{,}000\,000\,000\,020\,2 + 0{,}000\,000\,000\,000\,3 = 1{,}414\,213\,562\,373\,0$.

δ) $\sqrt[3]{388} = \frac{22}{3}\sqrt[3]{1 - \frac{43}{2662}} = \frac{22}{3}\,(1 - 0{,}005\,384\,422\,740 - 0{,}000\,028\,992\,008 - 0{,}000\,000\,260\,175 - 0{,}000\,000\,002\,802 - 0{,}000\,000\,000\,033) = 7{,}293\,633\,029\,775$.

ε) $\sqrt[3]{3} = \frac{1}{9}\sqrt[3]{2187} = \frac{1}{9}\,(13^3 - 10)^{\frac{1}{3}} = \frac{13}{9} - \frac{10}{6591} A_1 - \frac{10}{6591} A_2 - \frac{100}{39546} A_3 \cdots = 1{,}442\,249\,570\,3 \ldots\ldots$

23) α) $\sqrt[10]{10}$, β) $1 : \sqrt[3]{68}$ zu berechnen.

Aufl.: α) $\sqrt[10]{10} = \frac{10}{8}\sqrt[10]{\frac{8^{10}}{10^{10}} \cdot 10} = \frac{10}{8}\sqrt[10]{1{,}073\,741\,824} = \frac{10}{8}\,(1 + 0{,}007\,374\,182 - 0{,}000\,244\,704 + 0{,}000\,011\,428 - 0{,}000\,000\,611 + 0{,}000\,000\,035) = 1{,}258\,925\,412$.

β) $1 : \sqrt[3]{68} = 1 : 4\sqrt[3]{1 + \frac{4}{64}} = \frac{1}{4}\,(1 + \frac{1}{16})^{-\frac{1}{3}} = 0{,}244\,998\,652\,503$.

24) $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln.

Aufl.: $2a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}\frac{b^2}{a^2} - \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 12}\frac{b^2}{a^2} A_1 + \frac{11 \cdot 14}{15 \cdot 18}\frac{b^2}{a^2} A_2 - \frac{17 \cdot 20}{21 \cdot 24}\frac{b^2}{a^2} A_3 \cdots\right)$

oder $-\,2b^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\frac{a}{b} - \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 9}\frac{a^2}{b^2} A_1 + \frac{8 \cdot 11}{12 \cdot 15}\frac{a^2}{b^2} A_2 - \cdots\right)$.

25) Ein Kapital = 1 stehe zu p Prozent auf Zinseszinsen. Wie groß ist dasselbe nach n Jahren?

Antw.: $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 1 + \frac{n}{100} p + \frac{n-1}{200} p A_1 + \frac{n-2}{300} p A_2 + \frac{n-3}{400} p A_3 + \cdots$

§ 93.

Eigenschaften der Binomial-Koeffizienten. Figurierte Zahlen.

$\binom{b}{n}$*) heißt der $n$te Binomial-Koeffizient, b die Basis, n der Zeiger.

1) Binomial-Koeffizienten von derselben Basis, deren Zeigersummen sich zur Basis ergänzen, sind einander gleich. Warum?

2) Wie findet man aus einem Binomial-Koeffizienten den nächstniedrigen mit einem um 1 verminderten Zeiger?

3) Welchen Wert hat $\alpha)\ \binom{b}{0}$; $\beta)\ \binom{b}{b}$; $\gamma)\ \binom{b}{b+1}$?

4) Was wird aus einem Binomial-Koeffizienten, wenn der Zeiger negativ, was, wenn er größer, als die Basis, ist?

5) $\alpha)\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\cdots+\binom{n}{n}=2^n$. Warum?

$\beta)\ \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n=0$. Warum?

Die Beweise aus $(1 \pm 1)^n$ abzuleiten.

6) Die Anzahl aller Kombinationen in allen Klassen aus n Elementen ist gleich $2^n - 1$. Warum?

7) $\binom{b+1}{n+1}=\binom{b}{n}+\binom{b}{n+1}$. Warum?

8) $\binom{b}{n}+\binom{b-1}{n}+\binom{b-2}{n}+\binom{b-3}{n}+$ ꝛc. $\binom{0}{n}=\binom{b+1}{n+1}$,

oder $\sum_{x=0}^{x=b}\binom{x}{n}=\binom{b+1}{n+1}$. Warum? und wie heißt dieser Satz in Worten?

9) $1^2+2^2+3^2+4^2\cdots\cdots+n^2$ oder Σn^2 zu entwickeln.

Aufl.: $n^2=(n+1)\,n-n=2\binom{n+1}{2}-\binom{n}{1}$;

$\Sigma n^2=2\,\Sigma\binom{n+1}{2}-\Sigma\binom{n}{1}=2\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{2}=$

$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

10) $\alpha)\ \Sigma n^3$, $\beta)\ \Sigma n^4$ zu entwickeln.

Aufl.: $\alpha)\ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2=(\Sigma n)^2=(1+2+3\cdots\cdot+n)^2$;

$\beta)\ \frac{1}{30}n(6n^4+15n^3+10n^2-1)=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$
$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

*) Über die Bedeutung von $\binom{b}{n}$ sehe man § 89. Hindenburg bezeichnet den ersten Binomial-Koeffizienten von b mit ${}^b\mathfrak{A}$, den zweiten mit ${}^b\mathfrak{B}$, den dritten mit ${}^b\mathfrak{C}$, den vierten mit ${}^b\mathfrak{D}$ u. s. w.

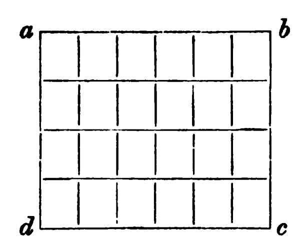
11) Eine gewisse Anzahl Kanonenkugeln ist in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet. In der obersten Schicht liegt eine Kugel, in der zweiten liegen 3, in der dritten 6 u. s. w. Wieviel Kugeln befinden sich in der 20sten Schicht? wieviel in der $n$ten? wieviel in 20 Schichten? wieviel in n Schichten zusammen?

12) Wieviel Kanonenkugeln befinden sich in einer unvollständigen dreiseitigen Pyramide, wenn an jeder Seite der untersten Schicht m und an jeder Seite der obersten Schicht n Kugeln liegen?

13) Wieviel Kugeln enthält eine vollständige quadratische Pyramide von 20, wieviel eine von n Schichten?

14) α) Die unterste Schicht eines Kugelhaufens habe die Form eines Rechtecks, und zwar mögen sich an der einen Seite m, an der anderen $n (< m)$ Kugeln befinden; in jeder folgenden Schicht möge sich an jeder Seite eine Kugel weniger befinden. Wieviel Kugeln sind in einem vollständigen Haufen von n Schichten enthalten? β) Wieviel Kugeln befinden sich in einer länglichen Pyramide von n Schichten, welche an der Grundlage in der Länge m, in der Breite n Kugeln hat, und welche sich mit den beiden Enden an zwei andere vierseitige Pyramiden anlehnt? γ) Wieviel Kugeln befinden sich in einem Kugelhaufen, der ein hohles Viereck oder sogenanntes Carré bildet, wenn der Rücken im ganzen m Kugeln enthält und die Anzahl der Schichten n beträgt? δ) Wieviel Kugeln endlich befinden sich in einem solchen hohlen Vierecke, wenn zur Bildung eines Einganges vom Rücken p Kugeln abgenommen werden?

Antw.: α) $\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)$; β) $\frac{1}{6}n(n+1)(3m+n-1)$; γ) $\frac{1}{4}mn(n+1)$; δ) $\frac{1}{4}n(n+1)[3(m-p)+2(n-1)]$.



15) Ein Rechteck, $abcd$, ist der Länge nach durch 3, der Breite nach durch 5 gerade Linien durchschnitten. Auf wievielerlei Arten kann man von dem Punkte a zum Punkte c gelangen, so daß die Länge des zurückgelegten Weges dieselbe, nämlich $ad + dc$, bleibt?

16) Eine, in Form eines Rechteckes regelmäßig gebaute, nach außen offene Stadt ist der Länge nach durch 19, der Breite nach durch 13 Straßen durchschnitten. Jemand, der an dem einen äußersten Ende der Stadt wohnt, hat täglich 4 Mal den Weg zwischen zwei diagonal gegenüberstehenden Ecken zu machen und nimmt sich vor, jedesmal einen anderen Weg einzuschlagen. In wieviel Tagen würde er sein Vorhaben ausführen können, vorausgesetzt, daß er keine Umwege macht? Antw.: In 347 993 910 Tagen.

17) Wie heißt die Auflösung der 15ten Aufgabe, wenn für 3 und 5 die allgemeinen Zeichen m und n gesetzt werden?

Antw.: $\binom{m+n+2}{m+1} = \binom{m+n+2}{n+1} = \frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\,(n+1)!}$.

18) α) Ein Würfel ist durch 3 Ebenen parallel mit einer Seitenfläche, durch 4 Ebenen parallel mit einer anderen Seitenfläche und durch 5 Ebenen parallel mit einer dritten Seitenfläche in 120 Parallelepipeden zerteilt. Wieviel Mal kann ein sich bewegender Punkt von einer Ecke des Würfels zur diagonal gegenüberstehenden, längs den Kanten der Parallelepipeden, auf dem kürzesten Wege gelangen: β) Wie heißt die Auflösung dieser Aufgabe, wenn für 3, 4, 5 die allgemeinen Zeichen m, n, p gesetzt werden, so daß der Würfel in $(m+1)(n+1)(p+1)$ Parallelepipeden zerlegt wird?

Antw.: α) 630630-, β) $\frac{(m+n+p+3)!}{(m+1)!\,(n+1)!\,(p+1)!}$-mal.

19) *Abracadabra* ist ein magisches Wort, mit welchem ehedem der Aberglaube verschiedene Krankheiten, besonders das hartnäckige dreitägige Wechselfieber, heilen zu können glaubte. Nach der Anweisung des basilidischen Arztes Q. Serenus Sammonicus ist jenes Wort so zu schreiben*):

A b r a c a d a b r a
A b r a c a d a b r
A b r a c a d a b
A b r a c a d a
A b r a c a d
A b r a c a
A b r a c
A b r a
A b r
A b
A

Wieviel Mal kann man dieses magische Wort *Abracadabra* von einem *A* anfangend bis zum letzten *a* in der rechten Ecke lesen, indem man sowohl in horizontaler Richtung, als rechts aufwärts in schiefer Richtung fortgeht?

Antw.: $2^{10} = 1024$ Mal. Die Anzahl wird bedeutend größer, wenn man zum Teil auch in schiefer Richtung rechts abwärts fortgeht.

---

*) Sammonicus giebt die Vorschrift:
Inscribes chartae, quod dicitur Abracadabra,
His lino nexis collum redimire memento u. s. w.

20) In Ovideo, in der Provinz Asturien in Spanien, befindet sich die von einem alten Fürsten Silo erbaute Kirche San Salvador. Der Grabstein des Fürsten trägt die Inschrift*):

t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
e	c	n	i	r	p	o	l	i	S	i	l	o	p	r	i	n	c	e
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t

Wieviel Mal läßt sich von der Mitte *S* nach den 4 Ecken *t, t, t, t* die Inschrift: *Silo princeps fecit* lesen?
Antw.: Auf 45760 Arten.

*) Hispaniae illustratae scriptores varii, Tom. I. J. Vasaei Hisp. chronic. Daselbst heißt es: Ubi legitur *ducenties septuagies*: Silo princeps fecit.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen von höheren Graden und transscendente Gleichungen.

A. Eigenschaften der Gleichungen in Bezug auf ihre Wurzeln.

§ 94.

1) Welche Gleichung des dritten Grades hat die Wurzeln α, β und γ?

Antw.: $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$.

2) Welche Gleichung des vierten Grades hat die Wurzeln α, β, γ und δ?

3) Sind α, β, γ, δ u. s. w. die Wurzeln einer Funktion, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots + t = X$, so ist X durch die Differenzen $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$ u. s. w. ohne Rest teilbar. Warum?

4) Wenn eine Gleichung vom $n$ten Grade, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots + t = 0$, die n Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \nu$ hat, in welcher Beziehung stehen die Koeffizienten a, b, c ... zu den Wurzeln α, β, γ ...?

5) Jede Gleichung vom $n$ten Grade hat n, aber auch nur n Wurzeln*). In welche Faktoren läßt sich jede Funktion von x von der Form $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots t$ zerlegen?

6) Setzt man in eine Funktion von x, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots + t$, für x nacheinander die Werte p und q, und erhält man dadurch Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichen, so liegt zwischen p und q wenigstens eine reelle Wurzel der Funktion. Warum?

7) Eine Gleichung des dritten Grades hat wenigstens eine reelle Wurzel. Warum?

8) Wie wird die Gleichung des dritten Grades $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ in eine andere (reduzierte) verwandelt, in welcher das zweite Glied fehlt?

*) Der streng mathematische Beweis dieses sehr wichtigen Satzes, wie ihn Gauß und Cauchy geführt haben, gehört nicht hierher.

9) Die allgemeine Gleichung $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + t = 0$ in eine reduzierte zu verwandeln.

B. Direkte Auflösungen der Gleichungen vom dritten Grade.

§ 95 a.

Besondere Fälle der Gleichungen des dritten Grades.

1) $x^3 - 1 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}) = J_1$, $x_3 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) = J_2$. (S. § 49, Nr. 18.)

2) $x^3 + 1 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -1$, $x_2 = -J_1$, $x_3 = -J_2$.

3) α) $x^3 \pm n^3 = 0$.

Aufl.: $x_1 = \mp n$, $x_2 = \mp nJ_1$, $x_3 = \mp n J_2$.

β) $(a - x)^3 = (x - b)^3$.

Aufl.: $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}(a + b) \pm \frac{1}{2}(a - b)\sqrt{-3}$.

4) Wenn $x^3 + Ax^2 + Bx$ die drei ersten Glieder des vollständigen Kubus einer zweiteiligen Größe enthalten soll, welche Beziehung muß alsdann zwischen A und B stattfinden?

Aufl.: $A^2 - 3B = 0$.

5) Die Gleichung $x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2x = C$ aufzulösen*).

Aufl.: $x_1 = -\frac{1}{3}A + \sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}A + J_1\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$, $x_3 = -\frac{1}{3}A + J_2\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$.

6) $x^3 - 12x^2 + 48x - 189 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 9$, $x_2 = 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $x_3 = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

7) Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten m, n und p stattfinden, damit die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ auf die Form $y^3 + qy = 0$ gebracht werden kann? Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln x_1, x_2, x_3 statt?

Aufl.: Es muß $2m^3 - 9mn + 27p = 0$ sein; die Wurzeln bilden eine arithmetische Progression und es ist $x_1 = -\frac{1}{3}m$, x_2 und $x_3 = -\frac{1}{3}m \pm \frac{1}{3}\sqrt{3(m^2 - 3n)}$.

8) $x^3 - 3bx^2 + (3b^2 - a^2)x - b(b^2 - a^2) = 0$.

Aufl.: $x_1 = b$, $x_2 = b + a$, $x_3 = b - a$.

9) $x^3 - 3(m + n)x^2 + (3m^2 + 6mn + 2n^2)x - m(m^2 + 3mn + 2n^2) = 0$.

Aufl.: $x_1 = m$, $x_2 = m + n$, $x_3 = m + 2n$.

---

*) Methoden, die allgemeine kubische Gleichung auf diese Form zu reduzieren, finden sich in Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra. Leipzig [1878] § 146 — 148.

§ 95 b.

1) Cardanische Formel*) und Formeln von Clausen und Hulbe.

$$x^3 + px + q = 0^{**}).$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}, \text{ oder}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}\left[\sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}}\right].$$

Bezeichnet man den ersten Summanden von x_1 mit u, den zweiten mit v, so sind die beiden anderen Wurzeln $x_2 = J_1 u + J_2 v = -\tfrac{1}{2}(u + v) + \tfrac{1}{2} i \sqrt{3}(u - v)$, $x_3 = J_2 u + J_1 v = -\tfrac{1}{2}(u + v) - \tfrac{1}{2} i \sqrt{3}(u - v)$. (Man vergleiche § 95 a Nr. 1.)

1) Wie ändert sich die Cardanische Formel um, wenn $x^3 + px - q = 0$, wie, wenn $x^3 - px + q = 0$, wie endlich, wenn $x^3 - px - q = 0$ gegeben ist?

2) Wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist, so sind die beiden anderen Wurzeln $-\tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}\alpha^2 - p}$. Warum? In welchem Falle sind die beiden anderen Wurzelwerte imaginär?

3) In welchem Falle erscheint der erste durch die Cardanische Formel sich ergebende Wurzelwert unter imaginärer Form?

4) $x^3 + 48x + 504 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -6$, $x_2 = 3 + 5\sqrt{-3}$, $x_3 = 3 - 5\sqrt{-3}$.

5) $3x^3 + 4x + 7 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -1$, x_2 und $x_3 = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{6}\sqrt{-3}$.

6) $x^3 - 21x - 344 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 8$, x_2 und $x_3 = -4 \pm 3\sqrt{-3}$.

7) $x^3 - 3x + 2 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

8) $x^3 - 12x + 16 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -4$, x_2 und $x_3 = 2$.

9) $x^3 - 9x + 28 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -4$, x_2 und $x_3 = 2 \pm \sqrt{-3}$.

10) $x^3 - 60x + 671 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -11$, x_2 und $x_3 = \tfrac{11}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-123}$.

*) Sollte eigentlich die Formel des Scipio Ferreo oder die Formel des Tartalea heißen. Nach Cardans eigenem Berichte (Ars magna, 1545) hatte Scipio Ferreo die Methode der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades zuerst entdeckt; späterhin erfand dieselbe Tartalea selbständig.

**) Erste Auflösung mittels Kegelschnitte von Omar ben Ibrahim Alchayami (um 1080). L'algèbre d'Omar ben Ibrahim publ. et trad. par Woepcke. Paris 1851. Vgl. Grundzüge der antiken und modernen Algebra § 365.

11) $x^3 - 2x - 4 = 0$.
Aufl.: $x_1 = (1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}) + (1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}}) = 2$, x_2 und $x_3 = -1 \pm \sqrt{-1}$.

12) $x^3 - 26x - 60 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 6$, x_2 und $x_3 = -3 \pm \sqrt{-1}$.

13) $x^3 - 2\tfrac{3}{4}x + 18\tfrac{3}{4} = 0$.
Aufl.: $x_1 = -3$, x_2 und $x_3 = \tfrac{3}{2} \pm 2\sqrt{-1}$.

14) $x^3 - 7x - 36 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 4$, x_2 und $x_3 = -2 \pm \sqrt{-5}$.

15) $x^3 + 3x + 14 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -2$, x_2 und $x_3 = 1 \pm \sqrt{-6}$.

16) $x^3 + 3x - 5 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 1{,}154\,171\,495$, x_2 und $x_3 = -0{,}577\,085\,7 \pm 1{,}999\,77\sqrt{-1}$.

17) $x^3 + 7x + 3 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -0{,}418\,128$, x_2 und $x_3 = 0{,}209\,064 \pm 2{,}670\,42\sqrt{-1}$.

18) $x^3 - 7x + 11 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -3{,}226\,362\,1$, x_2 und $x_3 = 1{,}613\,181 \pm 0{,}898\,364\sqrt{-1}$.

19) $x^3 - 4x - 5 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 2{,}456\,678\,343$, x_2 und $x_3 = 1{,}228\,339\,17 \pm 0{,}725\,569\,68\sqrt{-1}$.

20) $x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0$.
Aufl.: $x = y + 2$; $x_1 = -4$, x_2 und $x_3 = 5 \pm \sqrt{-3}$.

21) $x^3 + 12x^2 + 45x + 50 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -2$, x_2 und $x_3 = -5$.

22) $x^3 - 21x^2 + 159x - 490 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 10$, x_2 und $x_3 = \tfrac{11}{2} \pm \tfrac{5}{2}\sqrt{-3}$.

23) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -1{,}650\,630$, x_2 und $x_3 = -0{,}174\,685 \pm 1{,}546\,871\sqrt{-1}$.

24) α) $x^3 + (b^2 - 3a^2)x - 2a(a^2 + b^2) = 0$.
Aufl.: $x_1 = (a + b\sqrt{\tfrac{1}{3}}) + (a - b\sqrt{\tfrac{1}{3}}) = 2a$, x_2 und $x_3 = -a \pm b\sqrt{-1}$.

β) Wie heißen die Wurzeln der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wenn $\tfrac{1}{4}q^2 = -\tfrac{1}{27}p^3$ ist?
Aufl.: $x^3 + px + \tfrac{2}{3}p\sqrt{-\tfrac{1}{3}p} = (x + \sqrt{-\tfrac{1}{3}p})^2(x - 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p})$. Hieraus:

$$x_1 = -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p},\quad x_2 = -\sqrt{-\tfrac{1}{3}p},\quad x_3 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}.$$

25) Wie läßt sich die unter imaginärer Form erscheinende Wurzel der Gleichung $x^3 - px + q = 0$ für den Fall, daß $\tfrac{1}{4}q^2 < \tfrac{1}{27}p^3$ ist, unter reeller Form darstellen? (Casus irreductibilis.)

Aufl.: Man setze nach der Formel der 24. Aufgabe des § 92: $a = \tfrac{1}{2}q$, $b = \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2}$ und rechne nach der 1. oder 2. Reihe, je nachdem $a \gtrless b$ ist.

26) $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -4{,}9324242\,(1 + 0{,}01433927 - 0{,}00068538 + 0{,}00005045 - 0{,}00000439 + 0{,}00000042 - 0{,}00000004) = -5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

27) $x^3 - 0{,}361111x + 0{,}0555555 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -0{,}666667$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}166667$.

28) $\sqrt[4]{x^3} = 12 - \sqrt{x}$.

Aufl.: $x_1 = 16$, x_2 und $x_3 = -31{,}5 \pm 17{,}428424\,85\,\sqrt{-1}$.

29) Der Wurzelwert der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ läßt sich nach Clausen*) in folgenden Kettenbruch verwandeln:

Setzt man $x = y\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $\frac{1}{2}q\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}} = a$, so wird 1) $y^3 - 3y - 2a = 0$, wo $a < 1$. Setzt man nun $y = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}(1+a)}}{y'}$, so erhält man 2) $y'^3 - 3y' - 2\sqrt{\frac{1}{2}(1+a)} = 0$, eine Gleichung von derselben Form, wie 1), wenn man $\sqrt{\frac{1}{2}(1+a)} = a_1$ setzt. Nimmt man nun auf dieselbe Weise $\sqrt{\frac{1}{2}(1+a_1)} = a_2$, $\sqrt{\frac{1}{2}(1+a_2)} = a_3$ u. s. w., so wird:

$$y = 1 + \cfrac{2a_1}{1 + \cfrac{2a_2}{1 + \cfrac{2a_3}{1 + \cfrac{2a_4}{1 \ldots\ldots}}}}$$

Die Werte a_1, a_2, a_3.... konvergieren schnell gegen die Einheit. Für den besonderen Fall $a = 1$ ist $y = 2$. Auf dieselbe Weise entwickelt man einen Kettenbruch aus der Gleichung $y^3 - 3y + 2a = 0$.

30) $x^3 - 2100x - 24000 = 0$.

Aufl.: $a = 0{,}64793$, $a_1 = 0{,}90774$, $a_2 = 0{,}97668$, $a_3 = 0{,}99415$, $a_4 = 0{,}99856$, $a_5 = 0{,}99964$, $a_6 = 0{,}99991$, $a_7 = 9{,}99998$; $y = 1{,}9173$; $x_1 = 50{,}726$, $x_2 = -12{,}319$, $x_3 = -38{,}407$.

31) Die allgemeine Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ wird nach Hulbe**) in folgender Weise behandelt:

Man setze: $x = \frac{1}{z} + h$; alsdann wird:

$$z^3 + \frac{3h^2 + 2ph + q}{h^3 + ph^2 + qh + r}z^2 + \frac{3h + p}{h^3 + ph^2 + qh + r}z + \frac{1}{h^3 + ph^2 + qh + r} = 0.$$

Setzt man, um diese Gleichung, welche die Form $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$ hat, nach der in § 95 a. Nr. 5 angegebenen Weise lösen zu können, $B = \frac{1}{3}A^2$, so erhält man nach gehöriger Reduktion in Bezug auf h die Gleichung:

$$h^2(3q - p^2) + (9r - pq)h = q^2 - 3pr,$$

hieraus: $h = \frac{pq - 9r \pm \sqrt{(pq - 9r)^2 + 4(q^2 - 3pr)(3q - p^2)}}{2(3q - p^2)}$.

Endlich ist $z = -\frac{1}{3}A + \sqrt[3]{\frac{1}{27}A^3 - C}$.

Beispiel: $x^3 + 3x^2 - 177x + 751 = 0$.

*) Astron. Nachr. und Grunerts Archiv, II. 446.

**) Analytische Entdeckungen in der Auflösungskunst der höheren Gleichungen. Berlin und Stralsund, 1794, p. 95.

Die Gleichung für h vom zweiten Grade liefert die Wurzelwerte: $h_1 = 7$, $h_2 = 6\frac{1}{4}$. Für $h_1 = 7$ erhält man:

$$x_1 = \frac{1}{z} + h_1 = -1 - \sqrt[3]{480} - \sqrt[3]{450} =$$

$= -1 - 7{,}8297353 - 7{,}6630940 = -16{,}4928293$. Denselben Wert x_1 erhält man für den Wurzelwert $h_2 = 6\frac{1}{4}$. Es ist ferner x_2 und $x_3 = 6{,}7464146 \pm 0{,}144292\sqrt{-1}$.

§ 96.

2) Trigonometrische Formeln*).

$$\text{I. } x^3 + px \pm q = 0;\ tang\,\alpha = \frac{p}{3q}\sqrt{\tfrac{1}{3}p};\ tang\,\beta = \sqrt[3]{tang\,\tfrac{1}{2}\alpha};$$

$$x_1 = \mp\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,cotg\,2\beta,\quad x_2 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin\,2\beta}\left(cos\,2\beta + \sqrt{-3}\right),$$

$$x_3 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin\,2\beta}\left(cos\,2\beta - \sqrt{-3}\right),\text{ oder}$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\tfrac{1}{2}x_1 \mp \tfrac{1}{2}x\frac{\sqrt{-3}}{cos\,2\beta}.$$

$$\text{II. } x^3 - px \pm q = 0;\quad 4p^3 \gtreqless 27q^2;\ sin\,\gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{\tfrac{1}{3}p},$$

$$tang\,\delta = \sqrt[3]{tang\,\tfrac{1}{2}\gamma};\quad x_1 = \mp\sqrt{\tfrac{1}{3}p} : sin\,2\delta,$$

$$x_2 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin\,2\delta}\left(1 + cos\,2\delta\sqrt{-3}\right),\ x_3 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin\,2\delta}\left(1 - cos\,2\delta\sqrt{-3}\right).$$

$$\text{III. } x^3 - px \pm q = 0;\ 4p^3 \gtreqless 27q^2;\ sin\,3\varepsilon = \frac{3q}{p}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}p}};$$

*) Die trigonometrischen Formeln für I. und II. ergeben sich aus dem zweiten Ausdrucke der Cardanischen Formel mit Benutzung der trigonometrischen Sätze: $\sqrt{1 + tang\,\alpha^2} = 1 : cos\,\alpha$, $1 - cos\,\alpha = 2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha^2$, $1 + cos\,\alpha = 2\,cos\,\frac{1}{2}\alpha^2$, $tang\,\beta - cotg\,\beta = -2\,cotg\,2\beta$, $\sqrt{1 - sin\,\alpha^2} = cos\,\alpha$, $tang\,\beta + cotg\,\beta = 2 : sin\,2\beta$. Die Werte für x_2 und x_3 werden mit Hülfe der in § 95 b. Nr. 2 angegebenen Formeln für x_2 und x_3 erhalten. Der Formel III. endlich liegt die trigonometrische Formel $sin\,3\varepsilon = 3\,sin\,\varepsilon - 4\,sin\,\varepsilon^3$ zum Grunde, welche, wenn $x : r = sin\,\varepsilon$ gesetzt wird, in $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}r^3\,sin\,3\varepsilon = 0$ übergeht. Durch Vergleichung der letzteren Formel mit der aufzulösenden Gleichung gelangt man zum Resultate. Die Werte von x_2 und x_3 erhält man durch Aufsuchung aller derjenigen Winkel, deren Sinus mit $sin\,3\varepsilon$ gleichen Wert haben. — Wie würde sich die Formel III. gestalten, wenn man die trigonometrische Formel für $cos\,3\varepsilon$ zu Grunde legen wollte? Man vergleiche Heis, Trigonometrie, VIII. 118 und 119.

$x_1 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ \sin\ \varepsilon, \qquad x_2 = \pm \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ \sin\ (60^0 - \varepsilon),$
$x_3 = \mp \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ \sin\ (60^0 + \varepsilon).$

1) $x^3 + 3x - 5 = 0.$
Aufl.: $\alpha = 21^0 48' 5'',07$, $\beta = 30^0 0' 30'',47$; $x_1 = 1,154171$,
x_2 und $x_3 = -0,57709 \pm 1,99977 \sqrt{-1}$.

2) $x^3 + 7x + 3 = 0.$
Aufl.: $\alpha = 67^0 10' 34'',56$, $\beta = 41^0 6' 11'',98$; $x_1 = -0,4181283$,
x_2 und $x_3 = 0,209064 \pm 2,67042 \sqrt{-1}$.

3) $x^3 - 7x + 11 = 0.$
Aufl.: $\gamma = 40^0 23' 38'',6$, $\delta = 35^0 37' 21'',1$;
$x_1 = -3,226362$, x_2 und $x_3 = 1,613181 \pm 0,898365 \sqrt{-1}$.

4) $x^3 - 4x - 5 = 0.$
Aufl.: $\gamma = 38^0 0' 46'',8$, $\delta = 35^0 1' 48'',0$;
$x_1 = 2,456678$, x_2 und $x_3 = -1,228339 \pm 0,725569 \sqrt{-1}$.

5) $x^3 - 3x + 2 = 0.$
Aufl.: $\varepsilon = 30^0$; x_1 und $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

6) $x^3 - 12x - 16 = 0.$
Aufl.: $3\varepsilon = 90^0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$.

7) $x^3 - 7x + 6 = 0.$
Aufl.: $\varepsilon = 19^0 6' 23'',8$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

8) $x^3 - 5x + 4 = 0.$
Aufl.: $\varepsilon = 22^0 47' 11'',4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 1,561553$, $x_3 = -2,561553$.

9) $x^3 + 2x + 33 = 0.$
Aufl.: $\alpha = 1^0 53' 22'',16$, $\beta = 14^0 16' 49'',49$; $x_1 = -3$.

10) $x^3 - \tfrac{403}{441}x + \tfrac{36}{147} = 0.$
Aufl.: $3\varepsilon = 68^0 32' 18'',55$; $x_1 = 0,4285714$, $x_2 = 0,6666667$,
$x_3 = -1,0952381$.

C. Direkte Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade.

§ 97.

I. Ampère'sche Formel*).

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Heißen die Wurzeln dieser Gleichung x_1, x_2, x_3 und x_4, und setzt man $x_1 + x_2 = y_1$, so ist:

$$y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)y^2 - b^2 = 0.$$

*) Ampère, sur la résolution des équations du IVme degré. Corr. math. et phys. par Quetelet IX. p. 147. — Grun. Arch. I. 16.

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{y \pm \sqrt{-y^2 - 2\left(a + \frac{b}{y}\right)}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{y \mp \sqrt{-y^2 - 2\left(a - \frac{b}{y}\right)}\right\}.*)$$

1) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$
Aufl.: $y^6 - 50y^4 + 769y^2 - 3600 = 0$; $y_1 = 3$, $y_2 = 4$, $y_3 = 5$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -6$.

2) $x^4 - 82x^2 - 288x - 47 = 0.$
Aufl.: $y^6 - 164y^4 + 6912y^2 - 82944 = 0$; $y_1 = 6$; x_1 und $x_2 = 3 \pm 2\sqrt{14}$; x_3 und $x_4 = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

3) $x^4 - 60x^2 + 40x + 396 = 0.$
Aufl.: $y = 10$; x_1 und $x_2 = 5 \pm \sqrt{3}$, x_3 und $x_4 = -5 \mp \sqrt{7}$.

4) $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0.$
Aufl.: $y = 4$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, x_3 und $x_4 = -2 \mp \sqrt{-2}$.

5) $x^4 - 4\frac{1}{2}x^2 - 8x + 2\frac{1}{16} = 0.$
Aufl.: $y = 2{,}91120$; $x_1 = 2{,}68248$, $x_2 = 0{,}22872$, x_3 und $x_4 = -1{,}45560 \pm 1{,}11480\sqrt{-1}$.

6) $x^4 + 4 = 0.$
Aufl.: $y^6 - 16y^2 = 0$; $y = 2$; x_1 und $x_2 = 1 \pm \sqrt{-1}$, x_3 und $x_4 = -1 \pm \sqrt{-1}$.

§ 98a.

II. Euler'sche und Cartesius'sche Formel**).

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

I. Euler'sche Formel. Heißen y_1, y_2 und y_3 die Wurzeln der Gleichung $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{16}(a^2 - 4c)\,y - \frac{1}{64}b^2 = 0$, so sind x_1 und $x_2 = -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})$ und x_3 und $x_4 = \sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})$.
Ist b negativ, so erhalten obige Werte für x die entgegengesetzten Vorzeichen.

1) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$
Aufl.: $y^3 - \frac{25}{2}y^2 + \frac{769}{16}y - \frac{225}{4} = 0$; $y_1 = \frac{9}{4}$, $y_2 = 4$, $y_3 = \frac{25}{4}$; $x_1 = -6$, $x_2 = +3$, $x_3 = +2$, $x_4 = +1$.

---

*) Setzt man noch $x_3 + x_4 = z$, so ist: 1) $z = -y$; 2) $x_1 x_2 + x_3 x_4 = a - yz = a + y^2$. Da $b = -x_1 x_2 z - x_3 x_4 y = (x_1 x_2 - x_3 x_4)\,y$, so ist: 3) $x_1 x_2 - x_3 x_4 = b : y$. Quadriert man die Gleichungen 2) und 3) und subtrahiert dieselben voneinander, so ist: 4) $4x_1 x_2 x_3 x_4 = (a + y^2)^2 - (b : y)^2 = 4c$. Aus dieser letzteren Gleichung erhält man die obige $y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)y^2 - b^2 = 0$, welche in Bezug auf y^2 vom dritten Grade ist. Da man aus einer Wurzel y_1 dieser Gleichung sowohl die Summe $x_1 + x_2$, als auch die Summe $x_3 + x_4$, und aus der Verbindung der Gleichungen 2) und 3) auch die Produkte $x_1 x_2$ und $x_3 x_4$ kennt, so ergeben sich hieraus die einzelnen Werte für x_1, x_2, x_3 und x_4.

**) Euleri conjectatio de formis radicum aequationum. Comm. Petrop. vet. T. VI. — Cartesii geometria ed. Schooten. 1637.

2) $x^4 - 82x^2 - 288x - 47 = 0.$
Aufl.: $y_1 = 9$, y_2 und $y_3 = 16 \pm 4\sqrt{7}$; x_1 und $x_2 = 3 \pm 2\sqrt{14}$, x_3 und $x_4 = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

3) $x^4 - 60x^2 + 40x + 396 = 0.$
Aufl.: $y_1 = 25$, y_2 und $y_3 = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$; x_1 und $x_2 = -5 \mp \sqrt{7}$, x_3 und $x_4 = 5 \mp \sqrt{3}$.

4) $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0.$
Aufl.: $y_1 = 4$, y_2 und $y_3 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2}$;
$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, x_3 und $x_4 = -2 \pm \sqrt{-2}$.

5) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0.$
Aufl.: $x = \frac{1}{4}(z + 7)$; $z^4 - 22z^2 - 24z + 45 = 0$;
$y^3 - 11y^2 + 19y - 9 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 9$;
$z_1 = 5$, $z_2 = -3$, $z_3 = -3$, $z_4 = 1$; $x_1 = 3$,
$x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

6) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0.$
Aufl.: x_1 und $x_2 = 3 \pm \sqrt{5}$, x_3 und $x_4 = 1 \pm \sqrt{3}$.

7) $x^4 - 4\frac{1}{2}x^2 - 8x + 2\frac{1}{16} = 0.$
Aufl.: $y^3 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{3}{4}y - 1 = 0$; $y_1 = 2{,}118778$, y_2 und $y_3 = 0{,}065611 \pm 0{,}68386\sqrt{-1}$; $x_1 = 1{,}45560 + 1{,}22688 = 2{,}68248$, $x_2 = 1{,}45560 - 1{,}22688 = 0{,}22872$, x_3 und $x_4 = -1{,}45560 \pm 1{,}11480\sqrt{-1}$.

II. Methode von Cartesius. Man setze $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + t)$; alsdann wird: $t + z = a + y^2$, $t - z = b : y$. Zur Bestimmung von y dient die Gleichung: $y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)y^2 - b^2 = 0$.

8) $x^4 + 2x^2 - 16x + 77 = 0.$
Aufl.: $y^6 + 4y^4 - 304y^2 - 256 = 0$; $y = 4$ Es ist also:
$(x^2 + 4x + 11)(x^2 - 4x + 7) = 0$; x_1 und $x_2 = 2 \pm \sqrt{-3}$, x_3 und $x_4 = -2 \pm \sqrt{-7}$.

9) $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0.$
Aufl.: $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) = 0$. Hieraus x wie in Beispiel 4.

§ 98b.

III. Andere Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

I. Methode von Mallet*).

Setzt man in der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ für x den Wert $qy + r$, wo y die neue Unbekannte, q und r noch zu bestimmende Größen bedeuten, so wird:

$$y^4 + \frac{4r + a}{q}y^3 + \frac{6r^2 + 3ar + b}{q^2}y^2 + \frac{4r^3 + 3ar^2 + 2br + c}{q^3}y + \frac{r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d}{q^4} = 0.$$

---

*) Von Friedr. Mallet 1780 zuerst angegeben (Nov. Act. Ups. III).

Zur reziproken Form gehören die Bedingungen:
$q^4 = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d$ und $(4r + a)\,q^2 = 4r^3 + 3ar^2 + 2br + c$.

Durch Elimination von q erhält man die Gleichung des dritten Grades:
$(a^3 - 4ab + 8c)r^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)r^2 + (a^2c + 8ad - 4bc)r + (a^2d - c^2) = 0$, woraus ein reeller Wert von r bestimmt werden kann. Drückt man noch q durch r aus, so erhält man eine reziproke Gleichung des vierten Grades, welche nach § 69 Nr. 183 gelöst wird.

1) $x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 46x + 20 = 0$.

Aufl.: $12r^3 - 46r^2 + 32r + 29 = 0$; $r = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}\sqrt{29}$;

$$y^4 - \tfrac{24}{29}\sqrt{29}\,y^3 + 6\tfrac{24}{29}\,y^2 - \tfrac{24}{29}\sqrt{29}\,y + 1 = 0;$$

$$y + \frac{1}{y} = z;\quad z^2 - \tfrac{24}{29}\sqrt{29}\,z \pm 4\tfrac{24}{29} = 0;$$

$$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{29}(7 \pm 2\sqrt{5})\sqrt{29},\qquad \left.\begin{matrix}y_3\\y_4\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{29}(5 \pm 2\sqrt{-1})\sqrt{29};$$

x_1 und $x_2 = 3 \pm \sqrt{5}$, $\quad x_3$ und $x_4 = 2 \pm \sqrt{-1}$.

II. Methode von L. Matthiessen*). Es seien x_1, x_2, x_3 und x_4 die Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Setzt man:

$x_1 x_2 = y_1$, $\quad x_1 x_3 = y_2$, $\quad x_1 x_4 = y_3$, so wird:

$$x_3 x_4 = \frac{d}{y_1} = \eta_1,\quad x_2 x_4 = \frac{d}{y_2} = \eta_2,\quad x_2 x_3 = \frac{d}{y_3} = \eta_3.$$

Die Werte $y_1, y_2, y_3, \eta_1, \eta_2$ und η_3 sind aber die Wurzelwerte der reziproken Gleichung des sechsten Grades:

$$y^6 - by^5 + (ac - d)y^4 - (a^2d + c^2 - 2bd)y^3 + (ac - d)dy^2 - bd^2y + d^3 = 0.$$

Aus den gefundenen Wurzeln erhält man:

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{y_1 y_2 y_3}{d}},\qquad x_2 = \pm\sqrt{\frac{y_1 \eta_2 \eta_3}{d}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 y_2 \eta_3}{d}},\qquad x_4 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2 y_3}{d}},\quad \text{wenn}$$

$$[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = \mp a,\quad \text{oder}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3}{d}},\qquad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1 y_2 y_3}{d}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{y_1 \eta_2 y_3}{d}},\qquad x_4 = \pm\sqrt{\frac{y_1 y_2 \eta_3}{d}},\quad \text{wenn}$$

$$[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = \mp (c : \sqrt{d})\ \text{ist.}$$

2) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.

Aufl.: Setzt man $y + \frac{d}{y} = z$, so ist $z^3 - 14z^2 + 48 = 0$;

$z_1 = 2$, $\quad z_2 = 6 + 2\sqrt{15}$, $\quad z_3 = 6 - 2\sqrt{15}$; $\quad y_1 = 4$,

$y_2 = (1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{5})$, $\quad y_3 = (1 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{5})$.

*) Eine Zusammenstellung sämtlicher algebraischen Methoden, die Gleichungen aufzulösen, findet sich in dem Werke: »Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen von Dr. Ludwig Matthiessen. Leipzig 1878«. Man vergleiche § 313—315 daselbst.

Da nun $[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3) d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = -(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) - (1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3}) = -8$ ist, so ist x_1 und $x_2 = 3 \pm \sqrt{5}$, x_3 und $x_4 = 1 \pm \sqrt{3}$.

3) $x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 12\frac{5}{12}x^2 + 3\frac{11}{12}x + 1 = 0$.

Aufl.: $y^6 + 12\frac{5}{12}y^5 + 1\frac{11}{18}y^4 - 40\frac{89}{144}y^3 + 1\frac{11}{18}y^2 + 12\frac{5}{12}y + 1 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = -12$, $y_3 = 1\frac{1}{2}$. Da die zweite der obigen Bedingungen erfüllt ist, so ist: $x_1 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -4$.

III. Methode von M. Job*). Man führt in der allgemeinen Gleichung des vierten Grades: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ für x den Wert $\varrho(1 \pm \sqrt{-n})$ ein, setzt die Summe der reellen Glieder gleich 0, ebenso die der imaginären. Hierdurch wird eine Gleichung in ϱ erhalten, die vom sechsten Grade ist, die sich aber in drei Faktoren zweiten Grades $\varrho^2 + \frac{1}{2}a\varrho + y = 0$ zerlegen läßt. Zur Bestimmung von y dient die Resolvente:

$$y^3 - \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{16}(ac + b^2 - 4d)y - \frac{1}{64}(abc - a^2 d - c^2) = 0.$$

Sind y_1, y_2 und y_3 die Wurzeln dieser letzten Gleichung, so ist:

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{4}\left[a + \sqrt{a^2 - 16y_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 16y_2} + \sqrt{a^2 - 16y_3}\right)\right],$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\frac{1}{4}\left[a - \sqrt{a^2 - 16y_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 16y_2} - \sqrt{a^2 - 16y_3}\right)\right].$$

Für $a = 0$ sind dieses die Euler'schen Endwerte.

4) $x^4 + 20x^3 + 98x^2 + 76x - 195 = 0$

Aufl.: $y^3 - 49y^2 + 744y - 3456 = 0$; $y_1 = 9$, $y_2 = 16$, $y_3 = 24$; $x_1 = -13$, $x_2 = -5$, $x_3 = -3$, $x_4 = +1$.

D. Auflösung der numerischen Gleichungen von höheren Graden mit einer unbekannten Größe**).

§ 99.

1) Auflösung durch Zerlegung in Faktoren

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
2) $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$
3) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$
4) $x^3 + 5x^2 - 34x - 80 = 0$.
5) $x^3 + 21x^2 + 131x + 231 = 0$.
6) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$.
7) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$.
8) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$.
9) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.
10) $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120 = 0$.

---

*) Beitr. zur Aufl. der Gleichungen. Programm. Dresden 1864.

**) Die Unmöglichkeit, allgemein algebraische Gleichungen von höherem Grade, als vom vierten, aufzulösen, hat Abel bewiesen. S. Crelle's Journal, I. S. 65.

11) $x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0$.
12) $x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0$.
13) $x^3 - 1\frac{1}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0$.
14) $x^3 - 1\frac{11}{12}x^2 + \frac{29}{24}x - \frac{1}{4} = 0$.
15) $x^3 + \frac{29}{45}x^2 - \frac{86}{135}x - \frac{56}{135} = 0$.
16) $x^3 + 2\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$.
17) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0$.
18) $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$.
Aufl.: x_1 und $x_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}(2 \pm 0)$,
x_5 und $x_6 = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.
19) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$.
20) $x^5 - 1 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 1$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{4}[-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}]$,
x_4 und $x_5 = \frac{1}{4}[-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}]$.
21) $x^6 - 1 = 0$.
Aufl.: x_1 und $x_2 = \pm 1$, x_3 und $x_4 = \pm J_1$, x_5 und $x_6 = \pm J_2$.
(S. § 95a.)
22) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$.
Aufl.: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{-15})$.

§ 100.

2) Auflösung der Gleichungen durch die Newton'sche Näherungs-Methode*).

1) Wenn der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ durch irgend einen für x gesetzten Wert n näherungsweise Genüge geleistet wird, um welche Größe (Korrektion) hat man diesen Näherungswert n zu vermehren, um einen genaueren Wert zu erhalten?

Aufl.: Heißt die Korrektion h, so ist $h = -\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}$.

2) Wie heißen die Korrektionen eines Näherungswertes n der Gleichungen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ und $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$?

Aufl.: $-\frac{n^4 + an^3 + bn^2 + cn + d}{4n^3 + 3an^2 + 2bn + c}$ und $-\frac{n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e}{5n^4 + 4an^3 + 3bn^2 + 2cn + d}$.

3) Wie heißt die Korrektion h des Näherungswertes n einer Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + p = 0$?

4) $x^3 + 3x - 5 = 0$.

Aufl.: $n = 1{,}1$, $h = 0{,}055$; $n_1 = 1{,}155$, $h_1 = -0{,}000828$;
$x_1 = 1{,}154172$, x_2 und $x_3 = -0{,}577086 \pm 1{,}999771\sqrt{-1}$.

*) Neutonus de analysi per aequationes numero terminorum infinitas 1669. Commerc. epist. Joh. Collins. London 1712.

5) $x^3 + 7x + 3 = 0.$

Aufl.: $n = -0,4$, $h = -0,018$; $n_1 = -0,418$, $h_1 = -0,0001283$; $x_1 = -0,4181283$, x_2 und $x_3 = 0,2090642 \pm 2,6704163\sqrt{-1}$.

6) $x^3 - 7x + 11 = 0.$

Aufl.: $n = -3,2$, $h = -0,026$; $n_1 = -3,226$, $h_1 = -0,000362$; $x_1 = -3,226362$; x_2 und $x_3 = 1,613181 \pm 0,898365\sqrt{-1}$.

7) $x^3 - 4x - 5 = 0.$

Aufl.: $n = 2,4$, $h = 0,05$, $h_1 = 0,0067$, $h_2 = -0,0000217$; $x_1 = 2,4566783$, x_2 und $x_3 = -1,2283392 \pm 0,72556968\sqrt{-1}$.

8) $x^3 - 5x + 4 = 0.$

Aufl.: $n = 1,5$, $h = 0,07$, $h_1 = -0,008$, $h_2 = -0,00045$, $h_3 = 0,000002813$; $x_1 = 1,561552813$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2,561552813$.

9) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0.$

Aufl.: $n = -2$, $h = 0,3$, $h_1 = 0,05$, $h_2 = -0,00063$, $h_3 = +0,000000809$; $x_1 = -1,650629191$, x_2 und $x_3 = -0,1746854 \pm 1,5468731\sqrt{-1}$.

10) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0.$

Aufl.: $n = 3,2$, $h_1 = -0,0176$, $h_2 = 0,0000777$; $x_1 = 3,1824777$. Durch Division erhält man die Gleichung: $x^3 + 1,182478x^2 + 0,76321022x - 1,5711 = 0$; $n = 0,7$, $h = 0,029$, $h_1 = -0,000274$; $x_2 = 0,728726$, x_3 und $x_4 = -0,955602 \pm 1,11480\sqrt{-1}$.

11) $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0,078459095727845$ $(= k)$*).

Aufl.: Da x sehr klein ist, so setze man: $5x = k$, also $x = \frac{1}{5}k$; ferner $5x = k + 20x^3$; $x = \frac{1}{5}k + 4(\frac{1}{5}k)^3 = 0,015707275 + h$, $h = 0,0000000423118207$; $x_1 = 0,0157073173118207$.

12) $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0.$

Aufl.: $x_1 = 12,756441794480744023$.

13) $6x^3 - 141x + 263 = 0.$

Aufl.: Setzt man $6x^3 - 141x + 263 = y$, so wird $y = 2$ für $x = 3$; setzt man $x_1 = 3 - h$, so wird: $y = 2 - 21h_1 + 54h_1^2 - 6h_1^3$. Setzt man näherungsweise $2 - 21h_1 + 54h_1^2 = 0$, so sind die Wurzeln dieser Gleichuug $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{6}$**).

1) $h_1 = 0,22 + h_2$; $y = -0,070288 + 1,8888h_2 + 50,04h_2^2 - 6h_2^3$. Setzt man $-0,070288 + 1,8888h_2 + 50,04h_2^2 = 0$, so ist $h_2 = 0,0231$. Durch Substitution von $h_2 = 0,0231 + h_3$ findet man $y = 0,000071 + 4,19h_3 + \ldots$; $h_3 = -0,000017$. Es ist also $x_1 = 2,756917$.

2) $h_1 = 0,17 + h_2$; $y = -0,038878 - 3,1602h_2 + 50,94h_2^2 - 6h_2^3$. Der Wurzelwert der Gleichung $-0,038878 - 3,1602h_2 + 50,94h_2^2 = 0$ ist $-0,0105$. Durch Substitution von $h_2 = -0,2105 + h_3$ erhält

*) Formel zur Aufsuchung des Sinus eines Centesimalgrades.

**) Auf die Benutzung quadratischer Hülfsgleichungen hat Newton selbst hingewiesen. Dabei erledigen sich die Einwendungen, welche Lagrange gegen die Newton'sche Methode erhoben hat. Man vergleiche Dr. Richard Baltzer, Elemente der Mathematik, I. Band: Algebra, § 8.

man — 0,000 087 — 4,23 h_3 ...; hieraus $h_3 = -0{,}000\,020$. Es ist also $x_2 = 2{,}840\,520$. Aus x_1 und x_2 ergiebt sich $x_3 = -5{,}597437$.

14) Es sei die unendliche Reihe gegeben:

$$0 = 1 - x + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{x^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \ldots;$$

man soll den Wurzelwert finden. Aufl.: $x = 1{,}44574\ldots$

15) $\sqrt{1 + 2x} + \sqrt{1 + 3x} + \sqrt{4x} = \sqrt{4 + x}$.

§ 101.

3) Auflösung der Gleichungen durch Kettenbrüche*).

1) $x^3 + 3x - 5 = 0$.

Aufl.: $x = 1 + \frac{1}{y}$, $y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$;

$y = 6 + \frac{1}{z}$, $19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0$;

$z = 2 + \frac{1}{t}$, $5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0$;

$t = 17 + \frac{1}{u}$, $u = 1 + \frac{1}{v}$, $v = 2 + \frac{1}{w}$ ꝛc.

Die Näherungswerte für x_1 sind: $1\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{13}$, $1\frac{35}{227}$, $1\frac{37}{240}$, $1\frac{109}{707} = 1{,}154\,172\ldots$

2) $x^3 + 7x + 3 = 0$.

Aufl.: Näherungswerte: $x_1 = -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{12}, -\frac{23}{55}, -\frac{120}{287}, -\frac{143}{342} = -0{,}418\,128\,65\ldots$

3) $x^3 - 7x + 11 = 0$.

Aufl.: Näherungswerte: $x_1 = -3\frac{1}{4}, -3\frac{2}{9}, -3\frac{5}{22}, -3\frac{7}{31}, -3\frac{12}{53}, -3\frac{79}{349} = -3{,}226\,361\ldots$

4) $x^3 - 4x - 5 = 0$.

Aufl.: Näherungswerte: $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{11}$, $2\frac{16}{35}$, $2\frac{21}{46}$, $2\frac{58}{127}$, $2\frac{195}{427} = 2{,}456\,675$, $2\frac{253}{554} = 2{,}456\,678\,6$.

5) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Aufl.: Näherungswerte: $x_1 = 2, \frac{9}{5}, \frac{182}{101}, \frac{373}{207}, \frac{1301}{722}, \frac{1674}{929}, \frac{11345}{6296}, \frac{103779}{57593}$ u. s. w.; $x_2 = \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{81}{182}, \frac{166}{373}, \frac{579}{1301}, \frac{745}{1674}, \frac{5049}{11345}, \frac{46186}{103779}$; $x_3 = -1, -\frac{5}{4}, -\frac{101}{81}, -\frac{207}{166}, -\frac{722}{579}, -\frac{929}{745}, -\frac{6296}{5049}, -\frac{63889}{51235}$**).

6) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0$.

Aufl.: Näherungswerte: $x_1 = 3\frac{1}{5}$, $3\frac{2}{11}$, $3\frac{25}{137}$, $3\frac{327}{1792} = 3{,}182477\ldots$

7) $x^3 - 5x - 3 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 2, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{954}{383} = 2{,}490\,86$; $x_2 = -0{,}656\,62$; $x_3 = -1{,}834\,24$.

---

*) Methode von Lagrange. Siehe Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1798. Eine gleichzeitige Bestimmung des größten und kleinsten Wurzelwertes mittels oscillierender Kettenbrüche s. in der Zeitschrift von Schlömilch, VI. S. 51.

**) Der Wert x_2 ist $= 2 \cos \frac{3}{7}\pi$, gleich der Seite des eingeschriebenen Vierzehneckes, $x_1 = 2 \cos \frac{1}{7}\pi$, $x_3 = 2 \cos \frac{5}{7}\pi$.

§ 102.

4) Auflösung der Gleichungen durch Teilbruchreihen*).

1) $x^3 + 3x - 5 = 0$.

Aufl.: $x = 1 + \frac{1}{y}$, $y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$.

$y (< 7) = 7 \frac{z}{z+1}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{z}$;

$27z^3 - 339z^2 - 24z - 1 = 0$, $z = 13 \frac{t}{t+1}$;

$1715t^3 - 57\,918t^2 - 315t - 1 = 0$, $t = 34 \frac{u}{u+1}$;

$442\,441u^2 - 66\,974\,631u - 10\,713 = 0$, $u = 152 \frac{v}{v+1}$;

$42\,002\,239v^2 - 10\,180\,165\,338v - 10\,713 = 0$,

v nahe $= \frac{10180165338}{42002239} = 242 \frac{w}{w+1}$; $w = -650$.

$x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}A_1 + \frac{1}{34}A_2 + \frac{1}{152}A_3 + \frac{1}{242}A_4 - \frac{1}{650}A_5 =$ 1,154 171 495 181 4. Die anderen Wurzeln der Gleichung sind: $-0{,}577\,085\,747\,590\,7 \pm 1{,}999\,770\,956\,9\sqrt{-1}$.

2) $x^3 + 7x + 3 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{57}A_2 - \frac{1}{4113}A_3) = -0{,}418\,128\,299\,7$.

x_2 und $x_3 = 0{,}209\,064\,149\,76 \pm 2{,}670\,416\,345\,09\sqrt{-1}$.

3) $x^3 - 7x + 11 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -(3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{19}A_2 + \frac{1}{28}A_3 - \frac{1}{74}A_4 - \frac{1}{174}A_5 - \frac{1}{1810}A_6 \ldots)$ oder $= -3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{11}A_1 + \frac{1}{25}A_2 + \frac{1}{609}A_3 + \frac{1}{4472}A_4 - \ldots = -3{,}226\,362\,143\,269\,723$,

x_2 und $x_3 = 1{,}613\,181\,071\,6 \pm 0{,}898\,364\,909\,0\sqrt{-1}$.

4) $x^3 - 4x - 5 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 2(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}A_1 - \frac{1}{123}A_2 + \frac{1}{7496}A_3 - \frac{1}{65611}A_4 \ldots) = 2{,}456\,678\,343\,044\,111\,092$,

x_2 und $x_3 = -1{,}228\,339\,171\,522\,055\,54 \pm 0{,}725\,569\,680\,241\,993\,95\sqrt{-1}$.

5) $x^3 - 5x + 4 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}A_1 - \frac{1}{66}A_2 - \frac{1}{4354}A_3 - \frac{1}{18957314}A_4$;

$x_1 = 1{,}561\,552\,812\,808\,830\,274\,910\,7$, $x_2 = 1$,

$x_3 = -2{,}561\,552\,812\,808\,830\,274\,910\,7$.

6) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{10}A_2 - \frac{1}{27}A_3 - \frac{1}{52}A_4 - \frac{1}{323}A_5 = -1{,}650\,629\,191\,547$,

x_2 und $x_3 = -0{,}174\,685\,404 \pm 1{,}546\,868\,887\,5\sqrt{-1}$.

7) $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

Aufl.: $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{10}A_2 - \frac{1}{17}A_3 + \frac{1}{462}A_4 + \frac{1}{1357}A_5 =$ 1,611 766 298 600.

8) $x^3 - 2x - 5$**) $= 0$.

Aufl.: $x_1 = 2{,}094\,551\,481\,542\,326\,591\,482\,386\,540\,579\,302\,963\,857\,306\,105\,628$,

x_2 und $x_3 = -1{,}047\,275\,740\,771\,163\,295\,741 \pm 1{,}135\,939\,889\,088\,972\,198\,829\sqrt{-1}$.

---

*) Methode von Heis.

**) Man vergleiche Matthiessen, Schlüssel 2. Bd. § 102 Nr. 8. Die Wurzel x_1 ist auf 48 Decimalen genau.

9) $x^4 - x + 1 = 0$.

Aufl.: Man setze $x = y \pm z\sqrt{-1}$, wodurch man $64y^6 - 16y^2 - 1 = 0$, $z^2 = y^2 - \frac{1}{4}(1 : y)$ erhält. Aus $y^2 = 1 : t$ wird: $t^3 + 16t^2 - 64 = 0$. Die Auflösung durch Teilbruchreihen ergiebt: $t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{8}A_3 + \frac{1}{32}A_4 + \frac{1}{1738}A_5 = 1{,}891\,3356$, $y = \pm 0{,}727\,136$; $z = \pm\sqrt{0{,}727\,136^2 \mp (1 : 2{,}908\,544)}$; $z_1 = \pm 0{,}430\,014$, $z_2 = \pm 0{,}934\,099$. Die vier Wurzeln der Gleichung sind also: x_1 und $x_2 = 0{,}727\,136 \pm 0{,}430\,014\sqrt{-1}$, x_3 und $x_4 = -0{,}727\,136 \pm 0{,}934\,099\sqrt{-1}$.

§ 103.

5) Gräffe'sche Methode*).

1) Wie läßt sich die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ in eine andere umwandeln, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln jener Gleichung sind?

Aufl.: Man setze $\sqrt{x}$ statt x; alsdann wird $x - a\sqrt{x} + b = 0$, und hieraus $x^2 - (a^2 - 2b)x + b^2 = 0$, als die verlangte Gleichung. Die Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ z. B. hat die Wurzeln 3 und 4; die Gleichung $x^2 - (7^2 - 24)x + 144 = x^2 - 25x + 144 = 0$ die Wurzeln 9 und 16.

2) Es soll die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ (Stammgleichung) in eine andere (transformierte Gleichung) umgewandelt werden, so daß die Wurzeln der letzteren die Quadrate der Wurzeln der ersteren werden.

Aufl.: Setzt man $\sqrt{x}$ statt x, so wird $\sqrt{x^3} - ax + b\sqrt{x} - c = 0$, oder $\sqrt{x}(x + b) = ax + c$ und hieraus die verlangte transformierte Gleichung: $x^3 - (a^2 - 2b)x^2 + (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$.

3) α) Es soll aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, welche die Wurzeln 3, 4 und 5 hat, eine andere Gleichung gebildet werden, welche die Wurzeln 9, 16 und 25, und hieraus eine dritte, welche die Wurzeln 81, 256 und 625 hat.

Aufl.: 1) $x^3 - 50x^2 + 769x - 3600 = 0$;
2) $x^3 - 962x^2 + 231\,361x - 12\,960\,000 = 0$.

Ebenso sollen β) aus der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 23x + 60$, welche die Wurzeln 3, 4 und -5, und γ) aus der Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$, welche die Wurzeln -3, -4 und 5 hat, andere Gleichungen abgeleitet werden, deren Wurzeln die zweiten, vierten und achten Potenzen jener Wurzeln sind.

*) S. die Abhandlung von Encke im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1841 und in Crelle's Journal, XXII. Band.

4) Aus der gegebenen Gleichung des $n$ten Grades: $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} + Fx^{n-6} + \ldots = 0$ eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Aufl.: Setzt man in der gegebenen Gleichung überall $x^{\frac{1}{2}}$ statt x, und trennt die ganze Gleichung in zwei Teile, so wird:

$$x^{\frac{n}{2}} + Bx^{\frac{n-2}{2}} + Dx^{\frac{n-4}{2}} + Fx^{\frac{n-6}{2}} + \ldots =$$

$-(Ax^{\frac{n-1}{2}} + Cx^{\frac{n-3}{2}} + Ex^{\frac{n-5}{2}} + \ldots.)$. Quadriert man auf beiden Seiten und ordnet die Gleichung, so erhält man $x^n - (A^2 - 2B)x^{n-1} + (B^2 - 2AC + 2D)x^{n-2} - (C^2 - 2BD + 2AE - 2F)x^{n-3} + (D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H)x^{n-4} - (E^2 - 2DF + 2CG - 2BH + 2AJ - 2K)x^{n-5} + \ldots = 0$. Der Koeffizient einer Potenz von x in der neuen Gleichung wird demnach gebildet durch die Verbindung des Quadrats des Koeffizienten derselben Potenz in der schon berechneten Gleichung mit den doppelten Produkten je zweier gleichweit zu beiden Seiten von ihm abstehenden Koeffizienten, die letzteren regelmäßig mit abwechselnden Zeichen genommen. Aus den Gleichungen $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ und $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ z. B. erhält man die transformierten Gleichungen $x^4 - (A^2 - 2B)x^3 + (B^2 - 2AC + 2D)x^2 - (C^2 - 2BD)x + D^2 = 0$ und $x^5 - (A^2 - 2B)x^4 + (B^2 - 2AC + 2D)x^3 - (C^2 - 2BD + 2AE)x^2 + (D^2 - 2CE)x - E^2 = 0$.

5) Wenn aus einer Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots = 0,$$

welche die n Wurzeln a, b, c, d, e u. s. w. hat, eine andere $x^n - A'x^{n-1} + B'x^{n-2} - C'x^{n-3} \ldots = 0$ abgeleitet wird, deren Wurzeln die $m$ten Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung sind, in welcher Beziehung stehen A', B', C', D' u. s. w. zu den Wurzeln der ersten Gleichung?

Aufl.: $A' = a^m + b^m + c^m + d^m + \ldots = [a^m]$;
$B' = a^m b^m + a^m c^m + a^m d^m \ldots + b^m c^m \ldots = [a^m b^m]$;
$C' = [a^m b^m c^m]$ u. s. w.

6) Wenn $a > b > c > d > e$ u. s. w. und m eine **sehr große** Zahl ist, was kann man alsdann **ohne merklichen Fehler** für $[a^m]$, $[a^m b^m]$, $[a^m b^m c^m]$ u. s. w. setzen?

Antw.: Für größer werdende m nähern sich die Quotienten

$$\frac{[a^m]}{a^m}, \quad \frac{[a^m b^m]}{a^m b^m}, \quad \frac{[a^m b^m c^m]}{a^m b^m c^m} \text{ u. s. w.}$$

immer mehr und mehr der Einheit, so daß also ohne merklichen Fehler $[a^m] = a^m$, $[a^m b^m] = a^m b^m$, $[a^m b^m c^m] = a^m b^m c^m$ u. s. w. gesetzt werden kann.

7) Welche Form erhält eine Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots = 0,$$

wenn sie in eine andere umgewandelt wird, deren Wurzeln die $m$ten Potenzen der nach ihren abnehmenden numerischen Werten geord-

neten Wurzeln a, b, c, d u. s. w. der ersten Gleichung sind, unter der Voraussetzung, daß m eine sehr große Zahl ist?

Antw.: $x^n - a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} - a^m b^m c^m x^{n-3} + a^m b^m c^m d^m x^{n-4} + \ldots = 0$.

8) Wie bestimmen sich aus einer transformierten Gleichung $x^n - A' x^{n-1} + B' x^{n-2} - C' x^{n-3} \ldots = 0$, deren Wurzeln die $m$ten Potenzen der Wurzeln der Stammgleichung sind, die Wurzeln der Stammgleichung selbst, unter der Voraussetzung, daß m eine sehr große Zahl ist?*)

Antw.: Der größte numerische Wurzelwert ist ohne Rücksicht auf das Zeichen $\sqrt[m]{A'}$, der folgende $\sqrt[m]{B' : A'}$, der dritte $\sqrt[m]{C' : B'}$ u. s. w.

9) Wie läßt sich erkennen, ob der Grad der Potenz für die Wurzeln der Stammgleichung groß genug ist, so daß die $m$te Potenz jeder folgenden Wurzel gegen die $m$te Potenz der vorangehenden verschwindet?

Antw.: Wenn bei fortgesetztem Quadrieren der Wurzeln die Koeffizienten der transformierten Gleichungen quadratisch wachsen, oder, was dasselbe ist, wenn die Logarithmen der Koeffizienten sich verdoppeln.

Bemerkung. Ist die Wurzel $a = b$ oder $a = -b$, so wird der erste Koeffizient der transformierten Gleichung gleich $a^m + b^m = 2a^m$. In diesem Falle wird, wenn m sehr groß ist, bei fortgesetztem Quadrieren nicht dieser Koeffizient selbst, sondern dessen Hälfte quadratisch zunehmen. Ist $b = c$, so ist der zweite Koeffizient $= 2 b^m c^m$ u. s. w.

10) Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ zu bestimmen.

Aufl.: Die transformierten Gleichungen sind der Reihe nach:

1) $x^3 - 14x^2 + 49x - 36 = 0$.
2) $x^3 - 98x^2 + 1393x - 1296 = 0$.
3) $x^3 - 6818x^2 + 1\,686\,433x - 1\,679\,616 = 0$.
4) $x^3 - (num\ log\ 7{,}634\,60)x^2 + (num\ log\ 12{,}450\,43)x - num\ log\ 12{,}450\,42 = 0$.
5) $x^3 - (num\ log\ 15{,}267\,88)x^2 + (num\ log\ 24{,}900\,84)x - num\ log\ 24{,}900\,84 = 0$.
6) $x^3 - (num\ log\ 30{,}535\,76)x^2 + (num\ log\ 49{,}801\,68)x - num\ log\ 49{,}801\,68 = 0$.

Die letzte Gleichung hat zu Wurzeln die 64ten Potenzen der Wurzeln der Stammgleichung, und da die Logarithmen der Koeffizienten dieser Gleichung die doppelten der Logarithmen der Koeffizienten der 5ten transformierten Gleichung sind, so kann man bei dieser 6ten Gleichung stehen bleiben. Es ist also:

$log\ a = 30{,}535\,76 : 64 = 0{,}477\,12$;
$log\ b = \frac{1}{64}(49{,}801\,68 - 30{,}535\,76) = 0{,}301\,03$;
$log\ c = \frac{1}{64}(49{,}801\,68 - 49{,}801\,68) = 0$.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also, wenn man noch zuvor zur Bestimmung der gehörigen Vorzeichen die leichte Probe macht, $+3$, $+2$ und $+1$.

*) Es wird hierbei immer angenommen, daß die Wurzeln der Gleichungen reell sind. Über die imaginären Wurzeln, die sich ebenfalls durch diese Methode bestimmen lassen, sehe man die angeführten Schriften nach.

11) $x^3 + 2x^2 - 30x + 39 = 0$.

Aufl. 1) $x^3 - 64x^2 + 744x - 1521 = 0$.
2) $x^3 - 2608x^2 + 358848x - 2313441 = 0$.
3) $x^3 - [6,784\,187\,0]x^2 + [11,067\,089\,2]x$*) $- [12,728\,517\,0] = 0$.
4) $x^3 - [13,565\,627\,0]x^2 + 22,132\,096\,5]x - [25,457\,034\,0] = 0$.
5) $x^3 - [27,131\,245\,5]x^2 + [44,264\,190\,3]x - [50,914\,068\,0] = 0$.
$\log a = 0,847\,851\,4$, $\log b = 0,535\,404\,5$, $\log c = 0,207\,808\,7$.
Bestimmt man die zugehörigen Vorzeichen, so wird:
$a = -7,044\,52$, $b = 3,430\,87$, $c = 1,613\,65$.

12) $x^3 + 3,236\,068x^2 - 2,055\,728x - 0,763\,932 = 0$.

Aufl.: 1) $x^3 - 14,563\,590x^2 + 9,170\,288x - 0,583\,592 = 0$.
2) $x^3 - 194,34x^2 + 67,072x - 0,340\,58 = 0$.
3) $x^3 - 37\,634x^2 + 4366,2x - 0,115\,99 = 0$.
4) $x^3 - [9,151\,16]x^2 + [7,280\,02]x - [\bar{2},128\,88] = 0$.
$\log a = 0,571\,95$, $\log b = \bar{1},883\,05$, $\log c = \bar{1},428\,05$.
$a = -3,732\,04$, $b = +0,763\,93$, $c = -0,267\,95$.

13) $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48 = 0$.

Aufl.: 1) $x^4 - 78x^3 + 945x^2 - 3172x + 2304 = 0$.
2) $x^4 - [3,622\,628\,4]x^3 + [5,605\,090\,6]x^2 - [6,756\,409\,7]x + [6,724\,965\,0] = 0$.
3) $x^4 - [7,224\,896\,4]x^3 + [11,058\,383\,5]x^2 - [13,451\,689\,0]x + [13,449930] = 0$.
4) $x^4 - [14,449\,439\,9]x^3 + [22,084\,041\,4]x^2 - [26,899\,866\,4]x + [26,899\,860\,0] = 0$.
5) $x^4 - [28,898\,879\,7]x^3 + [44,166\,762\,4]x^2 - [53,799\,719\,5]x + [53,799\,720\,0] = 0$.
$\log a = 0,903\,090\,0$, $\log b = 0,477\,121\,3$, $\log c = 0,301\,029\,9$, $\log d = 0$; $a = 8$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$.

14) $x^3 - 2x^2 - 36x + 72 = 0$.

Aufl.: 1) $x^3 - 76x^2 + 1584x - 5184 = 0$.
2) $x^3 - 2608x^2 + 172\,108\,8x - 268\,738\,56 = 0$.
3) $x^3 - [6,526\,273\,0]x^2 + [12,450\,552\,4]x - [14,858\,660\,2] = 0$.
4) $x^3 - [12,751\,449\,3]x^2 + [24,900\,840\,0]x - [29,717\,320\,4] = 0$.
5) $x^3 - [25,201\,866\,6]x^2 + [49,801\,680\,0]x - [59,434\,640\,8] = 0$.

Die Logarithmen der zweiten und dritten Koeffizienten verdoppeln sich, aber nicht die der ersten Koeffizienten. Vermindert man aber die ersten Koeffizienten der 4ten und 5ten transformierten Gleichung um $\log 2 = 0,301\,030\,0$, so erhält man 12,450 419 3 und 24,900 836 6, von welchen die zweite Zahl ganz nahe doppelt so groß, als die erste, ist. Die Stammgleichung hat also zwei gleiche Wurzeln, a und b**).

Es ist $\log a = \log b = \frac{1}{32}(25,201\,866\,6 - 0,301\,030\,0) = 0,778\,151\,2$; $\log c = \frac{1}{32}(59,434\,640\,8 - 49,801\,673\,2) = 0,301\,030\,0$; $a = +6$, $b = -6$, $c = +2$.

---

*) Der Abkürzung wegen sind statt der Zahlen die Logarithmen derselben, in Klammern [ ] eingeschlossen, gesetzt.

**) Ist $a = b$, so sind die beiden ersten Koeffizienten der transformierten Gleichung $x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots = 0$ beziehungsweise $2a^m$ und a^{2m}; es ist also $A'^2 = 4B'$.

15) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 6x + 2 = 0.$

Aufl.: 1) $x^4 - 26x^3 + 149x^2 - 80x + 4 = 0.$
2) $x^4 - 378x^3 + 18\,049x^2 - 5208x + 16 = 0.$
3) $x^4 - 106\,786x^3 + 321\,829\,185x^2 - 26\,545\,696x + 256 = 0.$
4) $x^4 - [10{,}031\,80]x^3 + [17{,}015\,22]x^2$
$- [14{,}848\,10]x + [4{,}816\,48] = 0.$
$a = +4{,}236\,3, \quad b = -2{,}731\,9, \quad c = +0{,}732\,1,$
$d = -0{,}236\,1.$

16) $x^4 - 216x^3 + 16286x^2 - 499176x + 5106465 = 0.$

Aufl.: 1) $x^4 - 14\,084x^3 + 59\,802\,694x^2 - 82\,848\,900\,996x$
$+ 26\,075\,904\,796\,225 = 0.$
2) $x^4 - [7{,}896\,270\,7]x^3 + [15{,}112\,211\,6]x^2$
$- [21{,}573\,466\,1]x + [26{,}832\,478\,8] = 0.$
3) $x^4 - [15{,}557\,806\,0]x^3 + [30{,}036\,649\,4]x^2$
$- [43{,}088\,679\,0]x + [53{,}664\,957\,6] = 0.$
4) $x^4 - [31{,}036\,387\,0]x^3 + [60{,}039\,509\,0]x^2$
$- [86{,}174\,443\,8]x + [107{,}329\,915\,2] = 0.$
5) $x^4 - [62{,}064\,653\,2]x^3 + [120{,}077\,839\,8]x^2$
$- [172{,}348\,887\,6]x + [214{,}659\,830\,4] = 0.$
$a = 87, \quad b = 65, \quad c = 43, \quad d = 21.$

17) $x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x$
$- \frac{1}{3432} = 0$*).

Aufl.: Setzt man, um die echten Brüche zu vermeiden, an die Stelle von x den Quotienten $x : 3432^{\frac{1}{7}}$, so wird:
$x^7 - [1{,}049\,146\,2]x^6 + [1{,}695\,553\,5]x^5 - [2{,}042\,269\,3]x^4$
$+ [2{,}108\,014\,8]x^3 - [1{,}868\,365\,5]x^2 + [1{,}243\,109\,9]x - [0] = 0.$
Die transformierten Gleichungen sind:
1) $x^7 - [1{,}418\,004\,8]x^6 + [2.395\,987\,0]x^5 - [3{,}018\,994\,8]x^4$
$+ [3{,}273\,840\,1]x^3 - [3{,}073\,934\,8]x^2 + [2{,}200\,429\,7]x - [0] = 0.$
2) $x^7 - [2{,}273\,572\,5]x^6 + [4{,}041\,089\,0]x^5 - [5{,}338\,620\,2]x^4$
$+ [6{,}053\,445\,1]x^3 - [5{,}909\,364\,3]x^2 + [4{,}357\,886\,0]x - [0] = 0.$
3) $x^7 - [4{,}122\,68]x^6 + [7{,}614\,95]x^5 - [10{,}361\,76]x^4 + [11{,}966\,40]x^3$
$- [11{,}783\,33]x^2 + [8{,}714\,41]x - [0] = 0.$
4) $x^7 - [7{,}970\,94]x^6 + [15{,}037\,23]x^5 - [20{,}655\,92]x^4 + [23{,}918\,40]x^3$
$- [23{,}565\,53]x^2 + [17{,}428\,82]x - [0] = 0.$
5) $x^7 - [14{,}817\,46\,x^6 + [30{,}042\,31]x^5 - [41{,}308\,00]x^4 + [47{,}836\,79]x^3$
$- [47{,}131\,06]x^2 + [34{,}857\,64]x - [0] = 0.$
6) $x^7 - [31{,}612\,14]x^6 + [60{,}083\,66]x^5 - [82{,}615\,98]x^4$
$+ [95{,}673\,58]x^3 - [94{,}262\,12]x^2 + [69{,}715\,28]x - [0] = 0.$
7) $x^7 - [63{,}223\,65]x^6 + [120{,}167\,32]x^5 - [165{,}231\,96]x^4$
$+ [191{,}347\,16]x^3 - [188{,}524\,24]x^2 + [139{,}430\,56]x - [0] = 0.$
$\log a = 0{,}493\,935, \quad \log b = 0{,}444\,872, \quad \log c = 0{,}352\,067,$
$\log d = 0{,}204\,025, \quad \log e = \overline{1}{,}977\,946, \quad \log f = \overline{1}{,}616\,456,$
$\log g = \overline{2}{,}910\,699.$ Zieht man von diesen Logarithmen den oben hinzugefügten Logarithmus $3432^{\frac{1}{7}} = 0{,}505\,078$ ab, so erhält man für die Wurzeln selbst folgende Werte:

*) Gleichung, durch welche nach Gauß die Punkte auf einer gegebenen Abscissenlinie bestimmt werden, welche für die mechanische Quadratur das möglichst vorteilhafte Resultat geben, wenn man überhaupt nicht mehr, als sieben Ordinaten, anwenden will. (Comment. societ. Goetting. Vol. III, ad A. 1814—1815.)

$a = 0{,}9747$, $b = 0{,}8705$, $c = 0{,}7031$, $d = 0{,}5000$, $e = 0{,}2971$, $f = 0{,}1292$, $g = 0{,}0254$.

Bemerkung: Durch Anwendung weitläufiger Hülfsmittel würde man erhalten: $a = 0{,}9745536$, $b = 0{,}8707656$, $c = 0{,}7029226$, $d = 0{,}5000000$, $e = 0{,}2970774$, $f = 0{,}1292345$, $g = 0{,}0254462$.

§ 104.

Auflösung der Gleichungen von höheren Graden mit mehreren unbekannten Größen.

1) Wie wird aus zwei Gleichungen, die in Bezug auf x nicht von demselben Grade sind, eine neue Gleichung abgeleitet, welche von einem um eine Einheit niedrigern Grade ist, als die höhere der beiden Gleichungen?

2) Es soll aus den beiden Gleichungen $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + fy = 0$ und $mx^2 + nx + py^2 = 0$. eine dritte vom vierten Grade in Beziehung auf x abgeleitet werden.

Aufl.: $(bm - an)x^4 + (an - apy^2)x^3 + dmx^2 + emx + fmy = 0$

3) Aus den beiden Gleichungen $2x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 6y^4 = 0$ und $7x^2 - 8xy - 9y^2 = 0$ soll eine neue Gleichung des zweiten Grades abgeleitet werden.

Aufl.: $141x^2 - 145xy + 147y^2 = 0$.

4) Wie wird aus zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, welche in Bezug auf die zu eliminierende Größe von gleichem Grade sind, diese Größe gänzlich eliminiert?

5) In den beiden Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ und $a'x^2 + b'x + c' = 0$ soll die Größe x eliminiert werden.

Aufl.: $(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$.

6) Welche Endgleichung erhält man durch Elimination der x aus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ und $a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$?

Aufl.: $(ad' - a'd)^3 - [(ac' - a'c)(bd' - b'd) + 2(ab' - a'b)(cd' - c'd)](ad' - a'd) + (ab' - a'b)(bd' - b'd)^2 + (cd' - c'd)(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)(cd' - c'd) = 0$.

7) Von welchem Grade in Bezug auf y sind die Endgleichungen, wenn beide Gleichungen in Bezug auf x und y vom zweiten, von welchem Grade, wenn beide Gleichungen vom dritten Grade sind?

Antw.: Im ersten Falle höchstens vom 4ten, im zweiten höchstens vom 9ten Grade.

8) Welche Gleichung in Bezug auf x erhält man aus den beiden Gleichungen: $mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0$ und $m'x^2 + n'xy + p'y^2 + q'x + r'y + s' = 0$?

Aufl.: $[(mp' - m'p)^2 - (np' - n'p)(mn' - m'n)]x^4 + [2(mp' - m'p)(p'q - pq') - (p'r - pr')(mn' - m'n) - (np' - n'p)(n'q - nq'$

$+mr'-m'r)]x^3+[(p'q-pq')^2+2(p'm-pm')(p's-ps')-(p'r-pr')(n'q-nq'+mr'-m'r)-(np'-n'p)(n's-ns'+qr'-q'r)]x^2+[2(p'q-pq')(p's-ps')-(p'r-pr')(n's-ns'+qr'-q'r)-(p'n-pn')(r's-rs')]x+[(p's-ps')^2-(p'r-pr')(r's-rs')]=0.$

9) Aus den folgenden Gleichungen x zu eliminieren: $2x^3-3x^2y+4xy^2-52=0$ und $3x^3-4x^2y+5xy^2-66=0$.

Aufl.: $3y^6+47y^3-3456=0$.

10) Aus den beiden Gleichungen $x^3+3x^2y+3xy^2-98=0$ und $x^2+4xy-2y^2-10=0$ das x nach der Methode des gemeinschaftlichen Teilers zu eliminieren und die Endgleichung zu bestimmen.

Aufl.: $43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0$.

11) Die Gleichungen $x^2-xy-x-2y^2-4y-2=0$ und $x^2+x-3xy+2y^2-2y=0$ aufzulösen.

Aufl.: Eliminiert man x, so ist die Endgleichung: $3y^3+10y^2+3y=0$; hieraus erhält man $y_1=0$, $x_1=-1$; $y_2=-3$, $x_2=-4$; $y_3=-\frac{1}{3}$, $x_3=-\frac{2}{3}$.

12) $21x^2-26xy+11x+8y^2-6y-2=0$,
$2x^2-3xy+2x+y^2-4=0$.

Aufl.: $x=(5y^2+12y-80):(11y-20)$; Endgleichung: $y^4-31y^3+338y^2-1520y+2400=0$; hieraus ergeben sich:

$x=2$	3	6	7
$y=4$	5	10	12.

13) $x^2-2xy+y^2-1{,}21=0$,
$1085x^2-2258xy+338{,}8x+689y^2+3388y-7174{,}09=0$.

Aufl.:

$x=1{,}2$	4,5	6,5	3,2
$y=2{,}3$	5,6	5,4	2,1.

14) $10x^2+69xy-6111x-126y^2+5454y+215\,100=0$,
$574x^2-1087xy-53\,929x+315y^2+57\,801y+1\,209\,846=0$.

Aufl.:

$x=120$	78	57	63
$y=54$	59	13	17.

15) $x^2+4xy+x-4y^2+6=0$,
$x^2+7xy+4x-7y^2+9=0$.

Aufl.:

$x=1$	2	1	2
$y=-1$	-1	2	3.

16) $x^3+xy^2-5=0$, $y^3+yx^2-3=0$.

Aufl.: $x_1=1{,}543\,394\,797\,68$ und $y_1=0{,}926\,036\,878\,59$
x_2 und $x_3=0{,}771\,697\,398\,84(-1\pm\sqrt{-3})$,
y_2 und $y_3=0{,}463\,018\,439\,29(-1\pm\sqrt{-3})$.

17) α) $x^7-5x^2y^4+1506=0$, $y^5-3x^4y-103=0$.

Aufl.: $x_1 = 1{,}996\,538$, $y_1 = 3{,}008\,357$;
$x_2 = 15{,}000\,14$, $y_2 = 19{,}741\,47$;
$x_3 = 15{,}000\,35$, $y_3 = -19{,}740\,12$;
$x_4 = 2{,}420\,767\,2$, $y_4 = -2{,}861\,933\,6$;
$x_5 = -2{,}300\,546$, $y_5 = -2{,}574\,969$;
$x_6 = -2{,}843\,568$, $y_6 = -0{,}525\,259$;
$x_7 = -1{,}924\,591$, $y_7 = 2{,}952\,963$.

β) $x + y = a,\ x^7 + y^7 = b$.

Aufl.: Das Produkt $xy = p$ erhält man aus der Gleichung:
$p^3 - 2a^2p^2 + a^4p - \frac{1}{7}[a^6 - (b : a)] = 0$.

Beispiel: $a = 1,\ b = 127$; x_1 und $y_2 = 2$, x_2 und $y_1 = -1$;

$$x_{\substack{3\\4}} = y_{\substack{5\\6}} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \sqrt{-7 \mp 4\sqrt{-5}}\right] = 1{,}238\,065\,6 \mp 1{,}514\,831\,2\sqrt{-1};$$

$$y_{\substack{3\\4}} = x_{\substack{5\\6}} = \tfrac{1}{2}\left[1 - \sqrt{-7 \mp 4\sqrt{-5}}\right] = -0{,}238\,065\,6 \pm 1{,}514\,831\,2\sqrt{-1}.$$

18) Zwischen den Gleichungen:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^m + \left(\frac{b}{y}\right)^m + \left(\frac{c}{z}\right)^m = 1,$$

$$x^n + y^n + z^n = d^n,$$

$$\frac{a^m}{x^{m+n}} = \frac{b^m}{y^{m+n}} = \frac{c^m}{z^{m+n}}$$

die Größen x, y und z zu eliminieren.

Aufl.: $d^{mn} = \left(a^{\frac{mn}{m+n}} + b^{\frac{mn}{m+n}} + c^{\frac{mn}{m+n}}\right)^{m+n}$.

19) Die dritte Wurzel aus $a + b\sqrt{-1}$ in einen Ausdruck von der Form $x + y\sqrt{-1}$ zu verwandeln.

Aufl.: $x^3 - 3xy^2 = a,\ 3x^2y - y^3 = b$; also:
$64y^9 + 48by^6 - (15b^2 + 27a^2)y^3 + b^3 = 0$, eine Gleichung, die sich auf eine vom dritten Grade zurückführen läßt.

Beispiel: Für $a = 2,\ b = 11$ wird: $64y^9 + 528y^6 - 1923y^3 + 1331 = 0$;
$y^3 = 1,\ y_1 = 1,\ x_1 = 2$.

Dividiert man die Gleichung durch $y^3 - 1$, so wird:
$64y^6 + 592y^3 - 1331 = 0$; $y^3 = \frac{1}{8}(\pm 30\sqrt{3} - 37)$;
y_2 und $y_3 = \frac{1}{2}(\pm 30\sqrt{3} - 37)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(\pm m\sqrt{3} - n)$.

Nach einem ähnlichen Verfahren, wie oben, findet man:
$m = 2,\ n = 4$; y_2 und $y_3 = -\frac{1}{2}(1 \mp 2\sqrt{3})$;
x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{3})$, also:
$y_2 = +1{,}232\,050\,8$, $y_3 = -2{,}232\,050\,8$;
$x_2 = +1{,}866\,025\,4$, $x_3 = +0{,}133\,974\,6$.

20) $x + y + z + u = a,$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b,$
$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c,$
$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = d.$

Aufl.: Die Elimination führt auf die Gleichung des 4. Grades:

$$x^4 - ax^3 + \frac{a^2 - b}{2} x^2 - \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6} x$$
$$+ \frac{a^4 + 8ac - 6a^2b + 3b^2 - 6d}{24} = 0.$$

Beispiel. Für $a = 10$, $b = 30$, $c = 100$, $d = 354$ wird:
$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, hieraus:
$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$ u. s. w.

§ 105.

Anwendungen der Gleichungen von höheren Graden.

1) Multipliziere ich die Hälfte einer Zahl mit dem dritten Teile, dann mit dem vierten Teile und addiere 5 hinzu, so erhalte ich 6. Wie heißt die Zahl: Antw.: 2,884499....

2) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Körbe Äpfel. In jedem Korbe sind 75mal soviel Äpfel, als Körbe vorhanden sind, und er bezahlt für je 10 Äpfel soviel Pfennige, als jeder Korb 100 Äpfel enthält. Wenn er nun im ganzen 28,80 *M* bezahlt, wieviel Äpfel hat er gekauft? Antw.: 4800.

3) Die drei Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Inhalt 230685 *ccm* beträgt, verhalten sich wie 3 : 5 : 7. Wie groß sind die drei Seiten?
Antw.: Die eine 39 *cm*, die zweite 65 *cm*, die dritte 91 *cm*.

4) Von zwei Würfeln, von denen der Inhalt des ersten $\frac{8}{27}$ des Inhaltes des zweiten beträgt, ist die Oberfläche des ersten um 480 *qm* kleiner, als die des zweiten. Wie groß ist beider Inhalt?
Antw.: Der des ersten 512, der des zweiten 1728 *cbm*.

5) Wenn ein Kapital von 192000 *Fl*, dessen Zinsen jährlich zum Kapitale geschlagen werden, nach drei Jahren sich um 14763 *Fl* vergrößert, zu wieviel Prozent war das Kapital ausgeliehen?
Antw.: Zu $2\frac{1}{2}$ Prozent.

6) Von 81 *kg* reinen Silbers wäge ich eine bestimmte Anzahl Kilogramm ab und ersetze das Fehlende durch Kupfer; von der Mischung nehme ich zum zweiten, dritten, vierten Male ebensoviel als zum ersten Male weg und ersetze das Fehlende jedesmal durch eine gleiche Quantität Kupfer. Wenn nun zuletzt nur noch 16 *kg* reines Silber in der Mischung enthalten sind, wieviel Kilogramm wurden jedesmal weggenommen? Antw.: 27.

7) Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz, Quotient und Summe der Quadrate einander gleich sind. (Siehe Aufgabe 16 in § 75.)

Antw.: $y = 0{,}565\,197\ldots$, $x = 0{,}204\,094\ldots$;
$y - x = x : y = x^2 + y^2 = 0{,}361\,10$.

8) Die Anzahl der Kubikcentimeter eines Würfels übertrifft die Anzahl der Quadratcentimeter der Oberfläche dieses Würfels um 100. Wie groß ist jede Seite dieses Würfels?

Antw.: 7,690 704 *cm*.

9) Die Anzahl der Centimeter aller Kanten, nebst der Anzahl der Quadratcentimeter der Oberfläche, nebst der Anzahl der Kubikcentimeter eines Würfels beträgt 100. Wie groß ist die Seite des Würfels? Antw.: 2,762 203 2 *cm*.

10) Der Inhalt eines rechtwinklig behauenen Steines beträgt 6409 *ccm*. Die erste Seite ist um 4 *cm*, die zweite um 16 *cm* länger, als die dritte. Wie lang ist jede Seite?

Antw.: Die erste 17 *cm*, die zweite 29 *cm*, die dritte 13 *cm*.

11) Die Höhe eines Parallelepipeds sei $4\frac{1}{4}$, die Breite $7\frac{1}{2}$, die Länge $8\frac{3}{4}$ *m*. Verlängert man die Höhe um ein bestimmtes Stück, die Breite um das doppelte Stück, und vermindert man die Länge um das dreifache Stück, so vermindert sich der Inhalt um $47\frac{13}{16}$ *cbm*. Um welches Stück ist die Höhe verlängert worden? Antw.: Um $1\frac{3}{4}$ *m*.

12) Die Kuben von vier aufeinander folgenden Zahlen geben zusammen den Kubus der um 9 vergrößerten kleinsten Zahl. Wie heißen die Zahlen?

Antw.: 11, 12, 13, 14; auch $-4 \pm \sqrt{-5}$, $-3 \pm \sqrt{-5}$,
$-2 \pm \sqrt{-5}$ und $-1 \pm \sqrt{-5}$.

13) Jemand kauft einen Silberbarren, welcher gerade soviel Kilogramm wiegt, als jedes Kilogramm Dekagramme reinen Silbers enthält. Er bezahlt für den Barren 8100 *M*, nämlich für jedes Dekagramm des darin enthaltenen reinen Silbers 40 *ℛ* mehr, als der Barren kosten würde, wenn er jedes Kilogramm seines Gewichtes mit 8 *ℛ* bezahlen wollte. Wieviel wiegt der Barren? Antw.: 45 *kg*.

14) In einer dreiseitigen vollständigen Pyramide befinden sich im ganzen 4495 Kugeln, wieviel an jeder Seite? Antw.: 29.

15) Der Kaiser Timur gab nach der Einnahme und Zerstörung Bagdads den grausamen Befehl, auf den Trümmern dieser Stadt eine vierseitige Pyramide von 90 000 Köpfen zu errichten. Wieviel Schichten enthielt die Pyramide?

Antw.: 64 Schichten, wobei noch 560 Köpfe übrig blieben.

16) In einem vierseitigen länglichen Kugelhaufen von 1183 Kugeln enthält die Basis 17 Kugeln in der Länge. Wieviel Kugeln enthält α) die Breite, β) der Rücken? Antw.: α) 13; β) 5.

17) In einem vierseitigen länglichen Kugelhaufen von 2856 Kugeln enthält der Rücken 11 Kugeln. Wieviel Kugeln enthält die Grundfläche? Antw.: 416.

18) Zwei vollständige dreiseitige Kugelpyramiden, von welchen die eine um 6 Schichten höher ist, als die andere, haben zusammen 3269 Kugeln. Wieviel Kugeln hat jede der Pyramiden einzeln?
Antw.: Die eine 2300, die andere 969.

19) Zwei Kugelpyramiden, eine drei- und eine vierseitige, haben an jeder Seite der Grundfläche gleichviel Kugeln; letztere enthält 816 Kugeln mehr, als erstere. Wieviel Kugeln enthält jede von ihnen?
Antw.: Die erste 969, die zweite 1785.

20) Ein Wasserbehälter erhält seinen Zufluß aus 4 Röhren und kann dadurch in 115$\frac{1}{5}$ Minuten gefüllt werden. Soll aber der Behälter durch jede einzelne Röhre gefüllt werden, so erfordert die zweite 4, die dritte 8 und die vierte 12 Stunden mehr, als die erste. In welcher Zeit wird er demnach durch die erste gefüllt?
Antw.: In 4 Stunden.

21) α) Ein Kapitalist verleiht sein Kapital von 28000 ℳ zu einem gewissen Prozente auf Zinsen, schlägt jedes Jahr die Zinsen zum Kapitale und nimmt am Ende eines jeden Jahres 4000 ℳ heraus. Wenn ihm nun am Ende des dritten Jahres 19803 ℳ 50 ₰ übrig bleiben, zu wieviel Prozent hat er sein Kapital ausgethan? Antw.: Zu 5 Prozent.

β) Zu wieviel Prozent war ein Kapital von 6000 Fl, wozu nach Verlauf eines jeden Jahres 500 Fl zugezahlt wurden, angelegt, wenn es nach zehn Jahren auf 16062,32 Fl angewachsen war?

Aufl.: Der Zinsfuß sei y; alsdann ist:

$$6000(1+0{,}01x)^{10}+\frac{50000}{x}[(1+0{,}01x)^{10}-1]=16062{,}32.$$

Bildet man die 10te Potenz des Binoms und vernachlässigt, um einen ersten Näherungswert von x zu erhalten, die dritten und höheren Potenzen von $0{,}01x$, so wird:
$6000(1+0{,}1x+0{,}045x^2)+50000(0{,}1+0{,}0045x+0{,}00012x^2)$ $=16062{,}32$; $x^2+25x=153{,}40$, hieraus $x=5{,}1$.

Man setze $x_1=5{,}1+z$, die obige Gleichung wird alsdann zu:

$$6000(1{,}051+0{,}01z)^{10}+\frac{50000}{5{,}1+z}[(1{,}051+0{,}01z)^{10}-1]=16062{,}32.$$

Führt man die Potenzen des Binoms aus und vernachlässigt die höheren Potenzen von z von der zweiten an, so wird:

$$6000(1{,}64447+0{,}156828z)+50000\,\frac{0{,}64447+0{,}156828z}{5{,}1+z}=16062{,}32.$$

Setzt man $\frac{0{,}64447+0{,}156828z}{5{,}1+z}=0{,}12636+0{,}00597z$,

so erhält man durch Auflösung der Gleichung: $z=-0{,}1$, also das korrigierte $x_1=5$.

22) Jemand hat 1000 ℳ über 1 Jahr, 500 ℳ über 3 Jahre und wieder 500 ℳ über 6 Jahre zu zahlen. Nach welcher Zeit kann er die ganze Summe von 2000 ℳ bezahlen, wenn für die Summe, die er zu spät bezahlt, die Zinsen für die Dauer zwischen der Verfallzeit und dem Tage der wirklichen Abtragung zu 5 Prozent p. a. vergütet, dagegen von jeder zu früh bezahlten Schuldsumme ein auf Hundert zu berechnender Rabatt von 5 Prozent p. a. abgezogen wird?

Antw.: In $2\frac{5}{8}$ (genauer 2,626 57) Jahren.

23) Auf welche Gleichung führt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn allgemein die vor dem gesuchten Termine*) fälligen Zahlungen mit $a, a', a'' \ldots$, die zugehörigen Verfallzeiten mit $t, t', t'' \ldots$, die nach demselben fälligen Zahlungen mit $b, b', b'' \ldots$, die Verfallzeiten mit $u, u', u'' \ldots$ bezeichnet werden und der Zinsfuß p ist?

Antw.: Setzt man $\frac{p}{100} = k$, so ist die verlangte Gleichung:

$$x + \frac{k}{Sa + Sb} \cdot S\frac{b(u-x)^2}{1 + k(u-x)} = \frac{S(at) + S(bu)}{Sa + Sb},$$

wo $Sa = a + a' + a'' \ldots$, $Sb = b + b' + b'' \ldots$ u. s. w. Der Grad der Gleichung ist um 1 höher, als die Anzahl der nach dem auszumittelnden Haupttermine fälligen Zahlungen. Da das Glied $\frac{k}{Sa + Sb} S\frac{b(u-x)^2}{1 + k(u-x)}$, wo k selten über $\frac{1}{10}$ steigt, im allgemeinen sehr klein ist, so ist näherungsweise $x = \frac{S(at) + S(bu)}{Sa + Sb}$, d. h. man erhält für x das nach der bekannten Durchschnittsregel sich ergebende Resultat. Mit Hülfe der Regel vom falschen Satze läßt sich aus diesem Näherungswerte von x der wahre Wert so genau finden, als man will. Der Unterschied zwischen dieser streng berechneten Terminzahl und zwischen der mit Hülfe der Durchschnittsregel gefundenen ist meist so gering, daß man in der Praxis füglich bei dieser letzteren stehen bleiben kann.

24) Welche Gleichung ist aufzulösen, um den Wert des unendlichen Kettenbruches $a + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \ldots$ zu bestimmen?

Antw.: $x^3 - 2ax^2 + a^2x - b = 0$.

25) Durch welche Gleichung erhält man den Wert der unendlichen Reihe $\sqrt[3]{(a + \sqrt[3]{[a + \sqrt[3]{(a + \cdots)}]})}$?

Antw.: $x^3 - x = a$.

*) Die Durchschnittsregel, welche in den Rechenbüchern gewöhnlich angenommen wird, giebt vorläufig die Zeit an, wann die Gesamtzahlung zu leisten ist. (S. § 63, Beispiel 179.)

26) Wie heißt die Basis des Zahlensystems, in welchem die Zahl 81 479 durch 456356 geschrieben wird? Antw.: 7.

27) Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression sei gleich 31, das Anfangsglied = 1, die Anzahl der Glieder 5. Wie groß ist der Exponent?

Antw.: α) 2, die Progression ist: 1, 2, 4, 8, 16; β) — 2,55677, die Progression ist: 1, — 2,556 77, + 6,537 07, — 16,7138, + 42,733 34; γ) und δ) $-0{,}221\,615 \pm 2{,}411\,98\sqrt{-1}$.

28) α) Drei Armee-Korps, A, B und C, werden ins Feld geschickt und sind auf 36 Wochen mit Lebensmitteln versehen. Mit diesem Proviant würde das Korps A 24 Wochen länger, als B, B aber 40 Wochen länger, als C, auskommen. Wenn nun das Korps A aus 5 Regimentern besteht, aus wievielen bestehen die Korps B und C? Wie lange würde der Proviant für das erste Korps reichen?

Antw.: B besteht aus 6, C aus 9 Regimentern. Der Vorrat würde für A auf 144 Wochen reichen.

β) Es werden drei Armee-Korps, A, B und C, ins Feld gestellt und auf 30 Wochen mit Proviant versorgt. Mit diesem Proviant würden B und C 9 Wochen länger auskommen, als A und B; und A und C 15 Wochen länger, als B und C. Nach 6 Wochen kommen die drei Korps mit der feindlichen Armee ins Gefecht, wobei A den 8ten, B den 6ten, C den 4ten Teil seiner Krieger verliert, auch $\frac{3}{8}$ des noch übrigen Proviants verloren gehen. Wieviel Wochen wird der Rest der drei Korps mit dem Reste des Proviants auskommen?

Antw.: Kommt A mit dem Proviant x, B mit demselben y, C z Wochen aus, so erhält man für z folgende Endgleichung: $z^3 - \frac{3720}{19}z^2 + \frac{64800}{19}z - \frac{182800}{19} = 0$ und hieraus $z = 180$, $x = 90$, $y = 60$. Der Rest der drei Korps wird demnach noch 18 Wochen mit dem Reste des Proviants auskommen.

29) Bedeutet b eine kleine Zahl, so ist näherungsweise

$$\sqrt[5]{a^5 + b} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + (b : 5a)} - \tfrac{1}{4}a^2}.$$ Warum? (Vergl. § 71, Nr. 92.)

Aufl.: Man setze $\sqrt[5]{a^5 + b} = a + e$; alsdann ist $a^5 + b = a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5$. Vernachlässigt man e^5, so erhält man: $\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + (b : 5a)} = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4} = \frac{1}{2}a^2 + ae + e^2$ und hieraus die obige Formel.

30) Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, so beschaffen, daß die eine sowohl dem Quadrate, als der Quadratwurzel der anderen Zahl gleich ist.

Aufl.: x_1 und $y_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, $y_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$, $x_3 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$, $y_3 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$.

31) Welche Zahlenwerte hat man für x und y in dem Produkte

$(a^3 + xa^2b + yab^2 + b^3)\,(a^3 - xa^2b + yab^2 - b^3)$ einzusetzen, damit das Resultat der Multiplikation $a^6 - b^6$ werde?

A.: x_1 u. $y_1 = 0$; x_2 u. $y_2 = 2$; $x_3 = -(1 + \sqrt{-3})$, $y_3 = -(1 - \sqrt{-3})$; $x_4 = -(1 - \sqrt{-3})$, $y_4 = -(1 + \sqrt{-3})$.

E. Transcendente Gleichungen*).

§ 106.

1) α) $x^x = 100$.

Aufl.: Die Gleichung giebt für x nur einen reellen Wurzelwert $x = 3{,}597\,285\,023\,55$ (letzte Stelle sicher).

β) $x^x = 0{,}776$.

Aufl.: Diese Gleichung giebt für x zwei reelle Wurzelwerte: $x_1 = 0{,}119\,262\,2$ und $x_2 = 0{,}693\,848\,7 \ldots$.

2) $\sqrt[x]{x} = \sqrt[3]{3}$.

Aufl.: $x_1 = 3$, $x_2 = 2{,}478\,055\,2 \ldots$

3) $x = 10 \log x$.

Aufl.: $x_1 = 10$, $x_2 = 1{,}371\,288\,3$.

4) $x^x = 100x$.

Aufl.: $x_1 = 4{,}205\,869\,6 \ldots$, $x_2 = 0{,}009\,565 \ldots$.

5) $\sqrt[x]{x} = \frac{1}{100}\,x$.

Aufl.: $x_1 = 104{,}547\,75 \ldots$, $x_2 = 0{,}237\,762\,75 \ldots$.

6) α) $2^x + 3^x = 4$; β) $5^x + 6^x = 7x^2$.

Aufl.: α) $x = 0{,}760\,491\,5 \ldots$; β) $x = -0{,}385\,311\,5 \ldots$.

7) $2^x + 3^x = 4^x$ **).

Aufl.: $x = 1{,}507\,126\,5$.

8) $x^{(x^x)} = 2$.

Aufl.: $x = 1{,}476\,684\,86$.

9) $x + \log x = x \cdot \log x$.

Aufl.: $x_1 = 12{,}267\,305 \ldots$, $x_2 = 0{,}326\,877\,9 \ldots$.

10) $x - \log x = x : \log x$.

Aufl.: $x = 12{,}482\,043\,9 \ldots$.

11) $2^x + 3^y = 4$, $5^x + 6^y = 7$.

Aufl.: $x = 0{,}565\,557\,75 \ldots$, $y = 0{,}841\,311\,35 \ldots$; $x_2 = 0$, $y_2 = 1$.

*) Die Auflösungen geschehen durch Anwendung der sog. regula falsi. Man vergleiche auch über die Auflösung der transcendenten Gleichungen die Abhandlung von Stern in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. 22. Band.

**) Gleichungen von der Form $a^x + b^x = c^x$ lassen sich mit Hülfe einer Tabelle für die Quotienten $\log \sin \lambda : \log \cos \lambda$ leicht lösen. Man setze in der umgeformten Gleichung $(a : c)^x + (b : c)^x = 1$ $\sin \lambda^2 = (a : c)^x$, wodurch $\cos \lambda^2 = (b : c)^x$ wird. Hieraus $\log \sin \lambda : \log \cos \lambda = (\log a - \log c) : (\log b - \log c)$. Mit Hülfe der Tabelle bestimme man λ und hieraus x.

12) $y^x = 2, \quad x^y = 3$.
Aufl.: $x = 2{,}239\,251\,13$, $y = 1{,}362\,803\,65$.

13) $\cos x = x$ *).
Aufl.: $x = 42^0 20' 47'',27$, $arc.\ x = 0{,}739\,085\,12$.

14) $\tang x = x$ **).
Aufl.: $x_1 = 0$, $x_2 = 257^0 27' 12'',268$, $arc.\ x_2 = 4{,}493\,409\,458$, $x_3 = 442^0 37' 28''$, $x_4 = 624^0 45' 38''$, $x_5 = 805^0 56' 1''$ u. s. w.

15) $\cot x = x$.
Aufl.: $x = 49^0 17' 36'',5$, $arc.\ x = 0{,}860\,333\,68$.

16) $(4 - 3x^2) \sin x = 4x \cos x$ ***).
Aufl. $x_1 = 2{,}563\,434\,23$, $x_2 = 6{,}058\,670\,1$.

17) $(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0$ †); $e = 2{,}718\,281\,828$.
Aufl.: $x = 4{,}730\,040\,99$.

18) $(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0$ †).
Aufl.: $x = 1{,}875\,104\,02$.

19) Einen Kreisausschnitt zu finden, der durch die zum Bogen gehörige Sehne in zwei gleiche Teile geteilt wird.
Aufl.: Der Mittelpunktswinkel ist $108^0 36' 13'',757$, die Sehne $1{,}624\,205\,8$ (Radius $= 1$).

20) Einen Kreis von einem Punkte der Peripherie aus α) durch zwei Sehnen in drei, β) durch drei Sehnen in vier gleiche Teile zu teilen.
Aufl.: α) Jede der Sehnen $1{,}928\,534\,0$, die zugehörigen Mittelpunktswinkel $149^0 16' 27'',6$; β) die äußeren Sehnen $1{,}829\,542\,2$, die zugehörigen Mittelpunktswinkel $132^0 20' 47'',23$.

21) Wie groß ist ein Bogen, der doppelt so groß ist, als die zugehörige Sehne?
Antw.: $arc.\ 217^0 12' 27'',4 = 3{,}790\,988$.

22) Auf dem Bogen eines Halbkreises AXB, dessen Durchmesser gleich AB ist, einen Punkt X zu finden, so daß die von demselben auf AB gefällte Senkrechte XY nebst dem Stücke AY des Durchmessers dem Bogen AX gleich werde.
Aufl.: Bogen $AX = 138^0 11' 53'',0$, $XY = 0{,}666\,557\,8$, $AX = 1{,}745\,453\,5$.

23) Im Endpunkte des einen Radius eines Kreissektors sei eine Senkrechte auf dem Radius errichtet, welche den verlängerten anderen Radius schneidet. Wie groß ist der Winkel des Kreissektors zu

---

*) Drückt man die Winkel durch Bogen mit dem Radius 1 aus, so lassen sich Winkel durch unbenannte Zahlen und umgekehrt ausdrücken. Es ist also $360^0 = 2\pi = 6{,}283\,185\,31$, $1^0 = 0{,}017\,453\,29$, $1' = 0{,}000\,290\,888$, $1'' = 0{,}000\,004\,848\,1$, ferner $1 = 57^0 17' 44'',8 = 206264'',8$.

**) Diese Gleichung kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Körper und in der Theorie der Wärme vor.

***) Diese Gleichung kommt in der Theorie einer elastischen Kugel vor.

†) Diese Gleichung kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor. Tafeln zur Berechnung von e^x finden sich in der vortrefflichen Abhandlung von Gudermann, über die Theorie der Potenzial-Funktionen. (Crelle's Journal. Band 6 und 7.)

nehmen, damit das gebildete rechtwinklige Dreieck durch den Kreisbogen halbiert wird?

Antw.: $66^0 46' 54'',2$.

24) Aus der Gleichung $M = E - e \sin E$*) den Wert von E zu berechnen, wenn $M = 332^\circ 28' 54'',77$, $e = 14^0 3' 20''$.

Aufl.: $E = 324^0 16' 29'',55$.

25) Über einer gegebenen geraden Linie $AB = 10$ als Durchmesser sei ein Halbkreis beschrieben. Es soll von einem Punkte D auf dem Durchmesser, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $C = 4$, nach einem Punkte E des Halbkreises eine gerade Linie gezogen werden, welche den Halbkreis halbiert. Wie groß ist der kleinere Bogen des Halbkreises?

Antw.: $53^0 15' 57'',6$.

26) Ein Kreissegment zu suchen, so daß der Kreis, der die Höhe desselben als Durchmesser hat, gleich α) einem Drittel, β) einem Fünftel des Segmentes werde.

Aufl.: Der zum Segmente gehörige halbe Mittelpunktswinkel beträgt α) $62^0 23' 0'',4$, β) $38^0 20' 6''$.

Achter Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf Aufgaben aus der Geometrie, Physik, Astronomie und Chemie.

(Die den Aufgaben beigefügten Nummern I., II., III. ... geben den Grad der Gleichung an, auf welche die Lösung derselben führt.)

§ 107.

A. Aufgaben aus der Geometrie.

1) Die Summe der Winkel eines Vieleckes betrage n Rechte. Wieviel Seiten hat das Vieleck? (I.)

Antw.: $\frac{1}{2}n + 2$.

2) Ein Winkel eines regulären Vieleckes betrage a Rechte. Wieviel Seiten hat das Vieleck? (I.)

Antw.: $4 : (2 - a)$.

3) Welches Vieleck hat α) 65, β) n Diagonalen? (II.)

Antw.: α) Das Dreizehneck; β) das $(1\frac{1}{2} + \sqrt{2n + 2\frac{1}{4}})$eck.

---

*) Aufgabe, die dazu dient, um aus der Excentrizität e und der mittleren Anomalie M eines Planeten zunächst die excentrische und hieraus die wahre Anomalie zu finden. — Keppler'sches Problem. Siehe Gauss, Theoria mot. corp. coel. 12.

4) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes sei $= p$. Wie groß ist jede Seite? (II.)

Antw.: $\frac{2}{3}\sqrt{3p\sqrt{3}} = 1{,}51967\sqrt{p}$.

5) Eine von den beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Inhalt $= p$, habe die Länge c. Wie groß ist die Grundlinie? (II.)

Antw.: $\sqrt{[2(c^2 \pm \sqrt{(c^2+2p)(c^2-2p)})]}$.
Beispiel: Für $p = 100$, $c = 20$ ist $x_1 = 38{,}637$, $x_2 = 10{,}356$.

6) Zwei Seiten eines Dreieckes seien a und b, der Inhalt p. Wie groß ist die dritte Seite? (II.)

Antw.: $\sqrt{[a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab+2p)(ab-2p)}]}$.

7) Die drei Höhen eines Dreieckes seien h_1, h_2 und h_3. Wie groß sind die Seiten x, y und z, auf welchen dieselben senkrecht stehen? (II.)

Aufl.: Setzt man $(h_1 h_2 h_3)^2 : \sqrt{[(h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)(h_1h_2 + h_2h_3 - h_3h_1)(h_1h_2 - h_2h_3 + h_3h_1)(-h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)]} = p$, so ist $x = 2p : h_1$, $y = 2p : h_2$, $z = 2p : h_3$, und p drückt zugleich den Inhalt des Dreieckes aus. Beispiel: $h_1 = 3$, $h_2 = 5$, $h_3 = 7$, $p = 37{,}9453$; $x = 25{,}2969$, $y = 15{,}1781$, $z = 10{,}8415$.

8) Die drei von den Spitzen eines Dreieckes nach den Mitten der Seiten x, y, z gezogenen Linien seien a, b, c. Wie groß ist x? (II.)

Antw.: $\frac{2}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

9) α) Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sei s, die Höhe auf der Hypotenuse sei h. Wie groß sind die Seiten des Dreieckes? (II.)

Aufl.: Die Hypotenuse ist $\sqrt{s^2 + h^2} - h$, die Katheten sind:
$\frac{1}{2}\{s \pm \sqrt{[s^2 - 4h(\sqrt{s^2+h^2} - h)]}\}$.

β) Warum ist ein Dreieck, dessen drei Seiten durch $2a$, $a^2 + 1$ und $a^2 - 1$ ausgedrückt werden, ein rechtwinkliges?

γ) Algebraisch zu berechnen, daß der Flächen-Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes gleich ist seinem halben Umfange, multipliziert mit dem um die Hypotenuse verminderten halben Umfange.

10) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes sei p, die Hypotenuse h. Wie groß sind die beiden Katheten? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}\{\sqrt{h^2 + 4p} \pm \sqrt{h^2 - 4p}\}$.

11) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes sei p, der Umfang u; die Seiten desselben zu finden. (II.)

Aufl.: Die Hypotenuse ist $(u^2 - 4p) : (2u)$, die Katheten sind:
$\{4p + u^2 \pm \sqrt{(4p + u^2)^2 - 32pu^2}\} : (4u)$.

12) Der Inhalt eines Dreieckes sei gleich p, der Umfang u, eine Höhe h. Wie groß sind die drei Seiten? (II.)

Antw.: $\frac{2p}{h}$ und $\frac{u}{2} - \frac{p}{h}\left[1 \mp \sqrt{\frac{(u+2h)(u-2h)h - 4pu}{u(uh-4p)}}\right]$.

13) α) Eine Seite eines Dreieckes sei a, die Höhen auf den anderen x und y seien h_1 und h_2. Wie groß ist x? (II.)

Antw.: $\frac{h_1\sqrt{(a+h_2)(a-h_2)} \mp h_2\sqrt{(a+h_1)(a-h_1)}}{(h_1+h_2)(h_1-h_2)}\,h_2$.

β) Eine Seite des Dreieckes sei gleich a, die Höhe darauf h, die Summe der beiden anderen Seiten s. Wie groß sind die einzelnen Seiten? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}\{s \pm a\sqrt{[(s+a)(s-a)-4h^2] : [(s+a)(s-a)]}\}$.

14) Ein Dreieck ABC zu finden, so daß die Dreieckseiten AB, AC, BC und das von C auf AB gefällte Perpendikel CD eine geometrische Progression bilden.

Antw.: $AB : AC : BC : CD = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)} : 1 : \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} : \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$
oder $= 1 : \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} : \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) : \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$.

15) Die drei Seiten eines Dreieckes seien a, b und c. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches mit der Grundlinie auf der Seite a liegt und mit den beiden gegenüberliegenden Spitzen an die Seiten b und c stößt? (I.)

Aufl.: Heißt die zu a gehörige Höhe h, so ist $x = ah : (h+a)$, und h ist $= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} : (2a)$.

16) α) Wenn durch irgend einen innerhalb eines Kreises von dem Radius r gegebenen Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $= d$ ist, eine Sehne von gegebener Größe s gelegt wird, wie groß sind die einzelnen Stücke dieser Sehne? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - (r^2 - d^2)}$ und $\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - (r^2 - d^2)}$.

β) Wie heißen die vom gegebenen Punkte an bis zur Peripherie des Kreises gerechneten Stücke, wenn der Punkt, durch welchen die verlängerte Sehne geht, außerhalb des Kreises liegt? (II.)

Antw.: $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 + d^2 - r^2} + \frac{1}{2}s$ und $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 + d^2 - r^2} - \frac{1}{2}s$.

17) Bei dem englischen Briefpapiere steht die Länge zur Breite in einem solchen Verhältnisse, daß die Hälfte eines Bogens ein Rechteck giebt, welches dem ganzen Rechtecke ähnlich ist. Welches Verhältnis hat die Länge zur Breite? (II.) Antw.: $\sqrt{2} : 1$.

18) α) Drei aneinander stoßende, in einen Halbkreis eingeschriebene Sehnen haben die Größen a, b und c. Durch welche Gleichung erhält man den Durchmesser des Kreises?*) (III.)

*) Zur Auflösung kann der bekannte ptolemäische Lehrsatz, daß in jedem Kreis-Vierecke die Summe der Rechtecke aus den gegenüberstehenden Seiten gleich ist dem Rechtecke aus den beiden Diagonalen, dienen. (Siehe „Lehrbuch der Geometrie von Heis und Eschweiler." I. T. V. 86.)

Aufl.: $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$. Für $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ ist $x = 6{,}0746736$.

β) Ein Kreis mit dem Radius r berühre die Schenkel eines Winkels 2α; ein zweiter kleinerer Kreis berühre jenen ersteren Kreis und die beiden Schenkel des Winkels; ein dritter Kreis wiederum jenen zweiten Kreis und die beiden Schenkel und so fort ins Unendliche. Wie groß ist die Summe sämtlicher Kreise?

Antw.: $\frac{1}{4}(1 + \sin\alpha)^2 r^2 \pi : \sin\alpha$.

19) α) Durch die Ecke A eines Quadrats $ABCD$, dessen Seite $= a$, soll eine gerade Linie gelegt werden, so daß dasjenige Stück derselben, welches zwischen den dieser Ecke gegenüberstehenden beiden Seiten des Quadrates BC und CD oder deren Verlängerungen enthalten ist, einer gegebenen Linie b gleich sei. (IV.)

Aufl.: Bezeichnet man das auf der gegenüberstehenden Seite des Quadrates liegende Stück, welches zwischen der anliegenden Ecke und der gesuchten Linie liegt, mit x, so führt die Aufgabe auf die Endgleichung

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0,$$

oder, wenn man $x = az$ setzt, auf die reziproke Gleichung:

$$z^4 - 2z^3 + [(2a^2 - b^2) : a^2]\, z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Setzt man $z + \frac{1}{z} = y$, so erhält man aus der Gleichung:

$y^2 - 2y - b^2 : a^2 = 0$ den Wert von y und hieraus den Wert für z.

Für $a = 1$, $b = 10$ erhält man für x folgende vier Werte: $0{,}0912523$, $10{,}9586233$, $-8{,}9379937$, $-0{,}1118819$. Bezeichnet man die Linie zwischen der gegebenen Ecke und der Mitte der gesuchten Linie b mit y, so erhält man die Gleichung:

$$y^4 - (2a^2 + \tfrac{1}{2}b^2)y^2 = \tfrac{1}{4}a^2b^2 - \tfrac{1}{16}b^4;\ \text{hieraus}$$

$$y = \pm\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 \pm a\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ist statt eines Quadrates ein Rechteck $ABCD$ mit den Seiten a und c gegeben, so liefert die Gleichung des vierten Grades: $x^4 - 2ax^3 + (a^2 - b^2 + c^2)x^2 - 2ac^2x + a^2c^2 = 0$ die Werte für x.

β) Ein Winkel eines Dreieckes ist gegeben. Das Verhältnis $1 : x$ der zwei den Winkel einschließenden Seiten zu finden, so daß die Summe der Kuben dieser Seiten dem Kubus der dem Winkel gegenüberstehenden Seite gleich ist.

Aufl.: Heißt c der Cosinus des gegebenen Winkels, so erhält man für x die reziproke Gleichung:

$$x^4 - \frac{4c^2 + 1}{2c}x^3 + \frac{4c^3 + 6c + 1}{3c}x^2 - \frac{4c^2 + 1}{2c}x + 1 = 0.$$

20) Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds sei 819, die Oberfläche 542. Wie groß sind Länge, Breite und Höhe, wenn dieselben zusammen 29 betragen? (III.) Antw.: 9, 7 und 13.

21) Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds sei p, die Oberfläche b, eine der Diagonalen c. Durch welche Gleichung lassen sich Länge, Breite und Höhe berechnen? (III.)

Aufl.: $x^3 - x^2\sqrt{c^2 + b} + \frac{1}{2}bx - p = 0$.

Beispiel: $p = 144$, $b = 192$, $c = 13$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 12$.

22) Der Inhalt eines geraden Cylinders, dessen Höhe um $2\frac{1}{2}$ *cm* länger ist, als der Durchmesser der Grundfläche, beträgt 240,331 83 *ccm*. Wie groß ist die Höhe? (III.)

Antw.: $8\frac{1}{2}$ *cm*.

23) Der Inhalt eines geraden Cylinders sei 120 *cbm*, die Oberfläche 200 *qm*. Wie groß ist der Radius der Grundfläche, wie groß die Höhe? (III.)

Antw.: Entweder ist der Radius 4,903 1 *m* und die Höhe 1,5899 *m*, oder der Radius ist 1,263 35 *m* und die Höhe 23,932 27 *m*.

24) Der Inhalt eines geraden Kegels sei a, die Oberfläche b. Wie groß ist die Höhe des Kegels, wie groß der Radius der Grundfläche desselben? (III.)

Antw.: Die Höhe ist $\frac{b^2}{6\pi a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{6\pi a}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}$, der Radius der Grundfläche ist: $\sqrt{\left\{\frac{3a}{2b}\left[\frac{b^2}{6\pi a} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{6\pi a}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}\right]\right\}}$.

25) Der Inhalt eines geraden Kegels sei $7\frac{1}{2}$ *cbm*, die Manteloberfläche 25 *qm*. Wie groß ist α) der Radius der Grundfläche; β) die Höhe? (III.)

Antw.: α) 0,904 *m*, oder 2,741 *m*; β) 8,748 *m*, oder 0,957 *m*.

26) α) Eine Kugel, deren Radius = 1, soll von einem gegebenen Punkte aus durch zwei Ebenen in drei gleiche Teile geteilt werden. Wie groß sind die Radien der die äußeren Kugelabschnitte begrenzenden Kreisebenen? (III.) Antw.: 0,974 109.

β) Archimedisches Problem: Eine Halbkugel, deren Radius = 1 ist, soll durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene in zwei gleiche Teile geteilt werden. In welcher Entfernung von der Grundfläche ist der Schnitt zu führen? (III.) Antw.: $2 \sin 10^0 = 0{,}347\,296\,4$ (Seite des eingeschriebenen regulären Achtzehnecks).

27) Wie groß ist der Centriwinkel eines Kugelsegments, wenn die Gesamtoberfläche desselben gleich einem größten Kreise der Kugel ist? (II.) Antw.: $85^0 52' 58'',2$.

28) α) Von welchem Winkel ist die Cotangente so groß, als das Doppelte seines Sinus? β) Die Gleichung $\tang x = \cos x$ aufzulösen. Für welchen Winkel ist γ) die Tangente gleich der Summe des Sinus und des Cosinus; δ) die Summe des Sinus, des Cosinus und der Tangente = 2? (IV.)

Aufl.: α) Für $\sin x$ erhält man $\pm \sqrt{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}}$, für $\cos x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$. Hiernach ist $\cos x = 0{,}780\,776\,4$; $x = n \cdot 360^0 \pm 38^0 40' 5'',8$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet; β) $\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618\,034\,0$; $x = 90^0 (4n + 1) \pm 51^0 49' 38'',3$; γ) für $54^0 22' 18'',7$ und für $154^0 36' 56''$; δ) für $31^0 54' 17'',5$ und für $252^0 53' 47'',9$.

29) Wem ist α) $(\cos x + \sin x \sqrt{-1})(\cos x - \sin x \sqrt{-1})$, β) $(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})(\cos y \pm \sin y \sqrt{-1})$, γ) $(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})(\cos y \pm \sin y \sqrt{-1})(\cos z \pm \sin z \sqrt{-1})$, δ) $(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})^n$ gleich?

Antw.: α) 1; β) $\cos(x+y) \pm \sin(x+y)\sqrt{-1}$;
γ) $\cos(x+y+z) \pm \sin(x+y+z)\sqrt{-1}$;
δ) $\cos nx \pm \sin nx \sqrt{-1}$.

30) α) Die drei Seiten eines Dreieckes seien a, b und c; es sollen für dieselben solche Zahlen gewählt werden, daß der Inhalt J des Dreieckes eine Rationalzahl werde.

Aufl.: $J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,*) wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, sei rational. Setzt man $s - a = m$, $s - b = n$, $s - c = r$, so wird $J = \sqrt{mnr(m+n+r)}$, $a = n + r$, $b = m + r$, $c = m + n$. J wird rational, wenn $m + n + r = q^2 \cdot mnr$, also $r = \frac{m+n}{mnq^2 - 1}$. Es wird also für $a = m\frac{n^2q^2+1}{mnq^2-1}$, $b = n\frac{m^2q^2+1}{mnq^2-1}$, $c = m + n$ der Inhalt rational, nämlich: $mnq\frac{m+n}{mnq^2-1}$; z. B. für $m = 6$, $n = 8$, $q = \frac{1}{4}$ wird $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, $J = 84$. Einfacher, aber weniger allgemein sind die Werte $m(n^2+1)$, $n(m^2+1)$ und $(m+n)(mn-1)$ für a, b und c, wodurch man den Inhalt $= mn(m+n)(mn-1)$ erhält; z. B. $m = 5$, $n = 2$ giebt die Seiten 25, 52, 63 und den Inhalt 630.

Sind die drei Seiten eines Dreieckes und der Inhalt rational, so sind 1) die drei Höhen des Dreieckes, 2) die Abschnitte, welche auf den Seiten durch die Höhen gebildet werden, 3) die Abschnitte der Höhen, welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Höhen gebildet werden, Rationalzahlen. Warum?

β) Rationale rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Inhalt und Umfang, in Zahlen ausgedrückt, gleich groß sind.

Aufl.: Die beiden Katheten und die Hypotenuse sind:
$4(n^2+1) : n^2$, $2(n^2+2)$ und $2[(n^2+1)^2+1] : n^2$. Z. B.: 8, 6 und 10; 5, 12 und 13 u. s. w.

31) Der Inhalt eines Kreisviereckes, dessen Seiten a, b, c und d sind, wird, wenn $\frac{1}{2}(a+b+c+d) = s$ gesetzt wird, durch die Formel $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ausgedrückt**). Man soll für a, b, c und d solche Rationalzahlen suchen, daß der Inhalt eine Rationalzahl wird.

Aufl.: Sind m, n, o und q beliebige Rationalzahlen, und setzt man $\frac{1}{2}(m+n+o+mnoq^2) = u$, so sind die verlangten Seiten durch $u - m$, $u - n$, $u - o$ und $u - mnoq^2$ ausgedrückt, wenn diese vier Zahlen positive Zahlen sind. Der Inhalt ist $= mnoq$.

---

*) Heis, Ebene und sphärische Trigonometrie, III. 15.
**) Heis, Ebene und sphärische Trigonometrie, IV. 8.

Beispiel: a) 1, 1, 1, 1, Inhalt 1; b) 1, 1, 2, 2, Inhalt 2; c) 1, 1, 3, 3, Inhalt 3 u. s. w.; d) 1, 5, 5, 7, Inhalt 16; e) 11, 5, 5, 5, Inhalt 32; f) 8, 6, 3, 1, Inhalt 12; g) 11, 9, 1, 3, Inhalt 48; h) 19, 15, 7, 5, Inhalt 96; i) 11, 8, 4, 3, Inhalt 30; k) 9, 7, 6, 2, Inhalt 30 u. s. w.

32) Einen Winkel zu suchen, von welchem sowohl der Sinus als der Cosinus eine Rationalzahl ist.

Aufl.: Sind a und b beliebige Rationalzahlen, so sind die Winkel, deren Sinus und Cosinus $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ und $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$, oder umgekehrt, sind, die verlangten.

33) α) Zwei Seiten eines Dreieckes seien a und b. Wie groß ist die dritte Seite c zu nehmen, wenn der dieser Seite gegenüberstehende halbe Winkel ($\frac{1}{2}\gamma$) 1) zum Sinus, 2) zum Cosinus eine Rationalzahl haben soll?

Aufl.: 1) $c = (a - b)\frac{ab + n^2}{ab - n^2}$, wo n eine Rationalzahl bedeutet; $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{(a-b)n}{ab - n^2}$. Determination: $n(a - b + n) < ab$. — Beispiel: $a = 5$, $b = 4$, $n = 3$, $c = 2\frac{7}{11}$, $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{3}{11}$. 2) $c = (a + b)\frac{ab - n^2}{ab + n^2}$, $\cos\frac{1}{2}\gamma = (a + b)\frac{n}{ab + n^2}$. Determination: $n(a + b - n) < ab$. — Beispiel: $a = 2$, $b = 3$, $n = 1\frac{1}{2}$, $c = 2\frac{3}{11}$, $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{10}{11}$.

β) Giebt es außer dem gleichseitigen Dreiecke noch andere Dreiecke mit einem Winkel von $\frac{2}{3}R$, deren Seiten rational sind?

Antw.: Heißen die beiden anliegenden Seiten x und y, die gegenüberstehende Seite z, so ist $x = 2n - 1$, $y = n^2 - 1$, $z = n^2 - n + 1$; z. B. $x = 5$, $y = 8$, $z = 7$.

34) Drei Zahlen anzugeben, so daß ihre Summe gleich ihrem Produkte wird.

Aufl.: Nimmt man die Winkel A, B und C eines beliebigen Dreieckes, so ist $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$; eine andere Lösung ist $x = \frac{p+1}{m}$, $y = \frac{m^2 + p + 1}{mp}$, $z = m$.

35) Die Seiten eines ebenen Dreieckes seien den Wurzeln der Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ proportional. Man soll die Summe der Cosinus der Winkel dieses Dreieckes finden.

Aufl.: $\frac{1}{2}(4ab - 6c - a^3) : c$.

36) Wenn eine gerade Linie stetig geteilt ist, so wird das Verhältnis des kleineren Segments zum größeren durch den ins Unendliche fortlaufenden Kettenbruch

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$ ausgedrückt. Warum?

37) Die Gleichung $\sin 2\varphi + 2m = 2 \operatorname{tang} \varphi$ aufzulösen.

Aufl.: Die Gleichung führt auf $\sin \varphi^6 + m^2 \sin \varphi^2 - m^2 = 0$. Ist z. B. $m = \frac{1}{12}\sqrt{3}$, so ist $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^0 = \frac{1}{6}\pi$.

38) In dem bei C rechtwinkligen Dreiecke ABC ist aus der Spitze C des rechten Winkels das Perpendikel CD auf AB gefällt, und es ist darin gegeben: $AD + DC = a$, $DB + BC = b$. Man soll die Höhe $CD = x$ des Dreieckes bestimmen.

Aufl.: $x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0$.

39) Es seien gegeben die Summe $2p$ der drei Seiten eines Dreieckes und die Radien des umbeschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, r und ϱ; die Seiten des Dreieckes zu finden.

Aufl.: $x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4r\varrho + \varrho^2)x - 4r\varrho p = 0$.
Beispiel: $p = 21$, $r = 8\frac{1}{8}$, $\varrho = 4$;
$x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0$;
$x_1 = 13$, $x_2 = 14$, $x_3 = 15$.

40) Die Seite x eines einem Kreise vom Radius 1 eingeschriebenen regulären Siebeneckes zu berechnen. (III.)

Aufl.: Es sei $\frac{1}{7} \cdot 180 = z$; alsdann ist $x = 2 \sin z$ und $\sin 7z = 0$ $\sin 7z = 7 \sin z - 56 \sin z^3 + 112 \sin z^5 - 64 \sin z^7$.*) Setzt man $\sin z = \frac{1}{2}x$, so wird $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = (x^3 - \sqrt{7}x^2 + \sqrt{7})(x^3 + \sqrt{7}x^2 - \sqrt{7}) = 0$. Hieraus erhält man: $x_1 = 0{,}867\,767\,6\ldots$, $x_2 = 1{,}563\,663\,0\ldots$, $x_3 = 1{,}949\,835\,8\ldots$; x_1 ist die zu $\frac{1}{7}$, x_2 die zu $\frac{2}{7}$, x_3 die zu $\frac{3}{7}$ der Kreisperipherie gehörige Sehne.

41) Die Seite x eines einem Kreise vom Radius 1 eingeschriebenen Neuneckes zu berechnen. (III.)

Aufl.: Man findet*) $x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 9 = (x^2 - 3)(x^3 - 3x + \sqrt{3})(x^3 - 3x - \sqrt{3}) = 0$. Daraus erhält man $x_1 = 0{,}684\,040\,2$, $x_2 = 1{,}285\,575\,2$, $x_3 = 1{,}732\,050\,8$, $x_4 = 1{,}969\,615\,4$. Welche Bedeutung haben dieselben? Wie hängen diese und die vorangehende Aufgabe mit der Kugelteilung zusammen? Vergleiche 26) β).

§ 108.

B. Aufgaben aus der Physik und Astronomie.

1) Die Volumina zweier Körper seien v und V, die spezifischen Gewichte s und S. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Mischung beider Körper, vorausgesetzt, daß keine Verdichtung stattfindet? (I.)

Antw.: $(VS + vs) : (V + v)$.

2) Die atmosphärische Luft ist ein Gemenge aus 21 Volumteilen Sauerstoffgas und 79 Volumteilen Stickstoffgas. Wenn nun

---

*) Heis, Ebene und sphärische Trigonometrie VIII. 98.

das spezifische Gewicht des Sauerstoffgases gleich 1,1026 ist, wie läßt sich hieraus das spezifische Gewicht des Stickstoffs berechnen? (I.)

Antw.: 0,9727.

3) Von einer Verbindung zweier Körper, deren spezifische Gewichte S und s und deren absolute Gewichte P und p sind, das spezifische Gewicht zu bestimmen. (I.)

Aufl.: $(P+p)\,Ss : (Ps + pS)$.

4) Welches spezifische Gewicht haben die Einmarkstücke, welche dem Gewichte nach aus 9 Teilen Silber und einem Teile Kupfer bestehen? Das spezifische Gewicht des Silbers ist 10,474, das des Kupfers gleich 8,758. (I.) Antw.: 10,273.

5) Das spezifische Gewicht der Verbindung zweier Körper sei e, das absolute Gewicht m, das spezifische Gewicht des einen Körpers sei s, das absolute Gewicht p; wie groß ist das spezifische Gewicht des anderen Körpers? (I.) Antw.: $se(m-p) : [ms - ep]$.

6) Zwei Körper haben die spezifischen Gewichte S und s, das Gemisch habe das spezifische Gewicht e. In welchem Gewichtsverhältnisse sind die Körper miteinander verbunden? (I.)

Antw.: In dem Verhältnisse $S(s-e) : s(e-S)$.

7) Nach Vitruv war die Krone des Königs Hiero 20 Pfund schwer, bestand aus Gold und Silber und hatte das spezifische Gewicht 16. Wieviel Gold und wieviel Silber enthielt dieselbe, wenn das spezifische Gewicht des Goldes gleich 19,25, das des Silbers gleich 10,47 ist? (I.)

Antw.: $15\frac{2185}{14045}$ (nahe $15\frac{1}{7}$) Pfund Gold und $4\frac{11860}{14045}$ (nahe $4\frac{6}{7}$) Pfund Silber.

8) Auf eine unbiegsame gerade Linie, af, wirken sechs parallele Kräfte, welche nacheinander in den Angriffspunkten a, b, c, d, e und f angebracht sind. In a wirken 6 *kg* abwärts, in b 4 *kg* aufwärts, in c 5 *kg* abwärts, in d 3 *kg* aufwärts, in e 2 *kg* aufwärts und in f 1 *kg* abwärts. Wenn nun $ab = 3$, $bc = 2$, $cd = 4$, $de = 6$, $ef = 7$ *cm*, in welcher Entfernung vom Punkte a, nach welcher Richtung und mit welcher Größe muß eine Kraft angebracht werden, damit sie den gesamten Kräften das Gleichgewicht halte? (I.)

Antw.: In der Verlängerung von fa über a hinaus in einer Entfernung von $7\frac{1}{3}$ *cm* ist eine aufwärts wirkende, den übrigen Kräften parallele Kraft 3 *kg* anzubringen.

9) Ein Stab, ab, habe die Länge l und sei an den beiden Enden durch die Gewichte p und q beschwert. Wie heißen die beiden Hebelarme, wenn das Gewicht s des Stabes mit berück-

sichtigt wird, und wenn der Schwerpunkt desselben in der Mitte liegt? (I.)

Antw.: $(q + \frac{1}{2}s)l : (p + q + s)$ und $(p + \frac{1}{2}s)l : (p + q + s)$.

10) An einem materiellen Hebel, AC, welcher sich um den Endpunkt C dreht, soll in der Entfernung $CB = a$ eine auf den Hebel senkrecht wirkende Last q angebracht werden. Wie lang wird der Hebel sein müssen, damit eine am Ende desselben gegen ihn senkrecht wirkende Kraft p mit der Last q und dem Gewichte des Hebels im Gleichgewichte stehe? Das Gewicht der Längeneinheit des Hebels sei $= m$. (II.)

Antw.: $(p \pm \sqrt{p^2 - 2amq}) : m$

Beispiel: Für $p = 12$ kg, $q = 15$ kg, $m = 4$ kg, $a = 0{,}9$ m ist $x_1 = 4{,}5$ m, $x_2 = 1{,}5$ m.

11) α) Eine Wage ist unrichtig, weil die Hebelarme nicht vollkommen einander gleich sind. Lege ich eine Last in die linke Wagschale, so hat sie das Gewicht p, lege ich dieselbe in die rechte Wagschale, so hat sie das Gewicht P. Welches ist das wahre Gewicht der Last? (II.)

β) Ist das wahre Gewicht größer oder kleiner, als das arithmetische Mittel aus den beiden falschen Gewichten?

Antw.: α) $\sqrt{pP}$; β) $\sqrt{pP} < \frac{1}{2}(p + P)$.

12) Der Brunnen auf der Festung Königstein ist 320,72 m tief. Wieviel Zeit wird ein Stein gebrauchen, um den Boden zu erreichen, wenn man auf den Widerstand der Luft keine Rücksicht nimmt? (II.)

Antw.: 8,087 ... Sekunden. ($g = 9{,}808$ m).

13) Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von c m α) abwärts, β) aufwärts geworfen. In welcher Zeit wird er den Raum s zurückgelegt haben? (II.)

Antw.: α) Nach $(\sqrt{c^2 + 2gs} - c) : g$ Sekunden; β) während des Steigens nach $[c - \sqrt{c^2 - 2gs}] : g$ Sekunden und beim Wiederherunterfallen nach $[c + \sqrt{c^2 - 2gs}] : g$ Sekunden.

14) Wenn eine Kanonenkugel mit einer Geschwindigkeit von 490,4 m senkrecht in die Höhe geschossen wird, wie lange und bis zu welcher Höhe würde sie steigen, wenn die Luft nicht Widerstand leistete? (II.)

Antw.: 50 Sekunden würde sie steigen und eine Höhe von 12260 m erreichen. ($g = 9{,}808$ m.)

15) α) Welchen Raum durchfällt ein in einen Brunnen hinabgeworfener Stein, den man nach t Sekunden aufschlagen hört, wenn die Geschwindigkeit des Schalles gleich s ist? (II.)

Antw.: $s[(s + gt) - \sqrt{s^2 + 2gst}] : g$.

β) In Schweden soll es Höhlen geben, in denen man einen hineinfallenden Stein erst nach 25 Sek. aufschlagen hört. Welche Tiefe für die Höhlen setzt dieses voraus, wenn man die Geschwindigkeit des Schalles zu 340,18 m rechnet? (II.)

Antw.: 1867,00 m.

16) Die Trümmer eines in der Luft zerplatzenden Meteorsteines fielen t Sekunden nach der Detonation zur Erde. In welcher Höhe zersprang er?*) (Geschwindigkeit des Schalles $= s$.)

Aufl.: $x = s\dfrac{s - gt \pm \sqrt{s(s-2gt)}}{g}$. Für $t = 3$, $s = 340{,}18\,m$, $g = 9{,}808\,m$ ist $x_1 = 21\,508{,}1\,m$ oder auch $x_2 = 48{,}4\,m$.

17) Von einem Punkte, welcher $h\,m$ über dem Horizonte liegt, fallen zu gleicher Zeit zwei Körper, der eine frei, der andere mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $n\,m$, über einer schiefen Ebene. Welche Länge muß die schiefe Ebene haben, wenn beide Körper zu gleicher Zeit zur Erde fallen sollen? (II.)

Antw.: $(n + \sqrt{n^2 + 2gh})\sqrt{h : 2g}$.

18) Zwei schiefe Ebenen M und N, deren Längen m und n sind, stoßen aneinander und haben die gemeinschaftliche Höhe h. Wenn nun einer von zwei Körpern sich auf der schiefen Ebene M mit der Anfangsgeschwindigkeit c hinaufbewegt, welche Geschwindigkeit muß der auf der schiefen Ebene N sich hinaufbewegende andere Körper erhalten, wenn er zu gleicher Zeit mit dem ersteren im höchsten Punkte der Ebene anlangen soll? (II.)

Antw.: $\dfrac{m^2 + n^2}{2mn}c \pm \dfrac{m^2 - n^2}{2mn}\sqrt{c^2 - 2gh}$. Für $m = 40\,m$, $n = 30\,m$, $h = 24\,m$, $c = 25\,m$, $g = 9{,}808\,m$ ist $x_1 = 29{,}66\,m$, $x_2 = 22{,}42\,m$.

19) Ein harter unelastischer Körper A von der Masse M habe die Geschwindigkeit C. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein anderer harter Körper von der Masse m gegen ihn stoßen, wenn seine Geschwindigkeit in der Richtung von A nach dem Stoße c' sein soll? (I.)

Antw.: $[M(C - c') - mc'] : m$.

20) Zwei sich hintereinander bewegende elastische Körper stoßen aufeinander. Der vorhergehende hat die Masse m, der folgende die Masse M. Nach dem Zusammenstoßen hat der erste Körper die Geschwindigkeit g, der andere die Geschwindigkeit G. Welche Geschwindigkeiten hatten beide Körper vor dem Stoße? (I.)

Antw.: $\dfrac{2GM - g(M - m)}{M + m}$ und $\dfrac{2gm + G(M - m)}{M + m}$.

21) n elastische Kugeln befinden sich in einer Reihe so neben-

*) Es möge die Voraussetzung gemacht werden, daß der Stein im Augenblicke der Detonation seinen Fall beginne. In Wirklichkeit wird derselbe aber bereits in Bewegung sein.

einander aufgehängt, daß die Mittelpunkte derselben alle in einer geraden Linie liegen. Die Massen der Kugeln mögen eine geometrische Reihe M, N, P, Q u. s. w. bilden. Wie groß ist die Geschwindigkeit der $n$ten Kugel, wenn die erste Kugel mit der Geschwindigkeit c auf die zweite stößt, diese auf die dritte u. s. w.?

Antw.: $c\left(\frac{2M}{N+M}\right)^{n-1}$. Für $N = \frac{1}{2}M$, $P = \frac{1}{2}N$, $Q = \frac{1}{2}P$ u. s. w., $n = 100$, $c = 1$ ist $x = 2\,338\,500$ Millionen.

22) Welche Breite und Höhe muß man einem rechtwinkligen Balken, der aus einem cylindrischen Baumstamme vom Durchmesser d sich ausschneiden läßt, geben, damit derselbe am stärksten wird?

Aufl.: Heißt die Breite des Balkens x, die Höhe y, so ist $x^2 + y^2 = d^2$ und die relative Stärke dem Produkte xy^2 proportional. Die Stärke wird also ein Maximum q, wenn xy^2 ein Maximum ist; es ist also $x(d^2 - x^2) = q$ oder $x^3 - d^2x + q = 0$. Löst man die Gleichung nach der trigonometrischen Formel § 96 auf, so wird $\sin 3s = \frac{3q}{d^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}d^2}} = \frac{3q}{2d^3}\sqrt{3}$. Der größte Wert, den q in diesem Quotienten erreichen kann, ist derjenige, für welchen $\sin 3s$ seinen größten Wert 1 erreicht; es ist also für das Maximum von q der Winkel $s = \frac{1}{3}R$, und somit $x = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot d \sin \frac{1}{3}R = d \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$; hieraus folgt $y = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ *); $x : y = 1 : \sqrt{2}$.

23) Eine hölzerne massive Kugel von 10 cm Radius wird ins Wasser geworfen. Wie tief wird sie einsinken, wenn das spezifische Gewicht des Holzes gleich 0,6 ist? (III.)

Antw.: 11,3417 (nahe $11\frac{1}{3}$) cm.

24) Eine eiserne, innen hohle Kugel von 1 cm Wanddicke soll in Wasser zum Schwimmen gebracht werden. Welchen Halbmesser muß wenigstens die Kugel haben, wenn das spezifische Gewicht des Eisens gleich 7,5 ist? (III.)

Antw.: 21,4682 cm.

25) Eine eiserne Kugel von 6 kg Gewicht wird in ein Gefäß getaucht, worin sich Quecksilber und über demselben Wasser befindet. Wie schwer ist das Kugelsegment, welches sich im Wasser befindet? Das spez. Gew. des Quecksilbers gleich 13,6, das des Eisens gleich 7,5. (I.)

Antw.: $2\frac{19}{21}$ kg.

26) In einem Gefäße, in welchem das Wasser immer auf gleicher Höhe gehalten wird, befindet sich unter dem Wasserspiegel eine Öffnung von 4 qcm Weite, und 9 cm tiefer eine zweite von 5 qcm

---

*) Die geometrische Konstruktion ergiebt sich hieraus leicht. Teilt man nämlich den Durchmesser der Grundfläche in drei gleiche Teile, errichtet auf demselben in den beiden Teilungspunkten nach verschiedenen Seiten Senkrechte bis zur Peripherie des Kreises, so erhält man zwei Punkte, welche, mit den Endpunkten des Durchmessers verbunden, die Grundfläche des rechtwinkligen Balkens bestimmen, der die größte relative Kohäsionskraft hat.

Weite. Wenn nun beide Öffnungen zusammen in jeder Sekunde 1,162 169 6 *l* Wasser liefern, wie läßt sich hieraus, wenn man zugleich auf die Kontraktion des Wasserstrahles, welche 0,64 beträgt, Rücksicht nimmt, die Tiefe der ersten Öffnung unter dem Wasserspiegel berechnen?*) (II.)

Antw.: 16 *cm*.

27) Ein mit Wasser gefüllter prismatischer Behälter habe 1 *qm* 7009,16 *qcm* Grundfläche, und am Boden eine Ausflußöffnung von 1 *qcm*. Wenn nun nach 20 Minuten die Wasserhöhe um 6 *cm* abnimmt, wie läßt sich hieraus die Wasserhöhe im Behälter berechnen?**) (I.)

Antw.: $12\frac{1}{4}$ *cm*.

28) Welchen Durchmesser muß wenigstens ein kugelförmiger papierner Luftballon haben, wenn er, mit erhitzter Luft, deren Dichtigkeit $\frac{2}{3}$ der Dichtigkeit der gewöhnlichen Luft beträgt, gefüllt, steigen soll? Ein Kubikmeter atmosphärischer Luft von 0^0 C. und 760 *mm* Druck wiegt 1293 *g*, ein Quadratmeter Papier 100 *g*. (I.)

Antw.: 1,3921 *m*.

29) Eine unten offene, oben verschlossene Barometerröhre von der Länge l werde bis zur Höhe h mit Quecksilber gefüllt und auf das Niveau eines mit Quecksilber gefüllten Gefäßes gestellt. Wenn der Druck der äußeren Luft $= b$ ist, welche Höhe wird das Quecksilber in der Röhre haben? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}(b+l) - \sqrt{\frac{1}{4}(b+l)^2 - bh}$.

Beispiel: Für $l = 896$ *mm*, $h = 504$ *mm*, $b = 770$ *mm* wird $x_1 =$ 280 *mm*, x_2 (nicht brauchbar) $= 1386$ *mm*.

30) Eine unter dem Drucke h der Atmosphäre mit trockener atmosphärischer Luft gefüllte Flasche wiegt p *g*; wird sie unter dem Drucke h' mit einer trockenen Gasart gefüllt, so wiegt sie p' *g*, und wenn endlich dieselbe Flasche mit destilliertem Wasser gefüllt wird, so wiegt sie p'' *g*. Wie groß ist das Verhältnis der Dichtigkeit des Gases zu der der Luft unter demselben Drucke, wenn die Dichtigkeit des Wassers $m$mal größer ist, als die der trockenen Luft unter dem mittleren Drucke H, und sich die Temperatur während der drei successiven Beobachtungen nicht geändert hat? (I.)

Antw.: $[mH(p'-p) + h(p''-p')] : [h'(p''-p)]$.

---

*) Ist die Höhe des Wasserspiegels $= h$ *cm*, die Weite der Ausflußöffnung $= w$ *qcm*, so ist die Menge des in jeder Sekunde ausfließenden Wassers $= w\sqrt{2gh}$, wo $g = 980,8$ *cm* oder $= 0,04429\, w\sqrt{h}$ *l*.

**) Formel für die Zeit, in welcher das in einem prismatischen Gefäße von der Grundfläche B und der Höhe h befindliche Wasser aus einer am Grunde angebrachten Öffnung von p *qcm* völlig ausfließt: $(B:p)\sqrt{2h:g}$ in Sekunden ausgedrückt. Setzt man $g = 980,8$ *cm*, die Kontraktion des Strahles $= 0,64$, so ändert sich die Formel für die Höhe h in Centimetern in $B\sqrt{h} : (p \cdot 14,1743)$ um.

31) Bei 763,4 *mm* Druck der atmosphärischen Luft wiege ein mit atmosphärischer Luft gefüllter Ballon 76,532 *g*, derselbe mit Sauerstoffgas gefüllte Ballon wiege bei 754,68 *mm* Luftdruck 76,94 *g*, mit Wasser gefüllt aber 3537,55 *g*. Die Dichtigkeit des Wassers in Bezug auf Luft bei der Spannung 759,0 *mm* sei 770. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Sauerstoffgases? Antw.: 1,1026.

32) Der Rezipient einer Luftpumpe habe den Rauminhalt c, der Stiefel den Inhalt b, die Dichtigkeit der äußeren Luft sei d. Wie groß ist die Dichtigkeit der Luft im Rezipienten nach n Kolbenstößen? (Geom. Progression.) Antw.: $[a:(a+b)]^n d$.

Beispiel: $a = 400$, $b = 47$, $n = 30$; $x = 0{,}035\,692\,d$.

33) Der Rezipient einer Luftpumpe halte 6912, der Stiefel 1044 *ccm*. Nach wieviel Kolbenstößen wird die Dichtigkeit der Luft $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen betragen? (Geom. Progression.)

Antw.: Nach 16,17, also nach 16 bis 17 Kolbenstößen.

34) Wie heißt die Antwort' auf die 32. Aufgabe, wenn der schädliche Raum von dem Inhalte c mit berücksichtigt wird? (Geometrische Progression.)

Antw.: Die Dichtigkeiten der Luft nach dem 1., 2., 3. . . . $n$ten Kolbenzuge sein bezüglich $d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$. Setzt man $c:(a+b+c) = p$, $a:(a+b+c) = q$, so ist

$d_n = pd + qd_{n-1}$, also:

$$d_1 = pd + qd,\quad d_2 = pd + qd_1 = pd + pqd + q^2 d,$$
$$d_3 = pd + pqd + pq^2 d + q^3 d,$$
$$d_n = pd(1 + q + q^2 + q^3 \ldots q^{n-1}) + q^n d.$$

Hieraus $d_n = \left[\frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n\right] d$.

Die Grenze der Verdünnung für $n = \infty$ ist gleich $cd:(b+c)$.

35) Wieviel Grad Réaumur entsprechen ebensovielen Graden nach Fahrenheit? (I.) Antw.: — 25,6° R. = — 25,6° F.

36) In welchem Verhältnisse muß Wasser von a Grad Wärme mit Wasser von b Grad Wärme gemischt werden, damit man Wasser von c Grad Wärme erhalte? (I.) Antw.: $(c - b):(a - c)$.

37) m *kg* einer Flüssigkeit von der Temperatur t Grad geben mit n *kg* einer anderen Flüssigkeit von der Temperatur t' Grad eine Temperatur von t'' Grad. Wenn nun die spezifische Wärme (Wärmekapacität) der ersten Flüssigkeit $= s$ ist, wie groß ist die spezifische Wärme der zweiten Flüssigkeit? (I.)

Antw.: $ms(t'' - t):[n(t' - t'')]$.

38) Nach den Versuchen von Regnault ist die Schmelzungswärme eines Kilogramms Schnee gleich 79,25 Wärmeeinheiten (Kalorien)*). Wieviel Kilogramm Schnee von 0° C. muß man zu 7 *kg* Wasser von 62°,5 C. hinzusetzen, um ein Wasser von 30° C. zu erhalten? (I.) Antw.: $2\frac{36}{437}$ *kg*.

*) Eine Kalorie ist die Wärmemenge, welche nötig ist, um die Temperatur von 1 *kg* Wasser um 1° C. zu erhöhen.

39) Nach Regnault ist die Verdampfungswärme von einem Kilogramm Wasser bei 100° C. gleich 537 Wärmeeinheiten. Wieviel Kilogramm Wasserdampf von 100° C. muß man zu 40 *kg* Wasser von 25° C. hinzusetzen, um Wasser von 100° C. zu erhalten?

Antw.: $5\frac{1}{1}\frac{9}{9}\frac{8}{8}$ *kg*.

40) Wenn *m g* Wasserdampf von 100° C., *m' g* Wasser von *t* Grad und *m'' g* Eis von 0° C. miteinander in Berührung gebracht werden, wie groß ist die Temperatur des Wassers, welches man erhält, wenn das Eis und der Dampf ganz tropfbarflüssig werden? (I.)

Antw.: $(637m + m't - 79{,}25m'') : (m + m' + m'')$ Centesimalgrad.

41) Ein Rostpendel bestehe aus zwei abwärts gehenden Eisenstangen und einer aufwärts gehenden Zinkstange. Welche Länge muß man der Zinkstange geben, wenn die Länge des Pendels $= l$, und wenn die linearen Ausdehnungen des Zinks und des Eisens von 0°—100° C. $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ sind? (I.) Antw.: $al : (b - a)$.

Beispiel: Für $l = 99{,}37$ *cm*, $a = 322$, $b = 816$ ist $x = 64{,}77$ *cm*.

42) Zur Bestimmung der Ausdehnung des Wassers bei verschiedenen Temperaturen dient nach Despretz folgende innerhalb der Grenzen von 0° — 30° geltende Formel, bei welcher *t* die Temperatur in Centesimalgraden angiebt, wenn das Volumen bei 0° gleich 1 gesetzt wird:

$$v = 1 - 0{,}000057577t + 0{,}0000075601t^2 - 0{,}000000035091t^3.$$

α) Bei wieviel Grad beträgt das Volumen des Wassers 1) 1,0001, 2) 1,0002, 3) 1,0003, 4) 1,0000? (III.)

Antw.: 1) bei 9,43°, 2) bei 10,63°, 3) bei 11,65°, 4) bei 0° und bei 7,906°.

β) Bei wieviel Grad beträgt das Volumen ein Minimum?

Antw.: Soll *v* ein Minimum werden, so muß

$$\frac{57577000}{35091}t - \frac{7560100}{35091}t^2 + t^3$$

ein Maximum werden. Setzt man dieses $= M$, so wird $t^3 - 215{,}443t^2 + 1640{,}79t - M = 0$. Setzt man $t = x + 71{,}814$, so wird $x^3 - 13831{,}1x - M' = 0$, wo M' ein Maximum bedeutet. Behandelt man diese Gleichung nach der dritten trigonometrischen Formel in § 96, so wird, wenn M' ein Maximum ist, auch $\sin 3\varepsilon$ ein Maximum, also $= 1$ sein müssen. Es wird demnach

$$x = -\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,\sin\tfrac{1}{3}R = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = -67{,}8996,$$

also $t = -67{,}8996 + 71{,}8142 = 3{,}9146$.

43) 200 *ccm* eines Gases, gemessen bei 760 *mm* Quecksilberdruck und 0° C., dehnten sich bei einem bestimmten Quecksilberdrucke und bei einer bestimmten Temperatur auf 215,85 *ccm* aus. Bei einem um 10 *mm* höheren Quecksilberdrucke und bei einer um 10° C. höheren Temperatur dehnte sich das Gas auf 220,46 *ccm* aus. Wie-

viel betrug hiernach im ersten Falle der Quecksilberdruck und die Temperatur?

Antw.: Der Quecksilberdruck 730 *mm*, die Temperatur 10° C.

44) α) Wenn eine glühende Kugel in jeder Sekunde um 0,0077 ihrer jedesmaligen Hitze verliert, wann wird dieselbe nur noch die Hälfte ihrer anfänglichen Hitze besitzen? (Geom. Progression.)

Antw.: Nach 89,67 Sekunden.

β) Um die Temperatur eines Ofens zu bestimmen, legt man eine Platinkugel in denselben und wirft sie, nachdem sie die Temperatur des Ofens angenommen hat, in Wasser. Ihr Gewicht beträgt 100 Gramm, das Gewicht des Wassers 1000 Gramm. Die Temperatur des Wassers wird durch die Aufnahme von Wärme aus dem Platin von 5° C. bis 10° C. erhöht. Wie hoch ist die Temperatur des Ofens? (II.) Die Wärmekapacität des Platins bezogen auf die des Wassers = 1 ist bei x^0 Temperatur gegeben durch: $0{,}033\,08 + 0{,}000\,004\,2x$.

Aufl.: Heißt die gesuchte Temperatur x, so erhält man folgende Gleichung: $100x(0{,}330\,8 + 0{,}000\,004\,2x) = 10(1000 + 3{,}308 + 0{,}000\,42x) - 5000$; hieraus $x = 1306{,}4^0$ C.

45) Nach angestellten Versuchen ist der Heizwert von 1 *kg* Kohle 7500 Kalorien und das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit gleich 423,5 Kilogrammmetern. α) Wieviel Kilogramm Wasser von 100° C. lassen sich demnach durch 1 *t* Kohle in Dampf verwandeln bei einem Nutzeffect von 50%; β) wieviel beträgt die Arbeitsleistung des Dampfes in Kilogrammmetern bei einem gesamten Nutzeffect von 30%? Antw.: α) 6983,24 *kg*; β) 952875000 *kgm*.

46) Nach Egen erhält man die Spannung der Wasserdämpfe in Atmosphären nach der Formel: $t'' = 100 + 64{,}295\,12 \log e + 13{,}894\,79 (\log e)^2 + 2{,}909\,769 (\log e)^3 + 0{,}174\,263\,4 (\log e)^4$,*) wobei t'' hundertteilige Grade und e die Spannung des Wasserdampfes in Atmosphären bedeutet. Wieviel beträgt nach dieser Formel die Spannung bei 150° C.? (Transcendente Gleichung.)

Antw.: 4,64954 Atmosphären.

47) Zwei leuchtende Körper, deren Lichtintensitäten sich wie $v : v'$ verhalten, sind a *m* voneinander entfernt. In welcher Entfernung von dem ersteren leuchtenden Körper zwischen beiden ist die Erleuchtung gleich stark? (II.)

Antw.: In einer Entfernung von $a\sqrt{v'}\,(\sqrt{v} - \sqrt{v'}) : (v - v')$ Metern.

---

*) Der Unterschied zwischen dem aus dieser Formel und dem aus der Beobachtung erhaltenen Werte beträgt im Mittel nur 0,11° C. und umfaßt mit voller Sicherheit 230°.

48) Das Bild eines leuchtenden Punktes, der sich in der Achse eines Hohlspiegels befindet, dessen Radius r ist, sei m Centimeter vom Punkte selbst entfernt. Welche Entfernung vom Spiegel hat der leuchtende Punkt? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}(r + m \pm \sqrt{r^2 + m^2})$ oder $\frac{1}{2}(r - m \pm \sqrt{r^2 + m^2})$.

49) Der Radius der einen Fläche einer Linse sei r, der Brechungsindex n, die Brennweite f. Wie groß ist der Radius der anderen Fläche? (I.)

Antw.: $rf(n-1) : [r - (n-1)f]$.

50) Der Radius der vorderen Fläche einer Linse sei R, der Radius der hinteren Fläche r, die Entfernung eines in der Achse befindlichen leuchtenden Punktes von seinem Bilde d und der Brechungsindex n. Wie groß sind die Entfernungen des Punktes und seines Bildes von der Linse? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}d\left(1 \pm \sqrt{\frac{(n-1)\,d(R+r) - 4Rr}{(n-1)\,d(R+r)}}\right)$.

51) Ein Brillenschleifer will einen Meniskus von 16 *cm* Fokallänge schleifen, hat aber nur Schalen, deren Krümmungsradien 1, 2, 3 u. s. w. *cm* betragen. Welche Radien erhalten die beiden Flächen, wenn der Brechungsindex des Glases $= \frac{3}{2}$ ist? (Diophantische Gleichung.)

Antw.: Entweder 4 und 8, oder 6 und 24, oder 7 und 56 *cm*.

52) Der Halbmesser einer leuchtenden Kugel sei $= R$, der einer dunkeln $= r$, der Abstand der Mittelpunkte beider Kugeln sei $= d$. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte der dunkeln Kugel liegt α) die Spitze des Kernschattens, β) die Spitze des Halbschattens? γ) Wie groß ist der Halbmesser des Kernschattens in einem Abstande $= m$ vom Mittelpunkte des dunkeln Körpers, δ) wie groß der Halbmesser des Halbschattens daselbst? (I.)

Antw.: α) $dr : (R - r)$; β) $dr : (R + r)$;

γ) $\frac{dr - m(R-r)}{\sqrt{d^2 - (R-r)^2}}$; δ) $\frac{dr + m(R+r)}{\sqrt{d^2 - (R+r)^2}}$.

53) Nach Lenz wird das Leitungsvermögen l des Kupfers für Elektricität bei t^0 R., wenn es bei 0^0 gleich 100 angenommen wird, durch folgende Formel ausgedrückt: $l = 100 - 0{,}31368\,t + 0{,}000437\,t^2$. Bei wieviel Grad ist das Leitungsvermögen $= 50$? (II.)

Antw.: Bei $238{,}927^0$ R.

54) Die Stromstärken zweier galvanischen Ketten aus n und n' gleich starken Elementen bei gleichem Leitungswiderstande seien s und s'. In welchem Verhältnisse stehen die elektromotorische

Kraft, der Widerstand der Elemente und der Widerstand des Leitungsdrahtes zu einander?*) (I.)

Antw.: In dem Verhältnisse $ss'(n - n') : (ns' - n's) : (s - s')nn'$.

---

55) Die Masse eines Himmelskörpers sei $= A$, die eines zweiten $= B$, der Abstand beider $= d$. In welchem Punkte ihrer Verbindungslinie wird ein Körper C von beiden mit gleicher Kraft angezogen? (II.)

Antw.: In einer Entfernung von $d(A \mp \sqrt{AB}) : (A - B)$ vom Körper A.

Beispiel: Für Erde und Mond ist $A = 80$, $B = 1$, $d = 60{,}2$ Erdhalbmesser.

56) Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt im Mittel 11 614, die Entfernung des Mondes von der Erde 30,1 Erddurchmesser; der Durchmesser der Sonne beträgt 108,3, der des Mondes 0,27 Erddurchmesser. Wie weit fällt α) die Spitze des Kernschattens der Erde; wie groß ist β) der Durchmesser des Kernschattens in der mittleren Entfernung des Mondes in Vergleich zum Monddurchmesser?

Antw.: α) 108,26 Erddurchmesser: β) 2,68 Monddurchmesser.

57) **Thucydides** erwähnt (II. 28)**) eine **Sonnenfinsternis**, welche im ersten Jahre des peloponnesischen Krieges (Ol. 87, 2) zu **Athen** vorfiel. Es ist dieses die nämliche Finsternis, von der **Plutarch** im Leben des Perikles spricht, bei deren Eintreten Perikles das Gesicht des erschrockenen Steuermannes mit dem Mantel bedeckte, indem er ihm bemerkte, daß kein Unterschied zwischen der durch den Mantel und der durch den Mond verursachten Verfinsterung zu machen sei. Die Finsternis fiel 431 (chronologisch) v. Chr. am 3. August vor***). Nach den **neuesten** astronomischen Tabellen†) sind in Bezug auf den Horizont von **Athen** die Elemente

---

*) **Ohm'sche Formel:** $s = \frac{ne}{nr + l}$, wenn n die Anzahl der Elemente, e die elektromotorische Kraft, r den Widerstand der einzelnen Elemente und l den Widerstand des Leitungsdrahtes bezeichnet.

**) *Τοῦ δ' αὐτοῦ θέρους νουμηνίᾳ κατα σελήνην (ὥσπερ καὶ μόνον δοκεῖ εἶναι γίγνεσθαι δυνατὸν) ὁ ἥλιος ἐξέλιπε μετὰ μεσημβρίαν καὶ πάλιν ἀνεπληρώθη, γενόμενος μηνοειδὴς, καὶ ἀστέρων τινῶν ἐκφανέντων.*

***) Die Finsternisse während des peloponnesischen Krieges. Abhandlung von Ed. **Heis** im Programme des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Köln, 1834.

†) Tables du Soleil, exécutées d'après les ordres de la Société Royale des Sciences de Copenhague par MM. P. A. **Hansen** et C. F. R. Oluf-

der Finsternis die nachfolgenden. Bezeichnet man die Rectascensionen der Sonne zu den Zeiten 3 U. 51,2 M. und 4 U. 51,2 M. nachm. mittl. athen. Zeit mit α_1 und α_2, die des Mondes mit a_1 und a_2, die Deklinationen der Sonne und des Mondes mit δ_1, δ_2 und d_1, d_2, ferner die scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Mondes mit ϱ_1, ϱ_2 und r_1, r_2, so ist: $\alpha_1 = 126^0 50' 16''$, $\alpha_2 = 126^0 52' 45''$, $a_1 = 126^0 22' 52''$, $a_2 = 126^0 50' 46''$, $\delta_1 = + 19^0 24' 9''$, $\delta_2 = + 19^0 23' 34''$, $d_1 = + 19^0 48' 19''$, $d_2 = + 19^0 33' 51''$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 15' 51'',6$, $r_1 = 15' 40'',1$, $r_2 = 15' 37'',9$. Die relative stündliche Bewegung des Mondes im Parallelkreise war 1438″, in der Deklination — 832″. Welches waren die Umstände der Finsternis?

Antw.: Die Finsternis begann 4 Uhr 0 Min. mittl. ath. Zeit nachmittags (*μετὰ μεσημβρίαν*), endete um 6 Uhr 12 Minuten. Die Sonne erschien, da die Verfinsterung nahe 9 Zoll betrug, mondförmig (*μηνοειδής*). — Der Zusatz *ἀστέρων τινῶν ἐκφανέντων* bezieht sich auf die beiden Planeten Venus und Mars, welche, den Rechnungen zufolge, damals über dem Horizonte sich befanden, der erste Planet links, der andere rechts von der Sonne und nahe in gerader Linie mit ihr stehend.

58) Thucydides spricht (VII. 50. Kap.)*) von einer Mondfinsternis, welche sich im 19. Jahre des peloponnesischen Krieges (Ol. 91, 4) ereignete, und welche von entschiedenem Einflusse auf das Schicksal des im Hafen vor Syrakus lagernden athenienſischen Heeres war. Die genaueren Umstände dieser Finsternis, welche am 27. August 413 vor Christus stattfand, sollen angegeben werden. Wahrer Vollmond 27. August abends 8 Uhr 41,7 Minuten mittlerer Zeit zu Paris; Länge der Sonne $148^0 46' 45''$, Breite des Mondes $+ 21' 58''$; stündliche Bewegung der Sonne in der Länge $2' 28''$, des Mondes $33' 41''$, des Mondes in der Breite $+ 3' 6'',2$; Halbmesser der Sonne $15' 58''$, des Mondes $15' 45''$; Parallaxe der Sonne $8'',6$, des Mondes $57' 41'',5$; Länge von Syrakus $12^0 52'$ östlich von Paris.

Antw.: Anfang der Mondfinsternis abends 7 Uhr 47 Minuten mittlerer syrakusischer Zeit, Anfang der totalen Verfinsterung 9 Uhr 1 Min., Mitte 9 Uhr 29 Min., Ende der totalen Verfinsterung 9 Uhr 57 Min., Ende der ganzen Finsternis 11 Uhr 11 Min., Größe 13,6 Zoll.

50) Cicero erwähnt in dem erst 1822 von dem berühmten Vorsteher der Vatikanischen Bibliothek zu Rom, Angelo Mai,

---

sen, Copenhague 1853; Tables de la Lune, construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle, par P. A. Hansen, Londres 1857.

*) *Καὶ μελλόντων αὐτῶν, ἐπειδὴ ἕτοιμα ἦν, ἀποπλεῖν, ἡ σελήνη ἐκλείπει· ἐτύγχανε γὰρ πανσέληνος οὖσα.*

aufgefundenen Werke De re publica I, 16*) eine Sonnenfinsternis, welche ungefähr um das Jahr 350 der Erbauung der Stadt an den Nonen des Junius vorfiel, und wobei Nacht eintrat. Diese Sonnenfinsternis, welche sich sowohl bei Ennius, als in den Annales maximi verzeichnet findet, fügt Cicero hinzu, sei um so wichtiger, da von ihr zunächst die vorhergegangenen berechnet wären bis auf die an den Nonen des Quinctilis, während welcher Romulus verschwand. Es sollen nach den folgenden auf den Horizont von Rom sich beziehenden Elementen die näheren Umstände der Finsternis angegeben werden. Sind für die Zeiten des 21. Juni 400 (chronol.) v. Chr. 7 Uhr 7,0 Min. und 8 Uhr 7,0 Min. abends α_1 und α_2 die Rectascensionen der Sonne, a_1 und a_2 die des Mondes, δ_1 und δ_2 die Deklinationen der Sonne, d_1 und d_2 die des Mondes, ferner ϱ_1, ϱ_2 und r_1, r_2 die scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Mondes, so ist: $\alpha_1 = 83^0\,10'\,28''$, $\alpha_2 = 83^0 13'\,4''$, $a_1 = 82^0 59' 16''$, $a_2 = 83^0 44' 43''$, $\delta_1 = +\,23^0 35' 53''$, $\delta_2 = +\,23^0 36' 0''$, $d_1 = +\,23^0 36' 4''$, $d_2 = +\,23^0 36' 55''$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 15' 45'',5$, $r_1 = 16' 29'',6$, $r_2 = 16' 26'',6$. Die relative stündliche Bewegung des Mondes im Parallelkreise war 2355″, in der Deklination + 44.“

Aus den von dem Verfasser dieses Buches im Jahre 1826 auf Aufforderung des Geheimen Staatsrates Niebuhr**) angestellten Untersuchungen ergab sich das Resultat, daß diese Finsternis keine andere sein könne, als die im Jahre 400 (chronol.) v. Chr. am 21. Juni stattgehabte Finsternis. Die neuesten Tabellen, wonach obige Elemente berechnet sind, geben das Resultat, daß die Sonnenfinsternis eine totale war von nahe 2 Minuten Dauer. Der Anfang der Finsternis fiel auf 6 U. 33,3 M. abends, der Anfang der totalen Verdunkelung auf 7 U. 21,7 M., das Ende der totalen Verdunkelung auf 7 U. 23,6 M., das Ende der ganzen Finsternis auf 8 U. 11,8 M. Der Umstand, daß die Mitte der Finsternis um 7 U. 22,6 M., 8 M. vor Sonnenuntergang, stattfand, giebt der Aussage des Ennius: „Soli luna obstitit et nox“ in Bezug auf das Eintreten der Nacht Bedeutung.

60) Der bekannte Astronom Struve hat aus den Karten Harding's gefunden, daß die Zahl der Sterne jeder Größenklasse bis zur sechsten einschließlich ungefähr das Dreifache von der Anzahl der Sterne in der vorhergehenden Klasse beträgt. Wenn nun die Anzahl der Sterne erster Größe 18, die der zweiten 54 u. s. w. beträgt, wie läßt sich nach diesem Gesetze die Anzahl derjenigen Sterne berechnen, die in unseren stärksten Fernröhren sicht-

*) Id autem postea ne nostrum quidem Ennium fugit, qui ut scribit anno quinquagesimo CCC fere post Romam conditam nonis iuniis
Soli luna obstitit et nox.

**) Man vgl. Niebuhr, Römische Geschichte, Berlin 1828, I. Teil, p. 280.

bar sind, unter der Voraussetzung, daß die vierzehnte Klasse die äußerste Grenze der Kraft dieser Instrumente bezeichnet?

Antw.: Die Anzahl sämtlicher Sterne von der ersten bis zur vierzehnten Größe beträgt 43046712.

61) Wenn man den mittleren Mondhalbmesser zu 15′ 33″,5 annimmt, wieviel Vollmondflächen bedecken alsdann den ganzen Himmel, und wieviel Sterne erster bis neunter Größe kommen auf eine Vollmondfläche, wenn man nach Argelander annimmt, daß die Anzahl der Sterne erster bis neunter Größe inklusive in runder Zahl 200000 sei?

Antw.: 195291 Vollmondflächen bedecken den Himmel, und es kommt nahezu ein Stern erster bis neunter Größe auf eine Vollmondfläche.

§ 109.

C. Aufgaben aus der Chemie.

Äquivalentzahlen der in den Beispielen vorkommenden Elemente, bezogen auf Wasserstoff = 1 *).

Aluminium	*Al*	27,3	(Dumas).
Arsen	*As*	75,0	(Pelouze, Berzelius).
Baryum	*Ba*	137,0	(Dumas).
Bor	*B*	11,0	(Berzelius).
Brom	*Br*	80,0	(Marignac).
Calcium	*Ca*	40,0	(Dumas, Erdmann und Marchand).
Chlor	*Cl*	35,5	(Marignac, Stas).
Eisen	*Fe*	56,0	(Erdmann und Marchand).
Kalium	*K*	39,1	(Marignac, Stas).
Kohlenstoff	*C*	12,0	(Dumas, Erdmann und Marchand).
Kupfer	*Cu*	63,4	(Erdmann und Marchand).
Magnesium	*Mg*	24,0	(Marchand und Scheerer).
Natrium	*Na*	23,0	(Pelouze, Stas).
Phosphor	*P*	31,0	(Schrötter).
Sauerstoff	*O*	16,0	
Schwefel	*S*	32,0	(Erdmann und Marchand).
Silber	*Ag*	108,0	(Marignac).
Stickstoff	*N*	14,0	(Marignac).
Strontium	*Sr*	88,0	(Dumas).
Wasserstoff	*H*	1,0	(Dumas).

*) Da fast alle Chemiker der Gegenwart die Äquivalentzahlen auf Wasserstoff = 1 beziehen, so sind die diesem Systeme entsprechenden Äquivalentzahlen aufgenommen. Rücksichtlich der Äquivalentzahlen und der in den Beispielen vorkommenden chemischen Formeln vergleiche man: „Lehrbuch der Chemie von Prof. Dr. J. Lorscheid. 2. Aufl. 1872“. (Herder'sche Buchhandl., Freiburg.)

1) Wieviel Sauerstoff ist in 100 Gewichtsteilen Kohlensäure (CO_2) enthalten?

Antw.: 72,73.

2) Wieviel kohlensaures Kali (K_2CO_3) ist nötig, um 100 Gewichtsteile konzentrierte Schwefelsäure (H_2SO_4) zu neutralisieren?

Antw.: 141,02.

3) Wieviel Schwefelsäure enthalten 37,5 g schwefelsauren Baryts, wenn man weiß, daß in den neutralen schwefelsauren Salzen das Verhältnis des Sauerstoffes der Säure zum Sauerstoffe der Basis = 3 : 1, und daß 100 Gewichtsteile wasserfreier Schwefelsäure 60 Sauerstoff, und 100 Baryt 10,457 Sauerstoff enthalten?

Antw.: 12,876 g.

4) Wieviel Chlornatrium ($NaCl$) ist nötig, um 100 Gewichtsteile salpetersauren Silberoxyds ($AgNO_3$) vollkommen zu ersetzen?

Antw.: 34,411 Gewichtsteile.

5) Wieviel konzentrierte Schwefelsäure (H_2SO_4) hat man nötig, um 100 Gewichtsteile Salpeter (KNO_3) so zu zersetzen, daß man saures schwefelsaures Kali ($HKSO_4$) enthält?

Antw.: 96,933 Gewichtsteile.

6) Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in den Volumverhältnissen 2 : 1 miteinander zu Wasser. Wieviel Gewichtsteile Wasserstoff verbinden sich mit 100 Gewichtsteilen Sauerstoff, wenn das Eigengewicht des Sauerstoffes = 1,108 32, das des Wasserstoffes = 0,069 27?

Antw.: 12,50.

7) Ammoniak entsteht durch Verbindung von 1 Volumen Stickstoff mit 3 Volumen Wasserstoff, wobei sich das Gas um die Hälfte verdichtet. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Ammoniaks, wenn das des Stickstoffes = 0,969 78?

Antw.: 0,588 8.

8) Ein Molekül Kohlensäure CO_2 (= 2 Volumen) besteht aus 2 Atomen O (= 2 Vol.) und 1 Atom C (= 1 Vol.). Wenn nun das spezifische Gewicht des Sauerstoffgases = 1,108 32, das der Kohlensäure = 1,523 94 ist, wie läßt sich hieraus das spezifische Gewicht des isoliert nicht darzustellenden Kohlengases berechnen?

Antw.: 0,831 2.

9) Wieviel Kubikcentimeter Sauerstoffgas von 15° C. Wärme bei 0,760 *m* Barometerhöhe erhält man durch Erhitzen von 500 g chlorsauren Kalis ($KClO_3$)? 1 *l* Wasserstoffgas bei 0° und 0,760 *m* Barometerhöhe wiegt 1 Krith*) = 0,089 6 g. Die Ausdehnung der Gase beträgt von 0° bis 100° C. 0,366 5.

Antw.: 144 056 *ccm*.

---

*) Hoffmann (Einleitung in die moderne Chemie, § 8) hat für das Gewicht eines Liters Wasserstoffgas bei 0° und 0,76 *m* Barometerdruck den Namen Krith (von κριϑή, Gerstenkorn, und der abgeleiteten Bedeutung: ein kleines Gewicht) eingeführt.

10) Wieviel Kupferchlorid ($CuCl_2$) erhält man, wenn man 13,59 g Kupferoxyd in Chlorwasserstoffsäure (HCl) auflöst und die Auflösung bis zur völligen Trocknis abdampft?

Antw.: 22,99 g.

11) Es soll der Gehalt an unterschwefliger Säure (S_2O_2), die in unterschwefligsaurem Natron ($Na_2S_2O_3$) enthalten ist, bestimmt werden. Man setzt zur Auflösung neutrales salpetersaures Silberoxyd im Überschusse hinzu, wodurch die unterschweflige Säure zersetzt wird; die eine Hälfte des Schwefels verwandelt sich nämlich durch den ganzen Sauerstoffgehalt der Säure und den des zersetzten Silberoxyds in Schwefelsäure, die als schwefelsaures Silberoxyd in der Auflösung bleibt; die andere Hälfte des Schwefels verbindet sich mit dem reduzierten Silber und scheidet sich als schwarzes Schwefelsilber aus. Die abfiltrierte Auflösung wird mit salpetersaurer Baryterde gefällt und giebt einen Niederschlag von 10,654 g, das Schwefelsilber, für sich abgewogen, giebt 11,325 g. Wie läßt sich hieraus die Menge der unterschwefligen Säure berechnen?

Antw.: Aus der schwefelsauren Baryterde erhält man 4,389, aus dem Schwefelsilber 4,385, also im Mittel 4,387 unterschweflige Säure.

12) Durch Oxydation einer zu bestimmenden Menge unterschwefligsauren Natrons ($Na_2S_2O_3$) mit rauchender Salpetersäure und Fällung der gebildeten Schwefelsäure mit einer Chlorbaryumlösung enthält man 41,66 Gewichtsteile schwefelsauren Baryts. Wieviel unterschwefligsaures Natron war vorhanden?

Antw.: 14,13.

13) Wieviel arsensaures Kali (K_3AsO_4) ist nötig, um 19,68 Gewichtsteile Eisenchlorid (Fe_2Cl_6) zu zersetzen, und wieviel arsensaures Eisenoxyd (Fe_2AsO_8), wieviel Chlorkalium (KCl) entsteht hierbei?

Antw.: 31,04 arsensaures Kali ist nötig, und man erhält 23,62 arsensaures Eisenoxyd und 27,10 Chlorkalium.

14) Die indirekte Bestimmung des Natrons und Kalis wird ausgeführt, indem man entweder die Summe der schwefelsauren Alkalien und die darin enthaltene Schwefelsäure, oder die Summe der Chlormetalle und das darin enthaltene Chlor bestimmt*). α) Man habe nun gefunden: 1,9761 g $Na_2SO_4 + K_2SO_4$ und darin 1,000 g SO_3. Wieviel Gramm Na_2SO_4 und wieviel Gramm K_2SO_4 ist vorhanden?

Antw.: 0,8887 g Na_2SO_4 und 1,0874 g K_2SO_4.

*) Fresenius, Anleitung zur quantitativen chemischen Analyse. 5. Aufl. § 200.

β) Man habe gefunden 3 g Chlornatrium und Chlorkalium und darin 1,69018 g Chlor. Wieviel *NaCl* und wieviel *KCl*?

Antw.: 2 g *NaCl* und 1 g *KCl*.

15) α)*) Die indirekte Bestimmung des Strontians und des Kalkes kann ausgeführt werden, indem man die Summe der kohlensauren Salze und die darin enthaltene Kohlensäure bestimmt. Gesetzt, wir hätten gefunden: 2 g kohlensaure Salze und darin 0,7383 g Kohlensäure. Wieviel $CaCO_3$ und wieviel $SrCO_3$?

Antw.: 1 g $CaCO_3$ und 1 g $SrCO_3$.

β)*) Gesetzt, bei der indirekten Bestimmung des Chlors und des Broms hätte das Gemenge von Chlorsilber und Bromsilber 2 g gewogen und die Gewichtsabnahme beim Überleiten des Chlors 0,1 g betragen. Wieviel Chlor und wieviel Brom war in dem Gemenge?

Antw.: 0,422025 g Bromsilber und 1,577975 g Chlorsilber.

16) Eine aus 2 Basen, *b* und *B*, bestehende Verbindung zu neutralisieren, werden *n* Gewichtsteile einer Säure erfordert. Das daraus entstehende neutrale Salz betrage *p* Gewichtsteile. Wieviel von den beiden Basen *b* und *B* ist in der Verbindung enthalten, vorausgesetzt, daß ein Molekül der Säure ein Molekül jeder einzelnen Basis zur Sättigung erfordert? Das Molekulargewicht der einen Basis sei *a*, das der anderen *α*, das Molekulargewicht der Säure sei *s*.

Antw.: $a\,\dfrac{\alpha n - (p-n)s}{s(\alpha - a)}$ und $\alpha\,\dfrac{(p-n)s - an}{s(\alpha - a)}$.

17) Die käufliche schwefelsaure Magnesia enthält nicht selten schwefelsaures Natron; es soll die Menge desselben bestimmt werden. Man entwässere das Salz durch Erhitzen und erhalte aus 5 g durch Niederschlag 9,431 g schwefelsauren Baryts. Wieviel wasserfreies schwefelsaures Natron ist in 100 Teilen der entwässerten käuflichen schwefelsauren Magnesia enthalten?

Antw.: 18,46.

18) Eine aus zwei Salzbasen *b* und *b'* bestehende Verbindung liefert mit der Säure *s* eine Salzmenge, deren Gewicht $= m$, und mit der Säure *s'* eine Salzmenge, deren Gewicht $= n$. Wie groß sind die Gewichtsmengen der beiden Salzbasen, wenn die Molekulargewichte von *b*, *b'*, *s*, *s'* bezüglich *p*, *p'*, *q*, *q'* sind, vorausgesetzt, daß jedesmal nur ein Molekül Säure auf ein Molekül Basis kommt?

Antw.: $p\,\dfrac{(p'+q)n - (p'+q')m}{(p-p')(q-q')}$ und $p'\,\dfrac{(p+q')m - (p+q)n}{(p-p')(q-q')}$.

---

*) Fresenius, Anleitung zur quantitativen chemischen Analyse. 5. Aufl. § 200.

19) Eine Auflösung eines Eisenerzes in Salzsäure, bestehend aus Eisenchlorid und Chloraluminium, wurde genau in zwei gleiche Teile geteilt. Der eine Teil wurde durch arsensaures Kali ($2 K_3 As O_4$), der andere durch phosphorsaures Kali ($K_3 PO_4$) zerlegt. Die erste dadurch enstandene arsensaure Verbindung betrug 7,580 Gewichtsteile, die zweite phosphorsaure Verbindung, scharf geglüht, 5,806 Gewichtsteile. Wieviel Eisenoxyd ($Fe_2 O_3$) und wieviel Thonerde ($Al_2 O_3$) enthielt jeder der gleichen Teile des Eisenerzes?

Antw.: 2,422 Eisenoxyd und 0,520 Thonerde.

20) Ein Eisenerz bestehe aus Eisenoxydul und Eisenoxyd. m Teile der Verbindung beider werden durch Auflösung in Salpetersalzsäure völlig in Eisenchlorid verwandelt und mittels Ammoniaks als Eisenoxydhydrat niedergeschlagen. Die Menge des Eisenoxyds betrage nach dem Aussüßen, Trocknen und Glühen n Gewichtsteile. Wieviel Eisenoxydul (x), wieviel Eisenoxyd (y) enthielt das Eisenerz?

Antw.: $x = 9(n - m)$, $y = 10m - 9n$.
Beispiel: $m = 3{,}449$, $n = 3{,}614$; $x = 1{,}485$, $y = 1{,}964$.

21) m Gewichtsteile einer Verbindung von Eisenoxydul und Eisenoxyd geben, durch Wasserstoffgas reduziert, n Gewichtsteile metallisches Eisen. Wieviel Eisenoxydul (x), wieviel Eisenoxyd (y) enthält die Verbindung?

Antw.: $x = 12{,}8571n - 9m$, $y = 10m - 12{,}8571n$.
Beispiel: $m = 3{,}449$, $n = 2{,}506$; $x = 1{,}1779$, $y = 2{,}2710$.

22) Eine unbestimmte Quantität Eisenerz enthalte Eisenoxyd und Eisenoxydul. Durch Reduktion mittels Wasserstoffgases erhält man p Gewichtsteile metallisches Eisen und q Gewichtsteile Wasser. Wie läßt sich hieraus die Menge des Eisenoxyduls (x) und Eisenoxyds (y) berechnen?

Antw.: $x = 3{,}8571p - 8q$, $y = 8{,}8888q - 2{,}8571p$.
Beispiel: $p = 2{,}506$, $q = 1{,}061$; $x = 1{,}1779$, $y = 2{,}2710$.

23) m Gewichtsteile eines aus Eisenoxydul und Eisenoxyd bestehenden Erzes werden in Salzsäure beim Ausschlusse der atmosphärischen Luft aufgelöst und mit Schwefelwasserstoffwasser vermischt. Das Eisenoxyd wird hierdurch in Eisenchlorür reduziert, während sich n Gewichtsteile Schwefel ausscheiden. Wie lassen sich hieraus die Mengen des Eisenoxyduls (x) und des Eisenoxyds (y) berechnen?

Antw.: $x = m - 5n$, $y = 5n$.
Beispiel: $m = 3{,}449$, $n = 0{,}411$; $x = 2{,}055$, $y = 1{,}394$.

24) Eine Auflösung von m Teilen einer Verbindung von Eisenoxyd und Eisenoxydul in Salzsäure wird beim Ausschlusse der atmosphärischen Luft mit metallischem Silberpulver digeriert. Es reduziert sich durch das Silber das Eisenchlorid in Eisenchlorür, und es bildet sich Chlorsilber. Hierdurch ist das Silberpulver um

p Gewichtsteile schwerer geworden. Wie läßt sich hieraus die Menge des Eisenoxyds berechnen? (Methode von Berzelius, siehe Rose II. S. 87 und 679.)

Antw.: $2{,}2535\,p$.

25) Eine Verbindung von Schwefel und Arsen enthält, der chemischen Untersuchung gemäß, in 100 Gewichtsteilen 51,61 Gewichtsteile Schwefel. In welchen Verhältnissen stehen die Atomgewichte der beiden Bestandteile, wenn ein kleiner Versuchsfehler zugegeben wird?

Antw.: Auf 2 Atomgewichte Arsen kommen 5 Atomgewichte Schwefel (As_2S_5 Arsensulfid).

26) Die prozentische Zusammensetzung des Mannits ist: 39,56 Kohlenstoff, 7,69 Wasserstoff, 52,75 Sauerstoff; welches ist die chemische Formel für Mannit?*)

Antw.: Aus $C = 12$, $H = 1$, $O = 16$ erhält man als Äquivalentmenge $3{,}2965\,C$, $7{,}690\,H$, $3{,}2965\,O$. Verwandelt man $\frac{3{,}2965}{7{,}690}$ in einen Kettenbruch, so ist der erste Näherungswert $\frac{3}{7}$, der folgende $\frac{523}{1395}$. Die chemische Formel für Mannit ist demnach: $C_3H_7O_3$.

27) Durch Erhitzen einer konzentrierten Lösung von phosphoriger Säure (H_3PO_3) in Wasser erhält man den nicht selbst entzündlichen Dreifach-Phosphor-Wasserstoff (H_3P), wobei sich Phosphorsäure-Hydrat (H_3PO_4) bildet. Wieviel Atome Dreifach-Phosphor-Wasserstoff, wieviel Atome Phosphorsäure-Hydrat erhält man aus einem Atome phosphoriger Säure, und wieviel Wasser muß wenigstens die phosphorige Säure enthalten?

Antw.: $4\,H_3PO_3 = 3\,H_3PO_4 + H_3P$.

Durch Erhitzen von 4 Molekülen H_3PO_3 erhält man 3 Moleküle H_3PO_4 und 1 Molekül H_3P.

28) In einer Lauge, welche 100 Teile Borax aufgelöst enthält, löse ich soviel Weinstein, als möglich, nämlich 297 Teile, und erhalte durch Abdampfung dieser Auflösung, wobei alles Krystallwasser des Borax verloren geht, 349,90 Teile eines Salzes, das den Namen Tartarus boraxatus führt. Bei der Analyse dieses Salzes finde ich in demselben $74{,}13\,K_2O$, $16{,}37\,Na_2O$, $36{,}53\,B_2O_3$, $208{,}73\,\bar{T}$ ($= C_4H_6O_6$), $14{,}13\,H_2O$. Wie ist die atomistische Zusammensetzung dieses Salzes?

Antw.: Das Salz besteht aus $3K_2O$, $1\,Na_2O$, $2\,B_2O_3$, $6\,\bar{T}\,(= C_4H_6O_6)$, $3\,HO$; die chemische Formel ist: $3\,(K_2C_4H_4O_6) + Na_2C_4H_4O_6 + 2\,(B_2C_4H_4O_8) + 3\,H_2O$.

---

*) S. Fresenius, quantit. chem. Anal. § 202.

29) Nach Mitscherlich (II. 654) bereitet man das zur Darstellung des Goldschwefels (Sulphur auratum Sb_2S_5) erforderliche Natrium-Antimonsulfid (Na_3SbS_4) durch Kochen von Schwefel-Antimon (Sb_2S_3), Schwefel, kohlensaurem Natron und Kalkerde. Es entsteht hierbei antimonsaures Natron (Na_3SbO_4), basisch kohlensaure Kalkerde ($CaCO_3 + H_2CaO_2$), die beide ungelöst zurückbleiben, und Natrium-Antimonsulfid, das aus der Auflösung durch Krystallisation gewonnen werden kann. Wieviel Atomgewichte Schwefel-Antimon (x), kohlensaures Natron (y), Schwefel (z) und Kalkerde (s) muß man nehmen, und wieviel Atomgewichte antimonsaures Natron (t), Natrium-Antimonsulfid (u) und basisch kohlensaure Kalkerde (v) erhält man?

Aufl.: $xSb_2S_3 + yNa_2CO_3 + zS + sCaO = tNa_3SbO_4 + u(3Na_2S + Sb_2S_5) + v(CaCO_3 + H_2CaO_2)$. Hieraus erhält man für die 7 unbekannten Größen 6 Gleichungen: 1) $x = t + u$, in Rücksicht auf Sb; 2) $3x + z = 8u$ in Rücksicht auf S; 3) $y = t + 3u$ in Rücksicht auf Na; 4) $y = v$ in Rücksicht auf C; 5) $s = 2v$ in Rücksicht auf Ca; 6) $3y + s = 6t + 4v$ in Rücksicht auf O. Sollen x, y u. s. w. ganze Zahlen sein, so ergeben sich folgende Werte: $x = 8$, $y = 18$, $z = 16$, $s = 36$, $t = 3$, $u = 5$, $v = 18$. Wendet man also 8 Moleküle Schwefel-Antimon, 18 kohlensaures Natron, 16 Schwefel und 36 Kalkerde an, so erhält man 5 Moleküle Natrium-Antimonsulfid, welche bei der Zerlegung durch verdünnte Schwefelsäure fünf Moleküle Goldschwefel liefern.

30) Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenstoff kommen nicht allein in den Verhältnissen $O = 16$, $H = 1$, $C = 12$ miteinander verbunden vor, sondern auch in den Verhältnissen Vielfacher von Sauerstoff zu Vielfachen von Wasserstoff zu Vielfachen von Kohlenstoff. Wieviel voneinander verschiedene Verbindungen 1-, 2-, 3-, 4- ... 8-facher von Sauerstoff mit 1-, 2-, 3- ... 8-facher von Wasserstoff mit 1-, 2-, 3-, 4- ... 8-facher von Kohlenstoff giebt es, wenn Verbindungen wie H_2CO und $H_4C_2O_2$, oder wie $H_2C_3O_1$ und $H_4C_6O_2$ (was bekanntlich nicht immer der Fall ist) als gleiche angesehen werden sollen?

Antw.: 439.

Tabelle

über die

Einteilung der Münzen, Maße, Gewichte u. s. w.,

welche den Beispielen der vorliegenden Sammlung
zu Grunde liegen.

Münzen.

Nach den Reichsgesetzen vom 4. Dez. 1871 und 9. Juli 1873 ist an die Stelle der in Deutschland früher gebräuchlichen geltenden Landeswährungen die Reichsgoldwährung getreten. Ihre Rechnungseinheit bildet die **Mark**. Außer den Reichsgoldmünzen (zu 20, 10 und 5 Mark) werden 1) als Silbermünzen: Fünf-, Zwei-, Ein-, $\frac{1}{2}$- und $\frac{1}{5}$-Markstücke, 2) als Nickelmünzen: Zehnpfennigstücke und Fünfpfennigstücke, 3) als Kupfermünzen: Zweipfennigstücke und Einpfenigstücke ausgeprägt. 100 Mark in Silbermünzen enthalten ein halbes Kilogramm feines Silber. 1 Mark (ℳ) = 100 Pfennige (₰).

1 Gulden österreichische Währung (*Fl* österr. W.) hat 100 Neukreuzer (*Nkr*). 1 Pfund Sterling (£) hat 20 Schilling (*s*).

1 Franc (*Frc*) hat 100 Centimes (*Cent*).

Metrische (französische) Maßgrößen.

1 Meter, Grundlage der Maße und Gewichte*), = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter.

10 Meter = 1 Dekameter, 10 Dekameter = 1 Hektometer, 10 Hektometer = 1 Kilometer, 10 Kilometer = 1 Myriameter.

1 Ar = 1 □-Dekameter = 100 □-Meter, 1 Hektar = 100 Ar = 10000 □-Meter.

1 Liter = 1 Kubikdecim. = 10 Deciliter. 1 Hektoliter = 100 Liter.

1 Stere = 1 Kubikmeter.

1 Gramm ist gleich dem Gewichte eines Kubikcentimeters reinen Wassers bei der größten Dichtigkeit (4° C.) im luftleeren Raume und auf dem 45. Breitegrade; 1000 Gramm = 1 Kilogramm = 100 Dekagramm.

---

*) Meter ist der 40millionste Teil eines Erdmeridians oder der 10millionste Teil eines Erdmeridianquadranten. Die Länge des Meters wurde durch sehr genaue und sorgfältige Messung des Meridianbogens von Barcelona bis Dünkirchen ermittelt und durch ein Dekret der Nationalversammlung vom 19. Frimaire des Jahres 8 (10. Dezember 1799) als Maßeinheit in Frankreich gesetzlich eingeführt.

Deutsches Maß und Gewicht.

Nach dem Reichsgesetze vom 11. Juli 1884 über Abänderung der Maß- und Gewichtsordnung vom 17. August 1868 ist die Grundlage des Maßes und Gewichts das Meter (*m*)*).

Der hundertste Teil des Meters heißt Centimeter (*cm*); der tausendste Teil des Meters heißt Millimeter (*mm*). Tausend Meter heißen ein Kilometer (*km*).

Die Einheit des Flächenmaßes bildet das Quadratmeter (*qm*). Hundert Quadratmeter heißen ein Ar (*a*). Zehntausend Quadratmeter heißen ein Hektar (*ha*). Zulässig sind Quadratcentimeter (*qcm*) und Quadratmillimeter (*qmm*).

Die Grundlage des Körpermaßes bildet ein Kubikmeter (*cbm*). Die Einheit ist der tausendste Teil des Kubikmeters und heißt das Liter (*l*). Hundert Liter, d. i. der zehnte Teil des Kubikmeters, heißen ein Hektoliter (*hl*). Zulässig sind Kubikcentimeter (*ccm*) und Kubikmillimeter (*cmm*).

Als Entfernungsmaß dient das Kilometer. 1 Meile = 7500 *m*.

Die Einheit des Gewichts bildet das Kilogramm**) (*kg*) (gleich zwei Pfund). Es ist das Gewicht eines Liters destillierten Wassers bei + 4 Grad des hundertteiligen Thermometers. Das Kilogramm wird in 1000 Gramm (*g*) geteilt. Zehn Gramm heißen ein Dekagramm (*dkg*), der tausendste Teil eines Grammes heißt Milligramm (*mg*). 1000 Kilogramm heißen eine Tonne (*t*).

Die in Anwendung zu bringenden Abkürzungszeichen sind bestimmt durch das Reichsgesetz vom 17. November 1877. In Österreich ist nach dem Gesetz vom 23. Juli 1871 eine neue Maß- und Gewichtsordnung festgesetzt, bei welcher ebenfalls das Meter die Grundlage bildet. Die allgemeinen Bezeichnungen schließen sich wie die deutschen den französischen an. Jedoch sind die Abkürzungszeichen etwas anders und bestimmt durch den Ministerial-Erlaß vom 26. März 1883.

---

*) Als Urmaß gilt derjenige Platinstab, welcher im Besitze der Königlich preußischen Regierung sich befindet, im Jahre 1863 durch eine von dieser und der Kaiserl. französischen Regierung bestellte Kommission mit dem in dem Archiv zu Paris aufbewahrten Mètre des Archives verglichen und bei der Temperatur des schmelzenden Eises gleich 1,000 003 01 Meter befunden worden ist. Die Maß- und Gewichtsordnung vom 16. Mai 1816 bestimmt, daß

1 preuß. Fuß = 139,13 Pariser Linien
und 1 Meter = 443,296 " "

ist, wobei das Meter bei 0° Réaum. und die Linien bei 13° R. zu messen sind.

**) Als Urgewicht gilt das im Besitze der Königl. preußischen Regierung befindliche Platin-Kilogramm, welches mit Nummer 1 bezeichnet, im Jahre 1860 durch eine von der preußischen und französischen Regierung niedergesetzte Kommission mit dem in dem Archive zu Paris aufbewahrten Kilogramme prototype verglichen und gleich 0,999 999 842 Kilogramm befunden worden ist.

Die griechischen Buchstaben.

A, *α* Alpha,	*I*, *ι* Jota,	*P*, *ϱ* Rho,
B, *β* Beta,	*K*, *ϰ* Kappa,	*Σ*, *σ*, *ς* Sigma,
Γ, *γ* Gamma,	*Λ*, *λ* Lambda,	*T*, *τ* Tau,
Δ, *δ* Delta,	*M*, *μ* My,	*Y*, *υ* Ypsilon,
E, *ε* Epsilon,	*N*, *ν* Ny,	*Φ*, *φ* Phi,
Z, *ζ* Zeta,	*Ξ*, *ξ* Xi,	*X*, *χ* Chi,
H, *η* Eta,	*O*, *o* Omikron,	*Ψ*, *ψ* Psi,
Θ, *ϑ* Theta,	*Π*, *π* Pi,	*Ω*, *ω* Omega.

Inhalt.